数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 247-253

Existence Theorems for Nonlinear Monotone Operators and Minimization Problem in Hilbert spaces

Shin-ya Matsushita (松下 慎也), Wataru Takahashi (高橋　渉)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology
(東京工業大学 大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし，$f:H\to(-\infty,\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．ここで，

$$f(u)=\min_{x\in H}f(x)$$

を満たす点 u を求める問題を制約なしの凸最小化問題という．このとき，$x\in H$ に対して，

$$\partial f(x)=\{z\in H:f(y)\geq\langle y-x,z\rangle+f(x)\quad(y\in H)\}$$

を対応させる H から H への多価写像 ∂f を f の劣微分という．∂f は単調作用素になることが知られている．これは，任意の $(x,x^*),(y,y^*)\in G(\partial f)$ に対して、

$$\langle x-y,x^*-y^*\rangle\geq 0$$

が成り立つときをいう．ただし，$G(\partial f)$ とは，写像 ∂f のグラフで $G(\partial f)=\{(x,x^*):x^*\in\partial f(x)\}$ である．さらに，∂f は極大単調作用素である．すなわち，∂f のグラフを真に含むような単調作用素は存在しない．このとき，$f(u)=\min_{x\in H}f(x)$ であることは，$0\in\partial f(u)$ であることと同値になる．このことから，制約なしの凸最小化問題は，極大単調作用素 T に対して，

$$0\in Tu \tag{1.1}$$

を満たす点 u を求める問題に帰着できる．(1.1) を満たす元 $u\in H$ を，T の零点といい，T の零点の集合を $T^{-1}0$ と表す．

単調作用素の零点の存在定理はこれまで多くの研究者によって研究されてきた．1978 年，Schöneberg [5] は一価の単調作用素に対して次の存在定理を証明した．

定理 1.1 (Schöneberg [5]) U を Hilbert 空間 H の開集合とする．$T:\overline{U}\to H$ を一価でデミ連続な単調作用素とし，$(I-T)(\overline{U})$ が有界であるとする．ただし，$\overline{U}$ とは集合 U の閉包である．このとき，ある $x_0\in U$ が存在して

$$Tx\neq t(x-x_0)\quad ((t,x)\in(-\infty,0)\times\partial U) \tag{1.2}$$

が成り立つならば，$T^{-1}0\neq\emptyset$ である．

本研究では、Hilbert 空間における単調作用素の零点の存在について研究する．[5] では，零点を存在を示すために条件 (1.2) を与えている．ここでは (1.2) とは異なる条件を与え，零点の存在定理を証明する．その応用として，凸最小化問題の解の存在，及び非拡大写像の不動点が存在するための必要十分条件を論述する．

2 準備

H を Hilbert 空間とし，その内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ で表すことにする．C を H の空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $x\in H$ に対して

$$\|x_0-x\|=\min_{y\in C}\|y-x\|$$

となるような $x_0\in C$ が一意に存在する．そこで，$x\in H$ に対して，このような C の元 x_0 を対応させる写像を P_C で表し，P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする．距離射影は次の性質を持つことが知られている [1, 8, 9]．

命題 2.1 C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし，$x\in H$ とする．このとき，次の (1) と (2) は同値である．

(1)
$$x_0=P_Cx;$$

(2)
$$\langle x_0-y,x-x_0\rangle\geq 0\quad (y\in C).$$

この性質を用いると，P_C は非拡大写像，すなわち

$$\|P_Cx-P_Cy\|\leq\|x-y\|\quad (x,y\in H)$$

であることがわかる．

一価写像 $T:H\to H$ が単調であるとは，任意の $x,y\in D(T)$ に対して，

$$\langle x-y,Tx-Ty\rangle\geq 0$$

が成り立つときをいう．また，T がヘミ連続であるとは，任意の $u, v, w \in H$ に対して，$[0,1]$ から実数 $\mathbf{R}$ への関数

$$t \mapsto \langle w, T(tv + (1-t)u) \rangle$$

がつねに連続であるときをいう．

3 存在定理

この節では，一価でヘミ連続な単調作用素の零点が存在するための十分条件について議論する．その前に定義を与えておく．C と X をバナッハ空間 E の閉集合とする．このとき，$z \in \partial_C X$ であるとは，$z \in X$ であり，さらに z の任意の近傍 $U(z)$ に対して

$$U(z) \cap (C - X) \neq \phi$$

となるときをいう．$z \in i_C X$ であるとは，$z \in X$ であって，さらに z のある近傍 $U(z)$ に対して，

$$U(z) \cap (C - X) = \phi$$

となるときをいう．$\partial_C X$ は C に関する X の境界といい，$i_C X$ を C に関する X の開核という [6, 9]．次の定理は平野-高橋 [2] によって証明された．

