

White noise distribution theory and its application

九州大学大学院数理学研究院 嶋田 芳仁 (Yoshihito Shimada)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 序

ホワイトノイズ解析学は、飛田武幸によって1975年に提唱された理論で、ホワイトノイズ空間上の汎関数や超汎関数のなす関数空間、そしてそれらの関数空間上の連続線形作用素についての理論である。ホワイトノイズ解析学は様々な応用を持つ。例えば尾畑伸明は [11] において無限次元回転群の作用で不変な作用素の形を特徴付けることに成功している。またのksendalらはホワイトノイズ解析学の枠組みを用いて金融工学の研究を行っている。さらに位相幾何学の Chern-Simons 理論に関連して、位相不変量である分配関数を構成する際、(数学的には問題のある) 経路積分を使って形式的に構成するが、ここで経路積分の代わりにホワイトノイズ解析学を用いることで分配関数を厳密に与えることに成功している。([5], [9])

この文章の前半ではホワイトノイズ解析学の簡単な紹介をする。後半ではホワイトノイズ解析学のゲージ群のエネルギー表現の既約性について述べる。

2 ホワイトノイズ解析学

2.1 Gelfand の三つ組み

ホワイトノイズ解析学においては、次で Gelfand の三つ組みと呼ばれる位相線型空間の3つの組が重要となる。この Gelfand の三つ組みは以下のように構成をする。

定義 2.1. H を複素 Hilbert 空間、 $|\cdot|_0$ を H の内積から決まるノルム、 A を H 上の自己共役作用素で以下の条件 (1)-(3) を満たすものとする。

- (1) A のスペクトル $\sigma(A)$ は多重度有限の固有値全体に一致する、
- (2) A の固有値を λ_n (ただし $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$) とすると、その最小固有値 λ_1 は真に1よりも大きく、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\lambda_n \rightarrow \infty$ である、

(3) $|\cdot|_{\text{H.S.}}$ を作用素の Hilbert-Schmidt ノルムとする. このとき A は適当な $\alpha > 0$ をとって次を満たす.

$$|A^{-\alpha}|_{\text{H.S.}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2\alpha} < \infty.$$

このとき Sobolev 空間 $(E_p, |\cdot|_p)$, $p \in \mathbf{R}$ を以下のように定義する.

$$|f|_p := |A^p f|_0,$$

$$E_p := \begin{cases} \text{Dom}(A^p), & (p \geq 0) \\ \text{closure of } H \text{ w.r.t. } |\cdot|_p. & (p < 0) \end{cases}$$

いま $p > 0$ に対して

$$E := \bigcap_{p>0} (E_p, |\cdot|_p), \quad E^* := \bigcup_{p>0} (E_{-p}, |\cdot|_{-p})$$

と定義をすると局所凸空間 E は H の位相に関して H の稠密な部分空間であり, さらに H は局所凸空間 E^* の位相に関して稠密な部分空間である:

$$E \subset H \subset E^*$$

ここで構成した (E, H, E^*) を Gelfand の三つ組みと呼ぶ. ここでは E をテスト関数空間, E^* を超関数空間と簡単に呼ぶことにする.

注意 2.2. 定義 2.1 の仮定 (3) は構成された局所凸空間が核型空間になっているようにするために要請される条件である. この核型性は後に示す Fock 展開で必要となる条件である.

例 2.3. 定義 2.1 において定義したテスト関数空間の例を見ておく. $H := L^2(S^1)$ とし, H 上の自己共役作用素 A を

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + 2$$

とする. (注. A の定義において, ラプラシアンに 2 を加えてあるのは A の最小固有値を 1 より真に大きくするためであり, 加える数は 1 よりも真に大きな実数であれば何でも良い.) このとき $p \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$|f|_p := |A^p f|_0, \quad f \in E_p,$$

$$|f|_{C^{2p}} := \sum_{r=0}^p \sup_{\theta \in S^1} |A^r f(\theta)|, \quad f \in C^{2p}(S^1)$$

とすると2種類のノルムの間には

$$\begin{aligned} |f|_{C^{2p}} &\leq \text{Const.} |f|_{p+1}, \\ |f|_p &\leq \text{Const.} |f|_{C^{2(p+1)}} \end{aligned}$$

の関係があることが確認できる. よって位相線型空間として

$$\varprojlim (E_p, |\cdot|_p) = \varprojlim (C^{2p}(S^1), |\cdot|_{C^{2p}}) = C^\infty(S^1)$$

が成り立つ.

次に Fock 空間を定義する.

定義 2.4.

(1) $H^{\widehat{\otimes} n}$ を n 階対称テンソル全体とする. つまり

$$x_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

(ここで \mathfrak{S}_n は n 次対称群全体) の線型結合全体を完備化したものとする.

(2) Boson Fock 空間 $\Gamma(H)$ を

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\widehat{\otimes} n}$$

を内積

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n, \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \right)_0 := \sum_{n=0}^{\infty} n! (\phi_n, \psi_n)_{H^{\otimes n}}$$

で完備化したものとする.

次に Boson Fock 空間とその上の自己共役作用素から構成される Gelfand の三つ組を導入する.

定義 2.5. H, A をそれぞれ複素 Hilbert 空間, 自己共役作用素とする. また $\Gamma(H)$ を Boson Fock 空間とし,

$$\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{\otimes n}$$

とする. ($\Gamma(A)$ を第2量子化作用素という.) このとき Sobolev ノルムを

$$\|\phi\|_p := \|\Gamma(A)^p \phi\|_0$$

で定め,

$$\mathcal{E}_p := \begin{cases} \text{Dom}(\Gamma(A)^p) & (p \geq 0) \\ \text{closure of } \Gamma(H) \text{ w.r.t. } |\cdot|_p & (p < 0) \end{cases}$$

として Sobolev 空間 $(\mathcal{E}_p, \|\cdot\|_p)$ を定義する. このとき

$$\mathcal{E} := \bigcap_{p>0} \mathcal{E}_p, \quad \mathcal{E}^* := \bigcup_{p>0} \mathcal{E}_{-p}$$

として Gelfand の三つ組み $(\mathcal{E}, \Gamma(H), \mathcal{E}^*)$ が得られる. \mathcal{E} をホワイトノイズ汎関数空間, \mathcal{E}^* をホワイトノイズ超汎関数空間と呼ぶ.

