数理解析研究所講究録 1458 巻 2005 年 28-33

Ando-Hiai inequality and Furuta inequality

大阪教育大学　藤井正俊 (MASATOSHI FUJII)
OSAKA KYOIKU UNIVERSITY
前橋工科大学　亀井栄三郎 (EIZABURO KAMEI)
MAEBASHI INSTITUTE OF TECHNOLOGY
茨城大学・工学部　中本律男 (RITSUO NAKAMOTO)
IBARAKI UNIVERSITY

1. はじめに. これは [6],[7] で示した事柄をまとめた報告です. A, B は Hilbert space 上の positive operators とします. 便宜上 $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) で A は positive (resp. positive invertible) operator を表すものとしておきます. まずフルタ不等式の復習から始めましょう [8],[9].

Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,*

(F) $$A^{\frac{p+r}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

(F) $$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for p and q such that $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with

$$(1+r)q \geq p+r.$$

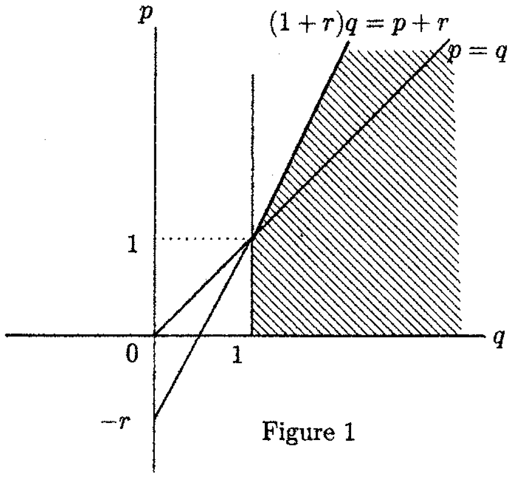

Figure 1

これは次のレウナー・ハインツ不等式の拡張を意図したもので, 歴史的発展と評されています. 上で与えられた図はこのことを明確に示すものです.

Löwner-Heinz inequality:

(LH) $$A \geq B \geq 0 \ \Rightarrow\ A^{\alpha} \geq B^{\alpha} \quad \text{for any} \quad \alpha \in [0,\ 1].$$

しかしながら私たちは (F) を久保・安藤 [17] によって導入された作用素平均の言葉で表してみます. ここで使うのは α-power mean (or generalized geometric operator mean) と呼ばれている作用素平均で次のように与えられます [2],[13].

$$A \,\sharp_{\alpha}\, B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

α-power mean を使うとフルタ不等式は次のように表すことが出来ます.

(F) $$A \geq B \geq 0 \ \Rightarrow\ A^{-r} \,\sharp_{\frac{1+r}{p+r}}\, B^p \leq A \ \text{ for } \ p \geq 1 \ \text{ and } \ r \geq 0.$$

作用素平均を用いた別証明を与える中で私たちは (F) を次のように整理することが出来これを satellite inequality と呼びました [13].

(SF) $$A \geq B \geq 0 \ \Rightarrow\ A^{-r} \,\sharp_{\frac{1+r}{p+r}}\, B^p \leq B \leq A \ \text{ for } \ p \geq 1 \ \text{ and } \ r \geq 0.$$

2. フルタ不等式の基本となる不等式. 今回私たちは [13] の証明を整理しより初等的な形にする中で, (F) 又は (SF) の本質は Theorem 2 に与える (C) であることがわかりました. まず次の lemma を与えておきましょう.

Lemma 1. *If* $A \geq B \geq 0$ *and* $p \geq 0$, *then*

$$A^{-n} \natural_{\frac{n}{p+n}} B^p \leq I$$

holds for $n = 1, 2, \ldots$ *and* $p \geq 0$.

Proof. We prove this by induction. Since $A^{-1} \natural_{\frac{1}{p+1}} B^p \leq B^{-1} \natural_{\frac{1}{p+1}} B^p = I$, we have the case $n = 1$. If this holds for n, that is, $A^{-n} \natural_{\frac{n}{p+n}} B^p \leq I$ or $(A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{p+n}} \leq A^n$, then it implies $(A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{p+n}} \leq A$ by (LH), then

$$\begin{aligned} & A^{-n-1} \natural_{\frac{n+1}{p+n+1}} B^p = A^{-\frac{n}{2}} (A^{-1} \natural_{\frac{n+1}{p+n+1}} A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}}) A^{-\frac{n}{2}} \\ \leq \ & A^{-\frac{n}{2}} ((A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{-\frac{1}{p+n}} \natural_{\frac{n+1}{p+n+1}} A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}}) A^{-\frac{n}{2}} = A^{-n} \natural_{\frac{n}{p+n}} B^p \leq I. \end{aligned}$$

これを用いることで (C) は次のように得られます.

