数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 188-194

連分数展開による有理関数の復元とその応用について

村上 弘

MURAKAMI HIROSHI

首都大学東京・都市教養学部・理工学系・数理科学コース

FACULTY OF URBAN LIBERAL ARTS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY*

要約: ある解析的な ODE(非線形も含めた) が与えられたとき「閉じた表式 (closed formula)」を持つ特殊解が存在するかを調べ, もし存在するならば具体的な式として求めたい. もちろん ODE がそのような解を持つのは例外的な場合である. 今回は「閉じた表式」として多項式あるいは有理式を考察する.

ODE の一般解が初期値をパラメタとする巾級数により表せるとき, その巾級数が多項式あるいは有理式を表す必要条件を求めれば解の候補が得られる. 次数の上限を与えるとその範囲内での多項式及び有理式の解の候補は全て拾い上げることができる. 考えている ODE に対して任意に与えられた多項式または有理式がその解かを常に判定できるという「仮説」を用いれば, 次数を制限した多項式解あるいは有理式解を列挙することができる.

1 方針と原理

解析的な ODE に対して,ODE を巾級数の係数についての連立代数方程式に還元する巾級数解法は汎用性が高い. そこで ODE が多項式あるいは有理式を解として持つかの判定に, まず (初期値をパラメタとして係数に含んだ) 巾級数の形で ODE の一般解を得ておき, 次に巾級数解が多項式あるいは有理式を表すようにパラメタを決定する方法が考えられる. 巾級数解が多項式となる条件は有理式となる条件よりも簡単である.

多項式解の場合: 「多項式の巾級数は有限項で切れる. 逆に有限項で切れた巾級数は多項式である」このことを利用する. まず一般解を ODE の初期値のパラメタを係数に含む巾級数として得ておく. パラメタをうまく選ぶことで巾級数が有限項で切れるようにできると, その切れた巾級数が多項式解を与える.

有理式の場合: 連分数展開 (continued fraction expansion) の性質: 「有理関数の巾級数を連分数展開すると展開は有限回で切れる. 逆に有限回で切れた連分数展開は有理関数である」このことを利用する. まず一般解を初期値のパラメタを係数に含んだ巾級数として得ておく. パラメタをうまく選ぶことで巾級数の連分数展開が有限回で切れるようにできると, その切れた連分数展開 (を簡約したもの) が有理式解を与える.

代数的な処理を可能とするためには, 少なくとも ODE が y と y の導関数について代数的である必要がある.

*⟨murakami@tmca.ac.jp⟩

2 準備

2.1 巾級数の連分数展開と有理式の復元

良く知られている事柄であるが「連分数展開を用いると有理関数 $y(x)$ の巾級数から有理式が復元できる」ことをまず説明する. 以下では適切に x 座標をとり直して $y(x)$ が $x=0$ で正則だと仮定する.

$y(x)$ の $x=0$ での巾級数を $y(x)=c+\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j$ とする. $y^{(0)}(x)\equiv y(x)$, $c^{(0)}\equiv c$, $a_j^{(0)}\equiv a_j$ と置いて, 以下の手順による展開を $k=0$ から始めて繰り返す.

LOOP : $y^{(k)}(x)$ の巾級数から定数項 $y^{(k)}(0)=c^{(k)}$ を除く:

$$y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{(k)}x^j .$$

上式の右辺が恒等的に零ならば繰り返し **LOOP** から出て終了.

上式の右辺が x のちょうど L_k 次の項から始まるなら,

$y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)=x^{L_k}\sum_{j=0}^{\infty}a_{L_k+j}^{(k)}x^j$ と書ける. 但し $L_k\geq 1, a_{L_k}^{(k)}\neq 0$.