2.2 ホワイトノイズ(超)汎関数空間上の作用素

前小節においてホワイトノイズ解析学の舞台となる関数空間の定義をした. この小節では, それらの関数空間上の連続線型作用素について述べる. X, Y を位相線型空間とすると, $\mathcal{L}(X, Y)$ を X から Y への連続線型作用素全体とする.

まず初めに代表的な連続線型作用素である生成・消滅作用素について述べる.

定義 2.6.

(1) $f_i \in E, y \in E^*$ とする. このとき消滅作用素 $D_y \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ を次で定義する.

$$D_y f_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} f_n := \sum_{j=1}^n \langle y, f_j \rangle f_1 \hat{\otimes} \dots \check{f}_j \dots \hat{\otimes} f_n$$

(2) $f_i \in E, y \in E^*$ とする. このとき生成作用素を

$$D_y^* f_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} f_n := y \hat{\otimes} f_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} f_n$$

で定義する. このとき

- (i) $y \in E$ に対して $D_y^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$,
- (ii) $y \in E^*$ に対して $D_y \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$,

である.

命題 2.7 (正準交換関係). 生成・消滅作用素について次が次が成立する. $f \in E, y \in E^*$ に対して

$$[D_y, D_f^*] \phi = \langle y, f \rangle \phi, \quad \phi \in \mathcal{E}$$

この関係式を正準交換関係と呼ぶ.

積分核作用素を定義するために2つのテンソルのコントラクションを定義する.

定義 2.8. $e_i \in E, i \in \mathbf{N}$ を H の正規直交基底とし,

$$e(\mathbf{i}) := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}, \quad \mathbf{i} := (i_1, \dots, i_l) \in \mathbf{N}^l.$$

と書く.

(1) $F \in (E^{\otimes(l+m)})^*$ に対して,

$$|F|_{l,m;p,q}^2 := \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} |\langle F, e(\mathbf{i}) \otimes e(\mathbf{j}) \rangle|^2 |e(\mathbf{i})|_p^2 |e(\mathbf{j})|_q^2$$

ここで \mathbf{i}, \mathbf{j} はそれぞれ $\mathbf{N}^l, \mathbf{N}^m$ 全体を走るものとする.

(2) $F \in (E^{\otimes(l+m)})^*, g \in E^{\otimes(l+n)}$ に対して, F と g のコントラクション $F \otimes_l g \in (E^{m+n})^*$ を次式で定義する.

$$F \otimes_l g := \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{i}} \langle F, e(\mathbf{j}) \otimes e(\mathbf{i}) \rangle \langle g, e(\mathbf{k}) \otimes e(\mathbf{i}) \rangle \right) e(\mathbf{j}) \otimes e(\mathbf{k})$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ $\mathbf{N}^l, \mathbf{N}^m, \mathbf{N}^n$ 全体を走るものとする. (収束性は (1) で定義したノルムで定める.)

ホワイトノイズ (超) 汎関数空間上の連続線型作用素の2つめの例として積分核作用素を述べる.

定義 2.9 (積分核作用素). κ を $(E^{\otimes(l+m)})^*$ の元とする. 任意の $\phi := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{E}$, $f_n \in E^{\otimes n}$ に対して

$$\Xi_{l,m}(\kappa)\phi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} s_{l+n}(\kappa \otimes_m f_{m+n})$$

とする. ただし s_{l+n} は $l+n$ 階テンソルに対する対称化作用素である. このとき $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ であり, $\Xi_{l,m}(\kappa)$ を積分核 κ を持つ積分核作用素と呼ぶ.

注意 2.10. この積分核作用素は $H = L^2(T)$ の場合には次のような表示をもつことが分かる.

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{s_i, t_j \in T} \kappa(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) \partial_{s_1}^* \dots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \dots \partial_{t_m} ds_1 \dots ds_l dt_1 \dots dt_m$$

ただし $\delta_t \in E^*$ を $t \in T$ におけるデルタ関数とし, $\partial_t := D_{\delta_t}$, $\partial_t^* := D_{\delta_t}^*$ とした. このことから定義 2.9 で定義した $\Xi_{l,m}(\kappa)$ を積分核作用素と呼ぶことは自然である. また

この表示と命題 2.7 から、変数 s_1, \dots, s_l らの入れ替えに関して積分核作用素は不変であり、また同様に t_1, \dots, t_m らの入れ替えに関して不変であるが、 s_i と t_j の入れ替えに関しては不変ではないことが分かる。つまり核関数から積分核作用素への写像は多対 1 であり、少なくとも上記の変数の対称性の分だけ不定性がある。このことは定義 2.9 で定義された一般の積分核作用素に関する同様である。

ここまでホワイトノイズ (超) 汎関数空間上の連続線型作用素の 2 つの例を見てきたが、一般の連続線型作用素に関しては次の命題で述べるように本質的には積分核作用素で尽きていることがわかる。つまり

命題 2.11 (Fock 展開). 任意の $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ に対して

$$\Xi\phi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})\phi, \quad \phi \in \mathcal{E} \quad (2.1)$$

を満たす

$$\{\kappa_{l,m}\}_{l,m=0}^{\infty}, \quad \kappa_{l,m} \in (E^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$$

がただ一つ存在する。ただし $(E^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$ は $(E^{\otimes(l+m)})^*$ の前半 l 階と後半 m 階を別々に対称化して得られるテンソルであり (注意 2.10 参照), また (2.1) の右辺の級数は \mathcal{E}^* の位相で収束する。

標語的に言えばホワイトノイズ (超) 汎関数上の連続線型作用素は、積分核 $\kappa_{l,m}$ を係数とした生成・消滅作用素による Taylor 展開で表される、ということになる。(実際、Fock 展開の証明において複素 2 変数関数の Taylor 展開を用いている。)