Theorem 2. *If* $A \geq B \geq 0$, *then*

$$A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I \tag{C}$$

holds for all $r \geq 0$ *and* $p \geq 0$.

Proof. The case $0 \leq r \leq 1$, $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq B^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p = I$, is assured by (LH). If $r = n + \epsilon$ for positive integer n and $0 \leq \epsilon < 1$, then

$$(A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{\frac{\epsilon}{p+n}} \leq A^{\epsilon}$$

by Lemma 1 and (LH). Hence we have

$$\begin{aligned} & A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p = A^{-(n+\epsilon)} \natural_{\frac{n+\epsilon}{p+n+\epsilon}} B^p \\ = \ & A^{-\frac{n}{2}} (A^{-\epsilon} \natural_{\frac{n+\epsilon}{p+n+\epsilon}} A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}}) A^{-\frac{n}{2}} \\ \leq \ & A^{-\frac{n}{2}} ((A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{-\frac{\epsilon}{p+n}} \natural_{\frac{n+\epsilon}{p+n+\epsilon}} A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}}) A^{-\frac{n}{2}} \\ = \ & A^{-\frac{n}{2}} (A^{\frac{n}{2}} B^p A^{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{p+n}} A^{-\frac{n}{2}} = A^{-n} \natural_{\frac{n}{p+n}} B^p \leq I. \end{aligned}$$

Theorem 2 はフルタ不等式 (F) or (SF) の本質部分を示す結果とみなせます. 実際この定理から (F) or (SF) へは次の lemma から簡単に到達できます.

Lemma 3. *For* A, $B \geq 0$, *if* $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I$ *holds for* $r \geq 0$ *and* $p \geq 0$, *then* $A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B$ for $p \geq 1$.

Proof. We here use well-known formulas on $\natural_{\alpha}$;

$$A \natural_{\alpha} B = B \natural_{1-\alpha} A \quad \text{and} \quad A \natural_{\alpha\beta} B = A \natural_{\alpha} (A \natural_{\beta} B).$$

Thus we have

$$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p = B^p \natural_{\frac{p-1}{p+r}} A^{-r} = B^p \natural_{\frac{p-1}{p}} (B^p \natural_{\frac{p}{p+r}} A^{-r}) \leq B^p \natural_{\frac{p-1}{p}} I = B \leq A.$$

Corollary 4.(Furuta Inequality) *If $A \geq B \geq 0$, then*

$$\text{(F)} \qquad A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \leq A$$

holds for all $r \geq 0$ and $p \geq 1$.

3. カオティック順序. これまで私たちは Theorem 2 における (C) をカオティック順序 $A \gg B$ の特徴づけとして使ってきました [3],[15],[16]. カオティック順序の定義は次のように与えたものです.

$$A \gg B \iff \log A \geq \log B, \quad A,\ B > 0.$$

(C) がカオティック順序の特徴づけとなっていることの私たちの与えた証明は少し込み入っていましたが, 内山によって与えられた別証明は明解なものです [18]. 古田は内山の方法を $(*)$ のように解釈して同様の証明を与えています [11]. しかし彼らの証明はフルタ不等式 (F) を使っています. ここで私たちは (F) ではなく Theorem 2 (C) を使えばよいことを示します. ただし手法は内山と同じです. 基本となるのは次の関係です.

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (I + \frac{1}{n}\log X)^n = X \quad \text{for any} \quad X > 0.$$

$(*)$ と Theorem 2 を使うことで (C) がカオティック順序の特徴づけとなっていることの証明を次のように与えることができます.

Theorem 5. *For $A,\ B > 0$, $A \gg B$ if and only if $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I$ holds for all $r \geq 0$ and $p \geq 0$.*

Proof. Suppose $A \gg B$, then $A_1 = I + \frac{1}{n}\log A \geq I + \frac{1}{n}\log B = B_1 > 0$ holds for sufficiently large natural nummber n. Applying Theorem 2 to A_1 and B_1, we have

$$I \geq A_1^{-nr} \natural_{\frac{nr}{np+nr}} B_1^{np} = (I + \frac{1}{n}\log A)^{-nr} \natural_{\frac{r}{p+r}} (I + \frac{1}{n}\log B)^{np}.$$

Since

$$(I + \frac{1}{n}\log A)^{-nr} \longrightarrow A^{-r} \ \text{ and } \ (I + \frac{1}{n}\log B)^{np} \longrightarrow B^p \ \ (\text{as } \ \text{n} \longrightarrow \infty)$$

and $A,\ B$ are invertible, we have $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I$. The converse is easily seen because $(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \leq A^r$ implies $(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \ll A$ for all $r \geq 0$ and $p \geq 0$. $A \gg B$ is the case $r = 0$.