定数項が零でない巾級数の逆数は巾級数に展開できるから

$\left(y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)\right)/x^{L_k}$ の逆数を $y^{(k+1)}(x)$ と置き,

$y^{(k+1)}(x)$ の巾級数の展開係数を $c^{(k+1)}, a_j^{(k+1)}, (j\geq 1)$ と定義:

$$y^{(k+1)}(x) \equiv \left(\frac{y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)}{x^{L_k}}\right)^{-1}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{L_k+j}^{(k)}x^j\right)^{-1}\equiv c^{(k+1)}+\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{(k+1)}x^j .$$

$k=k+1$ と置いて **LOOP** へ戻る.

以上の反復に現れる全ての係数 $c^{(k)}$, $a_j^{(k)}\,(j\geq 1)$ は c, $a_j\,(j\geq 1)$ から四則演算のみを用いて表される.

もしも巾級数 $y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)$ が k 段目で恒等零になると反復は停止して元の $y(x)$ は有理関数である. その逆も成立し (証明は後述), $y(x)$ が有理関数であるときに限り反復が停止する.

条件「$y^{(k)}(x)-y^{(k)}(0)$ の巾級数 $\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{(k)}x^j$ が恒等零」は, 「無限個の係数 $a_j^{(k)}\,(j\geq 1)$ が全て零」だから, (巾級数の一般項が閉じた式で表せない場合は) 巾級数の先頭の有限個の係数からは十分条件が得られないが, 必要条件は得られる.

巾級数の連分数展開が $k=m$ 段目で止まれば, 関係: $y^{(k)}(x)=c^{(k)}+\dfrac{x^{L_k}}{y^{(k+1)}(x)}$ により $y(x)$ の連分数展開は: $y(x)=c^{(0)}+\dfrac{x^{L_0}}{c^{(1)}+}\,\dfrac{x^{L_1}}{c^{(2)}+}\,\dfrac{x^{L_2}}{c^{(3)}+}\,\ldots\dfrac{x^{L_{m-1}}}{c^{(m)}}$ となる.

有理関数 $y(x)$ を既約な有理式として表したとき, 分子の次数は $(m-1)$ 以下の偶数の添字を持った L_k の和になり, 分母の次数は $(m-1)$ 以下の奇数の添字を持った L_k の和となるので

$$\begin{array}{lll}
(m-1)=-1 & \text{のとき, 分子の次数}: 0; & \text{分母の次数}: 0, \\
(m-1)=2\ell & \text{のとき, 分子の次数}: \sum_{j=0}^{\ell}L_{2j}; & \text{分母の次数}: \sum_{j=0}^{\ell-1}L_{2j+1}, \\
(m-1)=2\ell+1 & \text{のとき, 分子の次数}: \sum_{j=0}^{\ell}L_{2j}; & \text{分母の次数}: \sum_{j=0}^{\ell}L_{2j+1}.
\end{array}$$

「有理関数の次数」は既約な有理式として表したときの「分子と分母の次数の最大値」と定義する.

2.2 有理関数の巾級数の連文数展開の停止性

$y(x)$ は有理関数で既約な有理式 $P(x)/Q(x)$ であるとする (P, Q は多項式). 但し $x=0$ で仮定した正則性から分母には $Q(0)\neq 0$ を課しておく. $n\equiv \max(\deg P, \deg Q)$ と置くと $y(x)$ は:

$$y(x) = P(x)/Q(x) = \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n\right) / \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right) .$$

但し $q_0 \neq 0$ である. そこで $y(0) = p_0/q_0$; $p'_j \equiv p_j - y(0)\cdot q_j$, $(j\geq 1)$ と置くと,

$$y(x) - y(0) = \left(p'_1 x + p'_2 x^2 + \cdots + p'_n x^n\right) / \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right) .$$

分子が零多項式になると連分数展開はそこで切れる.