ここまでホワイトノイズ解析学について、以降の議論で必要な部分だけを掻い摘んで見てきた。ホワイトノイズ解析学のより詳しい議論は文献 [8], または [10] を参照いただきたい。

次節ではホワイトノイズ解析学の応用、より具体的には Fock 展開の表現論への応用について述べる。

3 ホワイトノイズ解析学の応用

3.1 ゲージ群とエネルギー表現

定義 3.1. M をコンパクト Riemann 多様体, G を半単純コンパクト Lie 群とする。このとき $C^\infty(M, G)$ をゲージ群と呼ぶ。

写像のターゲットとなっている Lie 群 G をゲージ群と呼ぶ文献もあるが、ここでは写像全体の作る群の方をゲージ群と呼ぶことにする。

この小節で定義をするエネルギー表現は, Boson Fock 空間上に定義されるゲージ群の表現である. 物理の言葉を援用すれば多粒子系を記述する枠組みで定義される表現である. エネルギー表現を構成するために, ゲージ群の1粒子系での表現を定義する.

定義 3.2. M を Riemann 多様体とし, $\Omega^1(M)$ を M 上の1形式全体とする. また G を半単純コンパクト Lie 群とし, \mathfrak{g} を G の Lie 環とする.

$T_x^*(M) \otimes \mathfrak{g}$ に内積を

$$(\omega_x \otimes X, \omega'_x \otimes X')_x := (\omega_x, \omega'_x)_x(X, X')_{\mathfrak{g}} \quad \omega_x, \omega'_x \in T_x^*(M), X, X' \in \mathfrak{g},$$

で定め, さらに $\Omega^1(M, \mathfrak{g}) := \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ 上に内積を

$$(f, g)_0 := \int_M (f(x), g(x))_x dv, \quad f, g \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}),$$

で定める. ここで dv は M の体積要素を表す. この内積に関する $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ の完備化を $H(M, \mathfrak{g})$ とする.

(1) $V(\psi) \in \mathcal{L}(H(M, \mathfrak{g}))$ を

$$(V(\psi)f)(x) := [\text{id}_{T_x^*M} \otimes \text{Ad}(\psi(x))]f(x), \quad \psi \in C^\infty(M, G), f \in H(M, \mathfrak{g})$$

で定義する.

(2) $\beta(\psi) \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ を

$$(\beta(\psi))(x) := (d\psi)_x \psi(x)^{-1}$$

で定義する. これを Maurer-Cartan コサイクルと呼ぶ.

$V(\psi)$ は Lie 群 G の随伴表現から自然に定まる, ゲージ群の1粒子系でのユニタリ表現である.

注意 3.3. ここで多粒子系の表現として $V(\psi)$ の第2量子化作用素

$$\Gamma(V(\psi)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(\psi)^{\otimes n}$$

を考えるというのが最もポピュラーであるが, 第2量子化から得られるゲージ群の表現は, 表現としては全く面白くない. というのも第2量子化によって与えられる表現 $\Gamma(V(\cdot))$ は, 各 $x \in M$ で分解をして G の表現を考えることに帰着できてしまうために, 写像全体の成す群の表現として考える意味が全く無いからである.

定義 3.4 (エネルギー表現). $\psi \in C^\infty(M, G)$ に対して,

$$U(\psi) = T_{\beta(\psi)} \Gamma(V(\psi))$$

ただし

$$T_{\beta(\psi)} \exp(f) := \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta(\psi)|_0^2\right) \exp(-(\beta(\psi), f)_0) \exp(f + \beta(\psi))$$

ここで $f \in H$ に対して

$$\exp(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{\otimes n}$$

とし, これをエクスポネンシャルベクトル, またはコヒーレントベクトルと呼ぶ.

ところで注意 3.3 において述べた意味で, エネルギー表現は非自明性な表現であるかという問いに答えねばならないが, 結論から言えば非自明な表現である. この非自明性は表現の既約性という形で次の小節において示される.

3.2 エネルギー表現の既約性

この小節ではエネルギー表現の既約性を見ていくことにする. その前にエネルギー表現の既約性に関する研究の歴史を時系列順に振り返っておく.

まず初めにエネルギー表現の形を始めて提示して, その既約性を議論をしたのは R. Ismagilov [6] である. この論文より以前に Veršik, I.M. Gelfand, and M.I. Graev の 3 人によって [14] が書かれているが, この文献で扱われているのはゲージ群 $SL(2, R)$ (ただし R は関数環である) の表現であり, また Boson Fock 空間上の表現の作り方も, 1 粒子系におけるユニタリ表現の第 2 量子化とコサイクルによる平行移動から構成するという点では一致をしているが, コサイクルの構成がエネルギー表現とは若干異なる. その意味で大きな流れとしては論文 [14] の延長線上に [6] はあるのだが, ここではエネルギー表現そのものを扱うので R. Ismagilov の論文 [6] を初めとしておく.

次に 1977 年に I. Gelfand, M. Graev, A. Veršik らが [3] において $\dim M \geq 2$, G が単純コンパクトの場合にエネルギー表現の既約性について議論をしたが, この論文には証明中にギャップが存在していた. そのギャップを修正した論文 [4] が 1981 年に出版をされたが, 得られた結果は論文 [3] のものよりも若干弱くなってしまい, $\dim M \geq 4$ の場合での既約性が証明された.

同年, S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, D. Testard らは [1] において, それまでで最も良い成果を得た. そしてこの論文が, 論文 [13] の出る 2005 年までの既約性に関する最良の結論であった. 具体的には $\dim M \geq 3$ のとき既約, $\dim M = 2$ のときは Lie 環のルートが十分に大きいときに既約, $\dim M = 1$ のとき可約になっているというものであった.