定理 3.1 (平野-高橋 [2]) E を回帰的 Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合，$T : C \to E^*$ を一価でヘミ連続な単調作用素とする．このとき，次の (1) と (2) は同値である．

(1) ある $x_0 \in C$ が存在して

$$\langle y - x_0, Tx_0 \rangle \geq 0 \quad (y \in C);$$

(2) C の有界閉凸部分集合 K が存在して，任意の $z \in \partial_C K$ に対してある $y \in i_C K$ が存在して

$$\langle y - z, Tz \rangle \leq 0.$$

この定理を用いて，次の存在定理が得られる．

定理 3.2 H を Hilbert 空間，$T : D(T) \to H$ を一価のヘミ連続な単調作用素とし，C を $D(T)$ の有界閉凸部分集合とする．このとき，

$$\inf_{y \in C} \|y - (I-T)x\| < \|x - (I-T)x\| \quad (x \in C, (I-T)x \notin C)$$

が成り立つならば，$T^{-1}0 \cap C \neq \phi$ である．

証明 T は一価でヘミ連続な単調作用素であるから，定理 3.1 を用いると，ある $x_0 \in C$ が存在して

$$\langle y - x_0, Tx_0 \rangle \geq 0 \quad (y \in C)$$

となる．これより

$$\langle x_0 - y, (I-T)(x_0) - x_0 \rangle \geq 0 \quad (y \in C)$$

となる．ここで命題 2.1 を用いると，

$$x_0 = P_C(I-T)(x_0) \tag{3.1}$$

が成り立つ．距離射影の定義より

$$\|x_0 - (I-T)(x_0)\| = \inf_{y \in C} \|y - (I-T)(x_0)\|.$$

仮定より，$(I-T)(x_0) \in C$ となる．これと (3.1) より

$$x_0 = (I-T)(x_0)$$

が得られる．よって　$Tx_0 = 0$　となる．■

4　応用

定理 3.2 を用いて，いくつかの存在定理を証明する．まず，Gâteaux 微分可能な凸関数に対する最小化問題への応用を与える．その前に定義を与えておく．関数 $f : H \to (-\infty, \infty]$ が凸関数であるとは，すべての $x, y \in H$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

が成り立つことをいう．さらに，f が $x \in H$ において Gâteaux 微分可能であるとは，ある $x^* \in H$ が存在して，任意の $y \in H$ に対して，

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \langle y, x^* \rangle \tag{4.1}$$

が成り立つときをいう．ここで，f が Gâteaux 微分可能であるような元 $x \in H$ に対して，(4.1) を満たすような元 x^* を対応させるような写像を ∇f と表し，∇f を f の勾配と呼ぶことにする．

定理 4.1 H を Hilbert 空間，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を Gâteaux 微分可能な凸関数とし，C を $D(\nabla f)$ の有界閉凸部分集合とする．このとき，

$$\inf_{y \in C} \|y - (I - \nabla f)x\| < \|x - (I - \nabla f)x\| \quad (x \in C, (I - \nabla f)x \notin C)$$

が成り立つならば,

$$f(x_0) = \min_{y \in H} f(y)$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する.

証明　関数 $f : H \to (-\infty, \infty]$ が Gâteaux 微分可能であるとき, f が凸関数であることの必要十分条件は, ∇f がヘミ連続で単調作用素となることである [4]. ここで, 定理 3.2 を用いると, $(\nabla f)^{-1}0 \cap C \neq \emptyset$ となる. $x_0 \in C$ を $\nabla f(x_0) = 0$ を満たすような元とする. このとき

$$f(x_0) = \min_{y \in H} f(y)$$

となる. ■

次に, 非拡大写像の不動点定理への応用を考える. C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とする. 写像 $S : C \to C$ が非拡大であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つときをいう. また, 写像 S の不動点集合を $F(S)$ と表す.

定理 4.2 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合, $S : C \to C$ を非拡大写像, K を C の有界閉凸部分集合とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値である.