分子が零多項式ではなくて x のちょうど L_0 巾で割れるなら, (但し $L_0 \geq 1$ で, 更に $p'_{L_0} \neq 0$)

$$y(x) - y(0) = x^{L_0} \times \left(p'_{L_0} + p'_{L_0+1} x + \cdots + p'_n x^{n-L_0}\right) / \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right) . \text{ よって,}$$

$$y^{(1)}(x) \equiv x^{L_0} / (y(x) - y(0)) = \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right) / \left(p'_{L_0} + p'_{L_0+1} x + \cdots + p'_n x^{n-L_0}\right) .$$

同様に展開を一段階さらに進めて, $y^{(1)}(0) = q_0/p'_{L_0}$; $q'_j \equiv q_j - y^{(1)}(0)\cdot p'_{L_0+j}$; $q'_m \equiv q_m$
$(1 \leq j \leq n - L_0 < m \leq n)$ と置いて,

$$y^{(2)}(x) \equiv x^{L_1} / \left(y^{(1)}(x) - y^{(1)}(0)\right) = \left(p'_{L_0} + p'_{L_0+1} x + \cdots + p'_n x^{n-L_0}\right) / \left(q'_{L_1} + q'_{L_1+1} x + \cdots + q'_n x^{n-L_1}\right) .$$

(但し $L_1 \geq 1$ で, 更に $q'_{L_1} \neq 0$.)

この有理式を $P'(x)/Q'(x)$ と表すと, 分子 P', 分母 Q' は, $\deg P' \leq n - L_0$ で,$\deg Q' \leq n - L_1$ だから, 分子分母の次数の最大値 n' は (L_0, $L_1 \geq 1$ だから) $n' = \max(\deg P', \deg Q') \leq \max(n - L_0, n - L_1) < n$. つまり連分数展開を二段階進めると分子分母の次数の最大が必ず減少するので, 高々n 次の有理関数の連分数展開は高々$2n$ 段目までで切れる.

$y(x)$ を有理関数とするとき, 有理式の表現と巾級数の表現のそれぞれについて連分数展開を行なうと, 両者の各段階での展開係数と展開が切れるまでの段数は一致し, 同一の連分数展開を得ることが少し考えれば判る. よって有理関数 $y(x)$ の巾級数表現を連分数展開することで $y(x)$ を既約有理式の形に復元できる.

> 注: 一般には, 巾級数の係数の一般項が有限の式で表現できるような特殊な場合を除くと, 無限個ある巾級数の全係数を有限ステップの手順で検査したり操作することは不可能である. そのため連分数展開を用いて巾級数の有限個の項をみるだけで巾級数がはたして完全に級数として零なのか, それともいま扱っている有限個の範囲の項の係数は全て零だがさらに高次の項に行けば非零の係数が出てくるのかは有限ステップの手順では判断が不可能である. そのため, あくまでも探索した次数の範囲での有理関数の候補が得られるに過ぎない. 但し, もしも他の理由から有理関数であること及び次数の上限が既知ならば, 正しい有理式を有限ステップの手順で復元することができる.

3 一階正規形ODEの初期値問題の巾級数展開

3.1 Picardの逐次近似法による巾級数展開

一階正規形 ODE の初期値問題: $y'(x) = F(x, y(x))$, $y(0) = \lambda$, ($F(x,y)$ は解析的とする) の解の巾級数展開: $y(x,\lambda) = \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\lambda) x^j$ の ℓ 次以下の有限部分を $y_{[\ell]}(x,\lambda) \equiv y(x,\lambda) \bmod x^{\ell+1} = \lambda + \sum_{j=1}^{\ell} a_j(\lambda) x^j$ と

置くと,ODEから $y'_{[\ell+1]}(x,\lambda) = F(x, y_{[\ell]}(x,\lambda)) \bmod x^{\ell}$. あるいは $\ell=0$ で $y_{[0]}(x,\lambda)=\lambda$ から始めてPicard型の反復: $y_{[\ell+1]}(x,\lambda) = \lambda + \int_0^x \{F(x,\, y_{[\ell]}(x,\lambda)) \bmod x^{\ell+1}\}\, dx$ により, 巾級数展開の次数が一次ずつ改良される [2].