ここで著者自身の得た既約性に関する結論との関係で指摘をしておかなければならないことがある。それは [1] において $\dim M = 1$ のときが可約となっている点である。著者は論文 [13] において M の次元に依らずにエネルギー表現は既約表現であることを証明した。この結論は一見すると論文 [1] の結論と矛盾する結論に見えるが、以下の理由で矛盾するものではない。論文 [1] には書かれていないが、Albeverio らが [1] で得た可約性の結果はゲージ群 $C^\infty(S^1, G)$ の部分群

$$C_e(S^1, G) := \{\phi \in C(S^1, G) \mid \phi(0) = \phi(2\pi) = e\}$$

のエネルギー表現に関する結果であって $C^\infty(S^1, G)$ に関する結果ではないということである。(ここで本質的なのは扱う写像の微分の階数ではなく、写像が固定点を持っていることである。)

[1] と [13] との整合性について著者のもとに問い合わせがあったことなどから、表現を考えている対象が $C^\infty(S^1, G)$ ではなく $C_e^\infty(S^1, G)$ となっている点についてあまり認識が共有されていないようなので、ここで少し説明しておく。

[1] ではエネルギー表現 U の既約性を議論する際に、固定点をもつ連続なパス空間上にエネルギー表現の (真空ベクトルと表現 U から生成される Boson Fock 空間の閉部分空間への) 制限と同値な表現 U^R

$$(U^R(\phi)f)(\eta) := \left(\frac{d\mu(\eta\phi)}{d\mu(\eta)} \right)^{\frac{1}{2}} f(\eta\phi),$$

$$\phi \in C^\infty(S^1, G), \quad f \in L^2(\{\eta \in C(S^1, G) \mid \eta(0) = \eta(2\pi) = e\}; \mu),$$

(ここで μ は上記パス空間における Gauss 測度) を構成して、 U^R の可約性を議論しているのだが、 U^R の定義から明らかのように U^R が well-defined であるためには $\eta\phi$ が G の単位元 e を固定点として持つ必要があり、そのために ϕ も固定点を持たねばならないという制約が付く事になる。(以上の議論は松井卓によるものである。)

結論としては、 $C^\infty(S^1, G)$ と比べると群自体が小さくなっているので $C_e^\infty(S^1, G)$ のエネルギー表現は可約となる可能性が出てくる。実際、[1] で可約になっていることが確認されているということである。

次が主定理である。

定理 3.5. M を境界なしのコンパクト Riemann 多様体とする。このときゲージ群 $C^\infty(M, G)$ のエネルギー表現は (多様体の次元に依らずに) 既約表現である。

ここで上記の定理において多様体の次元に依存しないことの意味を説明しておく。多様体の次元に依存しないという場合、次の二通りが考えられる。まず一つ目は個別の次元における解析を行って全ての次元での既約性が成り立つという場合、二つ目は証明方法も含めて多様体の次元という要素が全く入らないという場合である。ここでは後者の意味で言っている。ゲージ群のエネルギー表現の既約性に関する過去

の全ての研究は, Riemann 多様体の次元に依存しながら行われていることを考慮して, この点について説明をしておく. Gelfand や Albeverio, Ismagilov らの研究と著者が行った研究の違いは, 既約性の証明に用いた手法の違いによる. 先行研究の全てにおいて証明の鍵になっているのは, 任意の実数 $t \neq 0$ と x に対して

$$X \cap (X + t\delta_x) = \emptyset,$$

を満たす超関数空間上の Gauss 測度 μ の台 X を求めることにあるが, この X を求める際に Riemann 多様体の次元が関係してくる. (詳しくは文献 [1], [4], [6] ならびに [7] の 8.3 節を参照されたい.) しかし著者の研究では, これら過去の研究とは全く異なる方法を採用しているために証明中に全く次元という要素が入ってくることはない. より詳しくは次の小節の最後で言及をする.

3.3 既約性の証明 (I)

ここでは証明のアイデアについて述べる. 既約性を証明するためには次の Schur の補題を適用すればよい, つまり「 $\exists \in \mathcal{L}(\Gamma(H(M, \mathfrak{g})))$ 」が

$$U(\exp(\Psi))\exists = \exists U(\exp(\Psi)), \quad \Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g}) \quad (3.1)$$

を満たすならば, \exists は自明な作用素以外にない」ことを示せばよい.

一般に, このような \exists を求めることは難しい. しかし我々は任意の連続線型作用素に対する Fock 展開を既に見てきた. \exists と $U(\exp(\Psi))$ を Fock 展開してその展開式を直接, 関係式に代入して計算をすればよいのではないかと思われる. しかしここで 2 つの問題が生じる. まず一つ目はゲージ群のエネルギー表現がホワイトノイズ解析学の枠組みで解析できる対象であるか, ということ. もう一つは群の表現 $U(\exp(\Psi))$ を Fock 展開をしてそのまま計算をすると非常に複雑になってしまい, とても手に負えなくなってしまうこと. この 2 つの点について述べることにする.

まずはじめにゲージ群の既約性に関する問題をホワイトノイズ解析の枠組みに乗るかどうかを議論する.

はじめに Gelfand の三つ組みを与える. $H = H(M, \mathfrak{g})$ とし H 上の自己共役作用素として $\nabla^* \nabla \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}} + 2$ とする. ただし ∇ は M 上の Levi-Civita 接続, $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ はベクトル空間 \mathfrak{g} 上の恒等作用素とする. ($\nabla^* \nabla$ は Bochner Laplacian と呼ばれている.) これらを用いて定義 2.1 に従って Gelfand の三つ組み (E, H, E^*) を得る. さらに定義 2.5 に従って Gelfand の三つ組み $(\mathcal{E}, \Gamma(H), \mathcal{E}^*)$ を得る.