4. 安藤・日合の結果とフルタ不等式との関係. さてフルタ不等式と安藤・日合の定理との関係についてみていきましょう. 安藤・日合は [1]([12]) において log $-$*majorization* の議論を展開し, Goldenn-Thompson type の不等式を得ています. その中で主結果となる結果と同値である定理を次のように与えられています.

Ando-Hiai Theorem: Ando-Hiai had shown the following inequality:

(AH) *For $A,\ B > 0$, if $A \natural_\alpha B \leq I$, then $A^r \natural_\alpha B^r \leq 1$ holds for $r \geq 1$.*

この結果を用いることで安藤・日合は次の (AH_0) を示しました [1].

$$(\mathrm{AH}_0) \qquad A^{-1} \natural_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \le I \;\Rightarrow\; A^{-r} \natural_{\frac{1}{p}} (A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^r \le I \text{ for } p \ge 1 \text{ and } r \ge 1.$$

古田はこの不等式と (F) との関連を一つの不等式にまとめて示しました [10]. ここでは私たちの流儀にしたがって作用素平均を使って次のように表しておきます [14].

If $A \ge B \ge 0$ and A is invertible, then for each $1 \le p$ and $0 \le t \le 1$,

$$(\mathrm{GF}) \qquad A^{-r} \natural_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^s \le A^{1-t}$$

holds for $t \le r$ and $1 \le s$.

この不等式 (GF) の重要性は $t=1,\ r=s$ のとき $(\mathrm{GF}) = (\mathrm{AH}_0)$, $t=0,\ s=1$ のとき $(\mathrm{GF}) = (\mathrm{F})$ となることです. しかしここでは，このような一般化でなく直接 (AH) と (F) の関係についてみていきましょう.

Theorem 6. *Under the assumption* (AH), (F) *is obtained.*

Proof. If $A \ge B > 0$, then we have $A^{-1} \natural_{\frac{1}{q+1}} B^q \le B^{-1} \natural_{\frac{1}{q+1}} B^q \le I$. Put $q = \frac{p}{r}$, then $A^{-1} \natural_{\frac{1}{\frac{p}{r}+1}} B^{\frac{p}{r}} \le I$ for $r \ge 1$. By (AH), we can obtain $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \le I$. The final step is given by lemma 3.

さて逆の関係についても次が得られます.

Theorem 7. *Under the assumption* (F), (AH) *is obtained.*

Proof. If $A \natural_\alpha B \le I$ for $0 \le \alpha \le 1$, which is equivalent to $(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha \le A^{-1}$. Let $A_1 = A^{-1}$, $C = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ and $B_1 = C^\alpha$. Then $A_1 \ge B_1 > 0$ and by the Furuta inequality, we have $A_1^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B_1^p \le A_1$ for $r > 0,\ p \ge 1$. Let $r = \epsilon$ and $p = \frac{1+\epsilon(1-\alpha)}{\alpha}$, then $\frac{1+r}{p+r} = \alpha$ and

$$A_1^{-\epsilon} \natural_\alpha B_1^{\frac{1+\epsilon(1-\alpha)}{\alpha}} \le A_1,$$

that is,

$$A^\epsilon \natural_\alpha C^{1+\epsilon(1-\alpha)} \le A^{-1}.$$

$$\begin{aligned} & A^\epsilon \natural_\alpha C^{1+\epsilon(1-\alpha)} = A^\epsilon \natural_\alpha CC^{-1+\epsilon(1-\alpha)}C \\ = \; & A^\epsilon \natural_\alpha C(C^{-\alpha} \natural_{1-\epsilon} C^{-1})C \ge A^\epsilon \natural_\alpha C(A \natural_{1-\epsilon} C^{-1})C \\ = \; & A^\epsilon \natural_\alpha CA^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}C^{-1}A^{-\frac{1}{2}})^{1-\epsilon}A^{\frac{1}{2}}C = A^\epsilon \natural_\alpha A^{-\frac{1}{2}}B^{-1+\epsilon}A^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

So we have

$$A^{1+\epsilon} \natural_\alpha B^{1+\epsilon} \le A \natural_\alpha B \le I.$$

5. 安藤・日合の定理の一般化. 最後に安藤・日合の定理の一般化を与えておきます. 更なる応用があることの期待を込めて！

Theorem 8. *For $\alpha \in (0,\ 1)$ fixed,*

$$A \ \sharp_\alpha\ B \le I \quad \Longrightarrow \quad A^r \ \sharp_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)s+\alpha r}}\ B^s \le I \ \text{ for } \ r,\ s \ge 1.$$

Proof. If $A \ \sharp_\alpha\ B \le I$ for $0 \le \alpha \le 1$, which is equivalent to $(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha \le A^{-1}$. Let $C = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ and $0 \le \epsilon \le 1$.