3.2 Newton法による巾級数展開

Newton法では以下のようになる.(各関数の引数 x, λ は省略する.)

残差を $r_{[k]} = y'_{[k]} - F(x, y_{[k]})$ として, $y_{[k+1]} \equiv y_{[k]} + \delta y_{[k]}$ と置くと, 新たな残差 $r_{[k+1]}$ は

$$\begin{aligned} r_{[k+1]} &= y'_{[k+1]} - F(x, y_{[k+1]}) \\ &= (y_{[k]} + \delta y_{[k]})' - F(x, y_{[k]} + \delta y_{[k]}) \\ &= y'_{[k]} + \delta y'_{[k]} - F(x, y_{[k]}) - F_y(x, y_{[k]})\delta y_{[k]} + O(\delta y_{[k]}^2) \\ &= r_{[k]} + \delta y'_{[k]} - F_y(x, y_{[k]})\delta y_{[k]} + O(\delta y_{[k]}^2)\,. \end{aligned}$$

すると,$x=0$ で零となる $\delta y_{[k]}$ が一般線型一階ODE: $\delta y'_{[k]} - F_y(x, y_{[k]})\delta y_{[k]} = -r_{[k]}$ を満たせば $r_{[k+1]} = O(\delta y_{[k]}^2)$.

$\delta y_{[k]}$ のODEは $T \equiv \exp\left(\int_0^x F_y(x, y_{[k]})dx\right)$ と置くと, $\delta y_{[k]} = -T\int_0^x \frac{r_{[k]}}{T}\, dx$ と解ける. (計算には必要な x の次数までの巾級数展開を用いる.)

$r_{[k]}$ が $O(x^M)$ とすると $\delta y_{[k]}$ は $O(x^{M+1})$ になり, $r_{[k+1]}$ は $O(x^{2(M+1)})$,$\delta y_{[k+1]}$ は $O(x^{2M+3})$ になる.

よって $y_{[k]}$ の M 次までの項が正しければ,$y_{[k+1]}$ は $2M+2$ 次の項まで正しい. つまり反復一回について正しい係数の項の次数がほぼ倍増する.

3.3 Ricatti方程式の巾級数展開

Ricatti方程式 $y'(x) - y^2(x) = J(x)$ は正規形ODEだから,Picard反復法を適用すると巾級数展開が可能である. $J(x)$ は $x=0$ で正則と仮定して, $x=0$ での $y(x)$ の巾級数展開を一次ずつ求めると次のようになる.

> $J(x)$ の $x=0$ を中心とする巾級数展開を $\widetilde{J}(x)$ とする. 関数 y の $x=0$ での初期値を λ とし, $y(x,\lambda)$ の巾級数展開を x の ℓ 次までで止めた展開の有限部分を $y_{[\ell]}(x,\lambda)$ と書く.

$\ell=0$ のとき $y_{[0]}(x,\lambda) \leftarrow \lambda$;

LOOP : 次数 ℓ が必要な次数に達したらLOOPを終了;
残差 $r_{[\ell]}(x,\lambda) \equiv \widetilde{J}(x) - y'_{[\ell]}(x,\lambda) + y_{[\ell]}^2(x,\lambda)$ は $O(x^{\ell})$;
その x^{ℓ} の項の係数を $(\ell+1)$ で割って $a_{\ell+1}(\lambda)$ と置く;
$y_{[\ell+1]}(x,\lambda) \leftarrow y_{[\ell]}(x,\lambda) + a_{k+1}(\lambda)x^{k+1}$;
$\ell \leftarrow \ell+1$ としてLOOPに戻って繰り返す;

実際このようにすると $(\ell+1)$ 番目の残差は:

$$\begin{aligned} & r_{[\ell+1]}(x,\lambda) \\ &= \widetilde{J}(x) - y'_{[\ell+1]}(x,\lambda) + y_{[\ell+1]}^2(x,\lambda) \\ &= \widetilde{J}(x) - y'_{[\ell]}(x,\lambda) + y_{[\ell]}^2(x,\lambda) - (\ell+1)a_{\ell+1}(\lambda)x^{\ell} + O(x^{\ell+1}) \\ &= r_{[\ell]}(x,\lambda) - (\ell+1)a_{\ell+1}(\lambda)x^{\ell} + O(x^{\ell+1}) \\ &= O(x^{\ell+1})\,. \end{aligned}$$

つまり正整数 ℓ に対して $y_{[\ell]}(x,\lambda)$ の巾級数展開を x の ℓ 次までとると Ricatti 方程式の残差は $O(x^\ell)$ になる.