いま $\Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ に対して $U(\exp(\Psi))$ の \mathcal{E} への制限は $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ の元である. また $\exists \in \mathcal{L}(\Gamma(H(M, \mathfrak{g})))$ の \mathcal{E} への制限を考え, それを同じく \exists とすると $\exists \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ であることが容易に分かる. ここで $U(\exp(-\Psi))^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$ が

$$U(\exp(-\Psi))^*|_{\mathcal{E}} = U(\exp(\Psi)),$$

つまり $U(\exp(-\Psi))^*$ が $U(\exp(\Psi))$ の \mathcal{E}^* への自然な拡張になっている事に注意すると (3.1) ならば

$$U(\exp(-\Psi))^*\Xi\phi = \Xi U(\exp(\Psi))\phi, \quad \Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g}), \quad \phi \in \mathcal{E} \quad (3.2)$$

が成り立つ. (3.2) はホワイトノイズ解析学の枠組みで記述された関係式になっている.

次に (3.2) 中の $U(\exp(\Psi))$ に対して直接, Fock 展開を適用して交換関係を計算しようとする, 極めて煩雑な計算をしなければならなくなるという問題であるが, 1 パラメータ部分群 $\{U(\exp(\Psi)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ を $t=0$ で微分して得られる Lie 環の表現を扱うほうが容易である. そのためにホワイトノイズ解析の枠組みでの作用素の微分を次に与える.

定義 3.6 (微分可能性). $(\mathfrak{X}, \{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda})$ を核型 Frechet 空間, $\{\psi_t\}_{t \in \mathbf{R}} \subset GL(\mathfrak{X})$ を 1 パラメータ部分群とする. ここで $\{\psi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ が微分可能であるとは,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t \xi - \xi}{t}, \quad \xi \in \mathfrak{X}.$$

が \mathfrak{X} の位相での収束するときをいう.

$$X\xi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t \xi - \xi}{t}, \quad \xi \in \mathfrak{X}.$$

として X を無限小生成作用素と呼ぶ.

命題 3.7. X は連続作用素となり次を満たす. 任意の $\alpha \in \Lambda$ と有界集合 $K \subset \mathfrak{X}$ に対して

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{\xi \in K} \left| \frac{\psi_t \xi - \xi}{t} - X\xi \right|_\alpha = 0$$

この意味での $U(\exp(\Psi))$ の微分可能性を直接見るのは少々難しい. 形式的議論であるが, 大まかに言うと以下のような理由である. 仮に 1 パラメータ部分群 ψ_t が無限小生成作用素 X を用いて

$$\psi_t \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} \xi, \quad \xi \in \mathfrak{X}$$

と表されているとする. このとき任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して

$$\left| \frac{\psi_t \xi - \xi}{t} - X\xi \right|_\alpha \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} |X^n \xi|_\alpha$$

を評価していくことになる. しかし右辺の $|X^n \xi|_\alpha$ の評価が問題となる. というのも

$$|X^n \xi|_\alpha \leq \text{Const.} |X^{n-1} \xi|_\beta \leq \dots$$

と X^n の次数 n を下げながら評価をしていくが, 評価をするノルムは $|\cdot|_\alpha$ から $|\cdot|_\beta$ へと変わってってしまう. つまり次数 n が大きくなればなるほど評価をするノルムが際限なく変化していくことを表している. そこで上記の微分可能性よりも少々強い意味での微分可能性を導入しておく.

定義 3.8 (正則性). $(\mathfrak{X}, |\cdot|_\alpha)$ を核型 Frechet 空間, $\{\psi_t\} \subset GL(\mathfrak{X})$ を 1 パラメータ部分群, X を $\{\psi_t\}$ の無限小生成変換とする. このとき $\{\psi_t\}$ が正則であるとは, 任意の α に対し β で次の式を満たすものが存在する:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{|\xi|_\beta \leq 1} \left| \frac{\psi_t \xi - \xi}{t} - X\xi \right|_\alpha = 0$$

1 パラメータ部分群が正則ならば, 微分可能であることは定義から容易に分かる.

ここで $\psi_t := \exp(t\Psi)$, $\Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ とする. $T_{\beta(\psi_t)}$ が正則な 1 パラメータ部分群であることはよく知られている. (例えば尾畑 [10] の 5.7 節を参照.) そしてその無限小生成作用素は

$$D_{d\Psi}^* - D_{d\Psi}$$

である. 後に積分核作用素を用いた計算を行うので, これを積分核作用素で書き直す

$$\Xi_{1,0}(d\Psi) - \Xi_{0,1}(d\Psi)$$

となる.

また $\Gamma(V(\psi_t))$ の正則性は, もし $V(\psi_t)$ が正則であれば $\Gamma(V(\psi_t))$ も正則となる. (尾畑 [10] の命題 5.4.5 参照.) 従って問題は $V(\psi_t)$ の正則性であるが, Bochner Laplacian と Levi-Civita 接続を交換する式を計算しなければならない. (曲率が 0 でない Riemann 多様体ではこれらの微分作用素は可換ではない.) 従って $V(\psi_t)$ の正則性はそれほど自明な主張ではないが成立をする. (Salomonsen [12] の命題 2.5 を参照.) ここで

$$(V(\Psi)f)(x) := [\text{id}_{T_x^*M} \otimes \text{ad}(\Psi(x))]f(x), \quad \Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g}), f \in H(M, \mathfrak{g})$$

とすると, $\Gamma(V(\psi_t))$ の無限小生成作用素は

$$d\Gamma(V(\Psi)) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \text{id}_{j-1} \otimes V(\Psi) \otimes \text{id}_{n-j}$$

である. ($d\Gamma(V(\Psi))$ は $V(\Psi)$ の第 2 量子化作用素と呼ばれる.) これも積分核作用素を用いて書き直すと

$$\Xi_{1,1}((\text{id} \otimes V(\Psi))^* \tau) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, E),$$

ここで $\tau \in E \otimes E^*$ を次式で定義する.

$$\tau(x, y) = \langle x, y \rangle, \quad x \in E^*, y \in E.$$

よって $U(\psi_t) = T_{\beta(\psi_t)}\Gamma(V(\psi_t))$ は正則な 1 パラメータ部分群であり, その無限小生成作用素は

$$\pi(\Psi) := \Xi_{1,1}((\text{id} \otimes V(\Psi))^*\tau) + \Xi_{1,0}(d\Psi) - \Xi_{0,1}(d\Psi)$$

である. $\pi(\Psi) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ である.