$$\begin{aligned} A^{1+\epsilon} \ \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{(1-\alpha)+\alpha(1+\epsilon)}}\ B &= A^{\frac{1}{2}}(A^\epsilon \ \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}}\ A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\ &\le A^{\frac{1}{2}}(C^{-\alpha\epsilon} \ \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}}\ C)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}C^\alpha A^{\frac{1}{2}} = A \ \sharp_\alpha\ B \le I. \end{aligned}$$

So we have

$$A^r \ \sharp_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}}\ B \le A \ \sharp_\alpha\ B \le I \ \text{ for } \ r \ge 1. \tag{1}$$

On the other hand, $A \ \sharp_\alpha\ B = B \ \sharp_{(1-\alpha)}\ A \le I$ is equivalent to $(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^{1-\alpha} \le B^{-1}$. Let $D = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} A \ \sharp_{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\epsilon)+\alpha}}\ B^{1+\epsilon} &= A \ \sharp_{\frac{\alpha}{1+\epsilon(1-\alpha)}}\ B^{1+\epsilon} \\ &= B^{1+\epsilon} \ \sharp_{\frac{(1-\alpha)(1+\epsilon)}{1+\epsilon(1-\alpha)}}\ A \\ &= B^{\frac{1}{2}}(B^\epsilon \ \sharp_{\frac{(1-\alpha)(1+\epsilon)}{1+\epsilon(1-\alpha)}}\ B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}} \\ &\le B^{\frac{1}{2}}(D^{-(1-\alpha)\epsilon} \ \sharp_{\frac{(1-\alpha)(1+\epsilon)}{1+\epsilon(1-\alpha)}}\ D)B^{\frac{1}{2}} \\ &= B^{\frac{1}{2}}D^{(1-\alpha)}B^{\frac{1}{2}} = B \ \sharp_{1-\alpha}\ A = A \ \sharp_\alpha\ B \le I. \end{aligned}$$

So we have

$$A \ \sharp_{\frac{\alpha}{(1-\alpha)s+\alpha}}\ B^s \le A \ \sharp_\alpha\ B \le I \ \text{ for } \ s \ge 1. \tag{2}$$

Let $A_1 = A^r,\ \alpha_1 = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}$, then by (2)

$$A_1 \ \sharp_{\frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)s+\alpha_1}}\ B^s \le A_1 \ \sharp_{\alpha_1}\ B \le A \ \sharp_\alpha\ B \le I.$$

Since $\frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)s+\alpha_1} = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)s+\alpha r}$, we have the conclusion.

References

[1] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, Linear Alg. and Its Appl., 197(1994), 113-131.

[2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990), 67-72.

[3] M.Fujii and E.Kamei, Furuta's inequality for the chaotic order,I,II, Math. Japon., 36(1991), 603-606 and 712-722.

[4] M.Fujii and E.Kamei, On an extension of grand Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 56 (2002), 501-504.

[5] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Algebra Appl., 179(1993), 161-169.

[6] M.Fujii and E.Kamei, Ando-Hiai inequality and Furuta inequality, preprint.

[7] M.Fujii, E.Kamei and R.Nakamoto, An analysis on the internal structure of the celebrated Furuta inequality, Scienticae Mathematicae Japonicae Online, e-2005, 425-431.

[8] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.

[9] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989), 126.

[10] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and Its Appl., 219(1995), 139-155.

[11] T.Furuta, Results under $\log A \geq \log B$ can be derived from ones under $A \geq B \geq 0$ by Uchiyama's method - associated with Furuta and Kantorovich type operator inequalities, Math. Inequal. Appl., 3(2000), 423-436.

[12] F.Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, Linear Operators Banach Center Publications, vol.38, 1997.

[13] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

[14] E.Kamei, Parametrized grand Furuta inequality, Math. Japon., 50(1999), 79-83.

[15] E.Kamei, Chaotic order and Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 221-225.

[16] E.Kamei and M.Nakamura, Remark on chaotic Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 535-539.

[17] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

[18] M.Uchiyama, Some exponential operator inequalities, Math. Inequal. Appl.,2(1999), 469-471.

(*)Department of Mathematics,
Osaka Kyoiku University,
Asahigaoka, Kashiwara,
Osaka, 582-8582, Japan
e-mail: mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

(**)Maebashi Institute of Technology,
Kamisadori, Maebashi,
Gunma, 371-0816, Japan
e-mail: kamei@maebashi-it.ac.jp

(***)Faculty of Engineering,
Ibaraki University,
Nakanarusawa, Hitachi,
Ibaraki 316-8511, Japan
e-mail: nakamoto@base.ibaraki.ac.jp