よって y の巾級数展開は「λ の多項式 $a_j(\lambda)$」を係数として $y(x,\lambda)=\lambda+\sum_{j=1}^{\infty}a_j(\lambda)x^j$.

係数 $a_{k+1}(\lambda)$ は,「$J(x)$ の巾級数展開 $\tilde{J}(x)$ の k 次以下の係数」及び λ の多項式として求まる.

4 Ricatti 方程式の多項式解あるいは有理式解の探索

一階 ODE である Ricatti 方程式 $y'(x)-y^2(x)=J(x)$, ($J(x)$ は $x=0$ で解析的) を例にあげて多項式解あるいは有理式解の探索を考察する.

まず次の作業仮説を要請する:「任意に与えた多項式あるいは有理式が ODE の解であるかは常に判定できる.」もし判定が常にはできないとすると解を閉じた式 (いまの場合は多項式あるいは有理式) として求めることはあまり意味がないであろう. 判定が具体的にどのように実現され得るかには立ち入らずに, この仮説をとりあえず認めることにする.

$x=0$ での初期値 $y(0)=\lambda$ をパラメタとする. 一般解 $y(x)$ の巾級数展開を任意に高次まで求める. Ricatti 方程式は正規形 ODE なので解 $y(x)$ の望みの次数までの巾級数展開を Picard の反復法により得ることができる. この巾級数が多項式あるいは有理式になるための λ の必要条件を求める. 必要条件を満たした巾級数からは多項式あるいは有理式となり得る「解の候補」の具体的な式が得られる. 得られた解の候補が ODE の真の解であるかは作業仮説により判定可能である.

> 予備検査として, 必要条件を満たす λ を初期値とする ODE の解の巾級数を任意に高い次数の項まで求める. それと「解の候補の式」の巾級数展開との展開係数の一致を調べる.「解の候補の式が」ODE の真の解ならば展開係数は求めた範囲で全て一致するはずである. 高い次数まで一致すると真の解と異なる可能性は少なくなる.

5 巾級数解が多項式を表す必要条件

一階の ODE の特解として多項式解を探索することを考える. その前に作業仮説:「任意に与えた多項式が ODE の解であるか必ず判定できる」を置く. もしもこの判定が可能でなければ ODE の多項式解を求める意義がないだろうので, これを認めておく.

ODE の初期値をパラメタとして λ とする. 一般解は正則点 x_0 の周りで係数が λ を含む巾級数に展開できる. もしも ODE が一般解が多項式を含むならば,λ をうまく選ぶとある値を越えた次数を持つ巾級数の項は全て零となり多項式に退化する.

いま高々k 次の多項式解があると仮定すると, 巾級数の $(k+1)$ 次以上の項の係数は全て零である. すなわち λ は係数 $a_j(\lambda)$, $(j>k)$ の共通零点になる. よって連立する無限個の方程式 $a_j(\lambda)=0$, $(j>k)$ を解いて λ を求めれば必要充分条件が得られる. しかし実際には無限個の方程式を解くことはできないから, 有限個を選んで解けば必要条件が得られる. 連立させる方程式を逐次追加すると, 共通零点の集合は単調に減少する. 連立方程式 $a_j(\lambda)=0$, $(k<j\le\ell)$ を満たす λ の値の集合を E_k^ℓ とすれば, $\ell<\ell'$ ならば $E_k^{(\ell)}\supseteq E_k^{(\ell')}$ であり, また $E_k^{(\ell)}\supseteq E_k^{(\infty)}$ である. つまり, 途中までの有限個の方程式を連立させた零点の集合 $E_k^{(\ell)}$ は漏れなく全てを連立させた零点の集合 $E_k^{(\infty)}$ を含む. もしも $E_k^{(\ell)}$ が有限集合ならば,$E_k^{(\infty)}$ も有限集合で $E_k^{(\infty)}$ の全ての要素は $E_k^{(\ell)}$ の要素になっているから余分なものを含めてよければ漏れなく列挙できる.