以上の議論を踏まえると, (3.2) が成り立つならば

$$\tilde{\pi}(\Psi)\Xi\phi = \Xi\pi(\Psi)\phi, \quad \Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g}), \phi \in \mathcal{E} \quad (3.3)$$

が成り立つことがわかる. ここで

$$\tilde{\pi}(\Psi) := -\pi(\Psi)^*$$

とした. $\tilde{\pi}(\Psi)|_{\mathcal{E}} = \pi(\Psi)$ より $\tilde{\pi}(\Psi)$ は $\pi(\Psi)$ の \mathcal{E}^* 上への自然な拡張である.

まとめると (3.1) を仮定すると (3.2) が成り立ち, さらに (3.3) が成り立つ. 従って (3.3) を満たす $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ が自明なものしかなければ, (3.1) を満たす $\Xi \in \mathcal{L}(\Gamma(H(M, \mathfrak{g})))$ が自明なものしかないことになり既約性が証明される.

この小節の最後に, 前小節で述べたエネルギー表現の既約性が多様体の次元に依存しないという点について述べる. いままで見てきた中で多様体の次元が入り込む箇所が一箇所だけある. それは Gelfand の三つ組みを構成する際に Bochner Laplacian $\nabla^*\nabla$ を用いたところである. よく知られているように Laplacian の固有値は Riemann 多様体の次元に依存をする. しかし定義 2.1 の条件 (3) から直ちに分かる通り, 固有値の次元依存性は $\alpha > 0$ の自由度の高さに吸収をされてしまい, Gelfand の三つ組みの構成には何ら影響しない. 従って多様体の次元には全く依存せずにホワイトノイズ解析の枠組みに乗せることができる. そして次の小節で見る様にホワイトノイズ解析の枠組みに乗せて以降, Riemann 多様体の次元の関与する余地は全くなくなってしまふ. これが定理 3.5 において, その証明方法を含め, 多様体の次元に依存をしないメカニズムである.

3.4 既約性の証明 (II)

この小節では既約性の証明, つまり Schur の補題 (3.3) がどの様に計算されていくか, その概要を見る. ここで具体的な計算の一部を示すのは, Fock 展開の使い方 (一つの例) を示すことが本文章の目的でもあるからである. $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ の Fock 展開 (2.1) を考える. これを (3.3) に代入をして具体的に $\kappa_{l,m}$ を決定をしていく. いま 2 つの積分核作用素の積に関して次が成り立つ.

命題 3.9. $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ と $\Xi_{l',m'}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ に対して次が成り立つ:

$$\Xi_{l,m}(\kappa)\Xi_{l',m'}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\min\{m,l'\}} k! \binom{m}{k} \binom{l'}{k} \Xi_{l+l'-k, m+m'-k}(S_{m-k, m'}^{l, l'-k}(\kappa \circ_k \lambda)), \quad (3.4)$$

ただし $S_{m-k}^l {}_{m'}^{l'-k}(\kappa \circ_k \lambda) \in (E^{\otimes(l+l'+m+m'-2k)})^*$ は次式で定義する : $\kappa \in (E^{\otimes(l+m)})^*$, $\lambda \in E^{\otimes l'} \otimes (E^{\otimes m'})^*$ に対して

$$S_{m-k}^l {}_{m'}^{l'-k}(\kappa \circ_k \lambda) := \sum_{i,j,i',j'} \sum_{\mathbf{h}} \langle \kappa, e(\mathbf{i}) \otimes e(\mathbf{j}) \otimes e(\mathbf{h}) \rangle \\ \times \langle \lambda, e(\mathbf{h}) \otimes e(\mathbf{i}') \otimes e(\mathbf{j}') \rangle e(\mathbf{i}) \otimes e(\mathbf{i}') \otimes e(\mathbf{j}) \otimes e(\mathbf{j}'),$$

ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{h}$ はそれぞれ $\mathbf{N}^l, \mathbf{N}^{m-k}, \mathbf{N}^{l'-k}, \mathbf{N}^{m'}, \mathbf{N}^k$ 全体を走るものとする。

ここで記号の複雑さを避けるために、便宜的に

$$\lambda_{1,0} := \lambda_{0,1} = d\Psi, \quad \lambda_{1,1} := (\text{id} \otimes V(\Psi)^* \tau)$$

としよう。(2.1) と (3.4) と用いると,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \right) \pi(\Psi) \\ &= \Xi_{0,0}(\kappa_{0,1} \circ_1 \lambda_{1,0}) \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \Xi_{l,0} \left(S_0^{l-1} {}_0^1(\kappa_{l-1,0} \circ \lambda_{1,0}) + S_0^l {}_0^0(\kappa_{l,1} \circ_1 \lambda_{1,0}) \right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \Xi_{0,m} \left(m S_{m-1}^0 {}_1^0(\kappa_{0,m} \circ_1 \lambda_{1,1}) \right. \\ &\quad \left. + (m+1) S_m^0 {}_0^0(\kappa_{0,m+1} \circ_1 \lambda_{1,0}) - S_{m-1}^0 {}_1^0(\kappa_{0,m-1} \circ \lambda_{0,1}) \right) \\ &+ \sum_{l,m=1}^{\infty} \Xi_{l,m} \left(S_{m-1}^{l-1} {}_1^1(\kappa_{l-1,m-1} \circ \lambda_{1,1}) + m S_{m-1}^l {}_1^0(\kappa_{l,m} \circ_1 \lambda_{1,1}) \right. \\ &\quad \left. + S_m^{l-1} {}_0^1(\kappa_{l-1,m} \circ \lambda_{1,0}) + (m+1) S_m^l {}_0^0(\kappa_{l,m+1} \circ_1 \lambda_{1,0}) \right. \\ &\quad \left. - S_{m-1}^l {}_1^0(\kappa_{l,m-1} \circ \lambda_{0,1}) \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