(1)

$$F(S) \cap K \neq \emptyset;$$

(2)

$$\inf_{y \in K} \|y - Sx\| < \|x - Sx\| \quad (x \in K, Sx \notin K). \tag{4.2}$$

証明　まず、(2) を仮定する. 写像 $I - S : C \to H$ はヘミ連続な単調作用素である. 実際, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} \|(I - S)x - (I - S)y\| &\leq \|x - y\| + \|Sx - Sy\| \\ &\leq 2\|x - y\| \end{aligned}$$

が成り立つことからヘミ連続となる. また, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle x - y, (I - S)x - (I - S)y \rangle &= \|x - y\|^2 - \langle x - y, Sx - Sy \rangle \\ &\geq \|x - y\|^2 - \|x - y\|\|Sx - Sy\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つことから単調作用素である. さらに,

$$\begin{aligned} \inf_{y \in K} \|y - \{I - (I - S)\}x\| &= \inf_{y \in K} \|y - Sx\| \\ &< \|x - Sx\| \\ &= \|x - \{I - (I - S)\}x\| \end{aligned}$$

となる．よって定理3.2から，$(I-S)^{-1}0 \cap K \neq \emptyset$である．つまり$(I-S)x_0 = 0$を満たす$x_0 \in K$が存在する．よって$x_0 \in F(S) \cap K \neq \emptyset$が得られる．

次に$F(S) \cap K \neq \emptyset$とする．ここで$Su \notin K$となる$u \in K$が存在して

$$\inf_{y \in K} \|y - Su\| = \|u - Su\|$$

が成り立つとする．$z \in F(S)$とすると，

$$\begin{aligned}
\|z-u\|^2 &\geq \|Sz - Su\|^2 \\
&= \|Sz - u + u - Su\|^2 \\
&= \|Sz - u\|^2 + 2\langle Sz - u, u - Su\rangle + \|u - Su\|^2 \\
&= \|Sz - u\|^2 + 2\langle Sz - P_K Su, P_K Su - Su\rangle + \|u - Su\|^2 \\
&> \|z - u\|^2
\end{aligned}$$

となり，これは矛盾である．よって(4.2)が成り立つ．■

最後に，制約なしの凸最小化問題への応用を考える．$f: H \to (-\infty, \infty]$をproperで下半連続な凸関数とする．このとき，$x \in H$に対して，

$$\partial f(x) = \{x^* \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^*\rangle \quad (y \in H)\}$$

を対応させるHからHへの多価写像∂f(fの劣微分)は極大単調作用素となる．すなわち，∂fは単調であり，∂fのグラフ$G(\partial f) = \{(x, x^*) \in H \times H : x^* \in \partial f(x)\}$を真に含むような単調作用素が存在しない．このとき，任意の$x \in H$に対して，

$$J_r(x) = \{z \in H : x \in z + r\partial f(z)\}$$

とすると，J_rはHから$D(\partial f)$への一価写像となる[8, 9]．これを∂fのリゾルベントという．定理4.2を用いて，次の定理が得られる．

定理 4.3 HをHilbert空間，$f: H \to (-\infty, \infty]$をproperで下半連続な凸関数，$C$を$H$の有界閉凸部分集合，$r > 0$とする．このとき，次の(1)と(2)は同値である．

(1)

$$f(x_0) = \min_{y \in H} f(y)$$

となるような$x_0 \in C$が存在する．

(2)

$$\inf_{y \in C} \|y - J_r x\| < \|x - J_r x\| \quad (x \in C, J_r x \notin C).$$

証明 ∂fのリゾルベントJ_rは非拡大写像であることが知られている[8, 9]．また，リゾルベントの定義から，$f(u) = \min_{y \in H} f(y)$であることは$u = J_r u$と同値であることが容易にわかる．よって定理4.2を用いると，(1)と(2)は同値である．■

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces:properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 15-50 (1996).

[2] N. Hirano and W. Takahashi, *Existence theorems on unbounded sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 361-365.

[3] K. Q. Lan and J. R. L. Webb, *A fixed point index for generalized inward mappings in condensing type*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2175-2186.

[4] D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mappings of monotone type*, Nartinus Nijhoff Publishers, The Hague; Sijthoff& Noordhoff International Publishers, 1978.

[5] R. Schöneberg, *Zeros of nonlinear monotone operators in Hilbert space*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), 213-219.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 168-181.

[7] W. Takahashi, *Recent results in fixed point theory*, Southeast Asian Bull. Math. **4** (1980), 59-85.

[8] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation Fixed Points* (Japanese), Yokohama-Publishers, 2000.

[9] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.

[10] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, II/B, Springer-Verlag, New York, 1990.