係数の列 $a_j(\lambda)$ を添字の小さいものから順に見てゆくとき, λ について恒等的に零ではない最初のものを $a_\ell(\lambda)$ とする. $a_\ell(\lambda)$ の零点となる λ の集合を E_k とする. いま E_k が有限集合と仮定する.

$\lambda \notin E_k$ なら巾級数は高々k次の多項式にはなり得ない. 全ての $\lambda_\mu \in E_k$ に対して $\lambda = \lambda_\mu$ がその後の係数 $a_{\ell+1}(\lambda), \cdots$ を全て零にするか否かを調べる. (初期値を $\lambda = \lambda_\mu$ と置いて得られる ODE の解の巾級数の係数を調べてもよい.) 途中の係数に零ではないものがあれば λ_μ は共通零点ではなく, 巾級数は高々k次の多項式にはならない.

係数の一般項が具体的な式として表せるなどの特殊な場合を除くと, 有限ステップの手順では $\lambda = \lambda_\mu$ が無限個の展開係数の零点であることは示せないので充分多くの展開係数の零点になることを確認したら一旦残り全ての零点にもなると仮定してみる. すると高々k次の多項式が解の候補として得られる. その多項式が ODE の真の解であるかの判定は作業仮説により可能である.

6 巾級数解が有理式を表す必要条件

一階の ODE の $x=0$ で $y=\lambda$ となる解の巾級数を $y(x,\lambda) = \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\lambda)x^j$ とする. $y^{(0)}(x,\lambda) \equiv y(x,\lambda)$ と置いて連分数に展開する.

以下を $k=0$ から始めて繰り返す.

LOOP: 巾級数 $y^{(k)}(x,\lambda) - c^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(k)}(\lambda)x^j$ とする.
上の巾級数の係数 $a_j^{(k)}(\lambda)\ (j \geq 1)$ を全て零にするλがとれるならば,
連分数展開はk段目のここで止まり,
そのλの値に対して $y(x,\lambda)$ は有理関数.
巾級数を有限項で切った係数からでは巾級数が恒等零
である十分条件は得られないが, 必要条件は得られる.
巾級数の係数を全て零にしないλの値に対して,
有限の正整数として右辺の巾級数の位数 $L_k(\lambda)$ が決まる.
位数 $L_k(\lambda)$ はλの値の選択に依存.

$$y^{(k+1)}(x,\lambda) \equiv \left(\frac{y^{(k)}(x,\lambda) - c^{(k)}(\lambda)}{x^{L_k(\lambda)}}\right)^{-1} = c^{(k+1)}(\lambda) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(k+1)}(\lambda)x^j$$

$k \leftarrow k+1$ として LOOP へ戻る.

M次以下の有理関数を探索する場合は解の巾級数展開は少なくとも $2M$ 次の項を越えた所まで求める必要がある.

以下を $k=0,1,2,\cdots$ について調べて, 探索する有理関数の範囲を次第に高次へと拡大する.

λ の有理式である係数 $a_j^{(k)}(\lambda)$, $(j \geq 1)$ を順に調べて最初の"恒等的に零ではない"係数の添字を j_k とする. (そのような添字が無ければ, 右辺は λ に依らずに最初から恒等零である.)

係数 $a_{j_k}^{(k)}(\lambda)$ を零にする値 λ は高々有限個. その有限個の値の集合を E_k. (E_k が空集合もありえる.)