であり, 一方

$$\begin{aligned}
& \tilde{\pi}(\Psi) \left(\sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \right) \\
&= -\Xi_{0,0}(\lambda_{0,1} \circ_1 \kappa_{1,0}) \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \Xi_{l,0} \left(l S_0^{1-l}(\lambda_{1,1} \circ_1 \kappa_{l,0}) + S_0^{1-l}(\lambda_{1,0} \circ \kappa_{l-1,0}) \right. \\
&\quad \left. - (l+1) S_0^l(\lambda_{0,1} \circ_1 \kappa_{l+1,0}) \right) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \Xi_{0,m} \left(-S_1^{0,m}(\lambda_{0,1} \circ \kappa_{0,m-1}) - S_0^{0,m}(\lambda_{0,1} \circ_1 \kappa_{1,m}) \right) \\
&+ \sum_{l,m=1}^{\infty} \Xi_{l,m} \left(S_1^{1-l}(\lambda_{1,1} \circ \kappa_{l-1,m-1}) + l S_0^{1-l}(\lambda_{1,1} \circ_1 \kappa_{l,m}) \right. \\
&\quad \left. + S_0^{1-l}(\lambda_{1,0} \circ \kappa_{l-1,m}) - S_1^{0,l}(\lambda_{0,1} \circ \kappa_{l,m-1}) \right. \\
&\quad \left. - (l+1) S_0^l(\lambda_{0,1} \circ_1 \kappa_{l+1,m}) \right). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

と計算できる. ここで Fock 展開の積分核の一意性より (3.3) ならば, (3.5) と (3.6) の同じ次数の積分核は (対称化の分を除いて) 等しい.

具体的に $\kappa_{l,m}$ を決定していく. まず次が成立する.

補題 3.10.

$$\kappa_{l,1}, \kappa_{1,m} = 0 \quad (l, m \geq 0), \tag{3.7}$$

$$\kappa_{l,0}, \kappa_{0,m} = 0 \quad (l, m \geq 1) \tag{3.8}$$

Proof. $\Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ として定値写像 $\Psi(x) = \text{Constant}$. を考える. このとき上記の積分核の比較の式から

$$d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(l)} \kappa_{l,0} = 0, \tag{3.9}$$

$$d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(m)} \kappa_{0,m} = 0, \tag{3.10}$$

$$\{(d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(l)} \otimes \text{id}_m + \text{id}_l \otimes d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(m)})\} \kappa_{l,m} = 0. \tag{3.11}$$

が成り立つ. これから直接計算によって (3.7) が分かる.

また $\Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ が定値写像でなければ

$$d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(l)} \kappa_{l,0} = s_{l,0} \left((l+1) S_0^{0,l}(d\Psi \circ_1 \kappa_{l+1,0}) + S_0^{l,0}(\kappa_{l,1} \circ d\Psi) \right) \tag{3.12}$$

が成り立つ. (Ψ が定値写像のとき $d\Psi = 0$ であるから, (3.12) に $d\Psi = 0$ を代入して (3.9) が得られる.)

帰納法で $\kappa_{l,0} = 0$ を示す. $l = 1$ は (3.7) で既に示している. 次に l を仮定して $l+1$ のときを示す. (3.7) より $\kappa_{l,1} = 0$ であり, 帰納法の仮定から $\kappa_{l,0} = 0$ であるから, これを (3.12) に代入をして

$$s_{l,0} \left((l+1) S_{0,0}^{0,l} (d\Psi \circ_1 \kappa_{l+1,0}) \right) = 0$$

この式から任意の $\Psi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ に対して

$$\langle \kappa_{l+1,0}, d\Psi \otimes e_l \rangle = 0 \quad (3.13)$$

が成り立つことが分かる. ただし $e_l \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})^{\hat{\otimes} l}$ は $H(M, \mathfrak{g})^{\hat{\otimes} l}$ の正規直交基底とする. 以下で (3.13) ならば $\kappa_{l+1,0} = 0$ を示す. まず

$$\{d\Psi, V(\Psi)\Psi' | \Psi, \Psi' \in C^\infty(M, \mathfrak{g})\}$$

は $H(M, \mathfrak{g})$ を生成する ([1] の補題 3.5) ことに注意をする.

いま $\Psi, \Psi' \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ とする. $s, t \in \mathbb{R}$ において $|s|, |t|$ が十分小さいとき

$$\exp(t\Psi) \exp(s\Psi') = \exp(\Phi_{s,t})$$

を満たす $\Phi_{s,t} \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ が唯一つ存在する.

$$\begin{aligned} d\Phi_{s,t} &= \beta(\exp(\Phi_{s,t})) = \beta(\exp(t\Psi) \exp(s\Psi')) \\ &= V(\exp(t\Psi))\beta(\exp(s\Psi')) + \beta(\exp(t\Psi)) \\ &= sV(\exp(t\Psi))d\Psi' + td\Psi \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \kappa_{l+1,0}, d\Phi_{s,t} \otimes e_l \rangle \\ &= s \langle \kappa_{l+1,0}, V(\exp(t\Psi))d\Psi' \otimes e_l \rangle + t \langle \kappa_{l+1,0}, d\Psi \otimes e_l \rangle \\ &= s \langle \kappa_{l+1,0}, V(\exp(t\Psi))d\Psi' \otimes e_l \rangle. \end{aligned}$$

$s \neq 0$ として

$$\langle \kappa_{l+1,0}, V(\exp(t\Psi))d\Psi' \otimes e_l \rangle = 0.$$

よって [1] の補題 3.5 と (3.13), そして (3.4) により $\kappa_{l+1,0} = 0$ が成り立つ. また $\kappa_{0,m+1} = 0$ についても同様に証明できる. ■

補題 3.11. $(0,0)$ を除く全ての $(l,m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ に対して $\kappa_{l,m} = 0$.