全ての $\lambda \notin E_k$ に対し, $y^{(k)}(x,\lambda)$ の定数項を除いた巾級数展開の位数は j_k になる. (位数 ≡ 非零係数を持つ最低次の項の次数. 存在しなければ無限大.)

各 $\lambda \in E_k$ に対して位数 $L_k(\lambda)$ を調べる. 位数が有限の場合には連分数展開はk段目では切れない. しかし, 巾級数展開の用意された有限部分の範囲内で全ての項の係数が零になるかあるいは最初の方の十分多くの項の係数がどれも零になるときは, 定数項を省いた巾級数が真に零で有

限の位数 $L_k(\lambda)$ が存在しない可能性がある. そのような λ に対して有限ステップの手順では無限個の係数 $a_j^{(k)}(\lambda), (j > j_k)$ が全て零であるか否かは決定できない. 予備試験として「j_k 番目以降に続く M 個の係数も零である」の成立を確認する. $M{\geq}0$ は任意だがある程度の個数を調べるのがよい.

予備試験に合格したら,「有限の位数 $L_k(\lambda)$ が存在しない」と仮定してみる. すると連分数展開は k 段目で切れ, x の有理関数 $y(x, \lambda)$ を与える. その $y(x, \lambda)$ が元の方程式の解であるか否かを調べる. この判定が常に可能であることは作業仮説として要請した.

元の方程式の解であると判定されたら,λ の値に対応した有理関数解が求まったことになる. 元の方程式の解でなければ, その λ の値に対する仮定,「有限の位数 $L_k(\lambda)$ が存在しない」が間違いであることになる. そのときは, 必要なら位数 $L_k(\lambda)$ を決定するために巾級数展開の項数を増してやる.

有理関数の次数は, これまで既に確定できた $\{L_j, (j{\leq}k)\}$ の偶数添字を持つものの和 (=分子の次数) と, 奇数添字を持つものの和 (=分母の次数) の最大値である. 探索すべき有理関数の次数の上限を越えたら, 探索を終了する.

この探索法は有理関数の次数に上限を設けると有限ステップで停止するが, 上限の設定がなければ一般には停止しない. 例えばパラメタを如何に選んでも巾級数が有理関数を表さないなら連分数展開は無限に続く. このように有理関数が存在すると停止するが存在しないと停止しないので, 探索する有理関数の次数に上限を設けなければアルゴリズムにならないので「指定した次数以下有理関数解を見い出すかあるいはそのような解が存在しないことを示す」という使われ方になる.

7 おわりに

巾級数展開を経由して多項式解もしくは有理式解を捜し出す手法について考察した. 無限個ある級数の係数全てに対する操作や零判定は有限ステップの手順では不可能であるので, 手順を有限停止にするためには探索の際に多項式あるいは有理式の次数に上限を設定する必要がある. しかしいくら大きな次数を指定し探索して解がなかったとしても, それを越えたところに解が存在している可能性が常にある.

もしも多項式解あるいは有理式解が存在するならその次数の真の上限を, もしも存在しなければそのことを, それぞれ数学的な根拠に基づいた別の手段で得ていなければ完全な解答にはならない.

今回の巾級数展開を経由する方法ではなくて解 $y(x)$ に多項式あるいは有理式の一般型を直接 ODE に代入し, 何らかの方法で代数的に処理して一般型の係数を求めるやり方も考えられる. しかしその場合にも, 次数の上限の仮定が要る.

参 考 文 献

[1] George A. Baker, Jr., Peter Graves-Morris,"Pade approximants",Vol.13-14, *Encyclopedia of mathematics and its applications*, Addison-Wesley, 1981.

[2] 平山 弘, 小宮 聖司, 佐藤 創太郎, "Taylor 級数法による常微分方程式の解法", 日本応用数理学会論文誌, pp.1-8, Vol.12, No.1, April (2002).