Proof. $l \geq 1$ に関する帰納法で示す. $l = 1$ の場合は (3.7) である. $\kappa_{l,m} = 0$ ($\forall m \geq 0$) を仮定して $\kappa_{l+1,m} = 0$ ($\forall m \geq 0$) を示す. Fock 展開の係数比較より

$$\begin{aligned} & \left(d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(l)} \otimes \text{id}_m + \text{id}_l \otimes d\Gamma(V(\Psi)^*)^{(m)} \right) \kappa_{l,m} \\ &= s_{l,m} \left((l+1) S_{0,m}^{0,l} (d\Psi \circ_1 \kappa_{l+1,m}) + (m+1) S_{m,0}^l (\kappa_{l,m+1} \circ_1 d\Psi) \right) \end{aligned}$$

つまり

$$\langle \kappa_{l+1,m}, d\Psi \widehat{\otimes} e_l \otimes e_m \rangle = 0$$

が成り立つことが分かる。ここで $e_k \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})^{\widehat{\otimes} k}$ は $H(M, \mathfrak{g})^{\widehat{\otimes} k}$ の正規直交基底である。以上から $\kappa_{l+1,m} = 0$ 。 m は任意より証了。 ■

4 注意と今後の課題

最後に今までに述べていなかった注意点や今後の課題について触れることにする。

(1) ゲージ群のエネルギー表現をホワイトノイズ解析で扱い、表現の既約性を得るにあたって Riemann 多様体 M のコンパクト性は本質的な役割を果たしている。Gelfand の三つ組みを構成する際に Hilbert 空間上の自己共役作用素をひとつ取らなければならない。このとき M がコンパクトであるために自己共役作用素として (よく知られていて素性のよい) Bochner Laplacian を取る事ができる。もし M が非コンパクトの場合、例えば $M = \mathbf{R}$ であれば Laplacian に調和振動子のポテンシャルを加えたものを Gelfand の三つ組みを構成するための自己共役作用素とすることができるが、それ以外の非コンパクトな多様体に対しては、Gelfand の三つ組みを構成するためにどのような自己共役作用素を持ってくれば良いのかは分かっていない。

(2) 既約性の証明の過程でも多様体のコンパクト性は有効に機能している。 $\kappa_{l,1} = 0$, $\kappa_{1,m} = 0$ の証明において $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ に定値写像が含まれていることを用いている。(補題 (3.10) の証明を見よ。) しかし M が非コンパクトであると、扱うゲージ群は $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ ではなく、コンパクト台を持つ $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ の元全体 $C_c^\infty(M, \mathfrak{g})$, ないしはそれを適当に完備化したものを考える事になる。 $C_c^\infty(M, \mathfrak{g})$ は言うまでも無く定値写像を含まない。従って $\kappa_{l,1} = 0$, $\kappa_{1,m} = 0$ の証明は M が非コンパクトの場合は使えない。本文章において紹介をした既約性の証明は、 $\kappa_{l,1} = 0$, $\kappa_{1,m} = 0$ が分かっていることによって帰納法が上手く機能して残りの積分核 $\kappa_{l,m}$ が 0 であることが証明されていることを考えると、非コンパクトの場合の扱いについてはまた別途、証明を考えなければならないかもしれない。

(3) (2) で述べた問題との関連で Fock 展開を用いた証明法で論文 [1] の結果を再現できるかについても議論しなければならない。著者の論文 [13] によって多様体がコンパクトの場合は全ての次元でのエネルギー表現の既約性が証明できたが、非コンパクトの場合を含む (というよりもコンパクト性とは無関係に議論をした) 論文 [1] の結果を再現ないし改良できるかは、(2) で指摘した通り全く自明ではない。特に多様体の次元が 1 の場合、もし Fock 展開を用いた計算によって論文 [1] の結果が再現された場合、エネルギー表現の既約性は多様体のコンパクト性が本質的に関わることが明らかになるという点で重要な課題である。

参考文献

- [1] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn and D. Testard: *Irreducibility and reducibility for the energy representation of the group of mappings of a Riemannian manifold into a compact semisimple Lie group*. J. Funct. Anal. **41** (1981), no. 3, 378–396.
- [2] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, D. Testard and A. Vershik: *Factorial representations of path groups*. J. Funct. Anal. **51** (1983), no. 1, 115–131.
- [3] I. Gelfand, M. Graev and A. Vershik: *Representations of the group of smooth mappings of a manifold X into a compact Lie group*. Compositio Math. **35** (1977), no. 3, 299–334.
- [4] I. Gelfand, M. Graev and A. Vershik: *Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group*. Compositio Math. **42** (1980/81), no. 2, 217–243.
- [5] A. Hahn : *The Wilson loop observables of Chern-Simons theory on \mathbb{R}^3 in axial gauge*. Comm. Math. Phys. **248** (2004), no. 3, 467–499.
- [6] R. Ismagilov: *Unitary representations of the group $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU_2$* . Mat. Sb. **100** (1976), no. 1, 117–131; English transl. in Math. USSR-Sb. **29**(1976), 105–117.
- [7] R. Ismagilov: *Representations of infinite-dimensional groups*. Translated from the Russian manuscript by D. Deart. Translations of Mathematical Monographs, 152. American Mathematical Society, 1996.
- [8] H.-H. Kuo : *White noise distribution theory*. CRC Press, 1996.
- [9] P. Leukert, J. Schafer: *A rigorous construction of abelian Chern-Simons path integrals using white noise analysis*. Rev. Math. Phys. **8** (1996), no. 3, 445–456.
- [10] N. Obata : *White noise calculus and Fock space*. Lecture Notes in Math, 1577. Springer-Verlag, 1994.
- [11] N. Obata : *Rotation-invariant operators on white noise functionals*. Math. Z. **210** (1992), no. 1, 69–89.
- [12] G. Salomonsen: *Equivalence of Sobolev spaces*. Results Math. **39** (2001), no. 1-2, 115–130.

- [13] Yoshihito Shimada: *On irreducibility of the energy representation of the gauge group and the white noise distribution theory*. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 8 (2005), no. 2, 153-177.
- [14] A.M.Veršik, I.M.Gelfand, and M.I.Graev : *Representations of the group $SL(2, R)$, where R is a ring of functions*. (Russian) *Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 5(173), 83-128.