

# 曲線の共形幾何学 (無限小非調和比について)

今井 淳<sup>1</sup> (首都大学東京)  
(Jun O'Hara (Tokyo Metropolitan University))  
Rémi Langevin (Université de Bourgogne)

## 概要

結び目  $K$  (または絡み目  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ ) に対して、 $K \times K \setminus \Delta$  (または  $\gamma_1 \times \gamma_2$ ) 上に、メビウス変換で不変となる、複素値 2 次形式を定義することができる。これを無限小非調和比と呼ぶ。これを用いて、結び目のエネルギーなどの汎関数を表すことができる。無限小非調和比の実部と虚部の意味づけを与える。

## 1 イントロダクション

結び目とは  $S^1$  から  $S^3$  または  $\mathbb{R}^3$  への埋め込み写像、またはその像のことである。絡み目とは、いくつかの結び目の非交和のことである。ここでは、結び目の個数が 2 の場合のみを扱うことにする。結び目の上の 4 点、 $x, x+dx, y, y+dy$  を通る球面を複素球面とみなすことにより、この 4 点を 4 つの複素数とみなすことができる。その非調和比を無限小非調和比と呼び  $\Omega$  で表すことにする。これは  $K \times K \setminus \Delta$  上の複素値 2 次形式になる。定義により、これはメビウス変換で不変となる。

無限小非調和比を考えることになったモチベーションと、無限小非調和比の意味づけを記したい。ここで扱うものは全てメビウス変換で不変である。まず、 $S^3$  の相異なる 2 点の集合  $S(3,0) \cong S^3 \times S^3 \setminus \Delta$  を考える。これを余接束  $T^*S^3$  と同一視すると、無限小非調和比の実部は  $T^*S^3$  の標準的な symplectic form と等しくなる。次に、 $S^3$  をミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  の光錘の上半分の無限遠点の集合とみなす。すると  $S(3,0)$  を、ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  の原点を通る 2 次元平面全体のなすグラスマン多様体だと考えることができ、 $S(3,0)$  には、符号  $(3,3)$  の不定値計量が入る。(ブリュッカー座標を用いてもよいし、等質空間と考えてもよいが、証明には、ペンシルと呼ばれる、 $n$  次元球面の中の余次元 1 の球面のなす 1-パラメーター族を用いるのがよい。) 点  $x$  と  $y$  が結び目の上を動くと、 $x$  と  $y$  のペア  $(x,y)$  は  $S(3,0)$  の曲面を作る。無限小非調和比の実部はこの曲面の(虚の)面積要素とも等しくなる。一方、無限小非調和比の虚部には、このような大域的な意味づけを与えることはでき

<sup>1</sup>この共同研究は、日本学術振興会の特定国派遣研究者事業により、2004 年 9 月より 2005 年 3 月までフランス・ディジョン市に滞在した際のものである。

ない。 $S^3$  を4次元双曲空間の境界と考えると、局所的には、無限小非調和比の虚部は、点  $x$  と  $y$  を結ぶ  $\mathbb{H}^4$  の測地線の“横断的面積要素”と等しくなる。

$S^4$  以降が Langevin 氏との共同研究の部分である。

## 2 結び目のエネルギー $E_0^{(2)}$ (今井のモチベーション)

結び目のエネルギーのアイデアは、各々の結び目型 (アンビエント・アイソトピーについての同値類) で、「最もよい形」の結び目を定義するために導入された。大雑把に言うと、荷電した結び目の静電エネルギーの一般化のようなものである。

### 問題 2.1 (福原、作間)

- (1) 結び目の空間上に適当な汎関数 (「エネルギー」と呼ぶ)  $E$  を定義する。
- (2) 結び目型  $[K]$  に属する結び目のエネルギーの値の下限を  $E([K])$  と表す、すなわち、 $E([K]) = \inf_{K' \in [K]} E(K')$ 。これが、 $[K]$  に属する結び目  $K_0$  で実現されるとき、すなわち、 $E(K_0) = E([K])$  となるとき、この結び目  $K_0$  を結び目型  $[K]$  の  $E$ -最小元と呼ぶ。
- (3) 各結び目型に、(対称性をもつような) 見た目のよい「代表的」な結び目を、「エネルギー」最小元として定義出来るような、「エネルギー」を与えよ。

与えられた結び目型の「代表的」な結び目を得る為の方針として、その結び目型に属する結び目を一つ考え、エネルギーを減らすように (その勾配に沿って) 結び目を変形していく。

運良くエネルギー汎関数の極値に到達し、更に運良くそれがその元々の結び目型のエネルギー最小元になれば解決したことになる。(図1参照。下の空間には  $C^2$ -位相を入れる。) (但し、この試みは実際には、数値実験でしか出来ていない。) その為には、変形の途中で、結び目型が変わってしまっは困る。結び目が自己交叉すると、結び目型が変わってしまうかもしれないので、これが起こらないようしたい。その為には、汎関数に次の性質、

(斥自性) 結び目が自己交叉しようとする時、エネルギーの値が発散する。  
を要請し、これを満たすものを結び目のエネルギーと呼ぶことにする。

### 2.1 $E_0^{(2)}$ の定義

この目標の為の、最も自然な候補は、荷電した結び目の静電エネルギーであろう。クーロン斥力のお陰で、エネルギーが有限なら、自己交叉しないと思われるからである。ところが、静電エネルギーそのままの定義では、全て

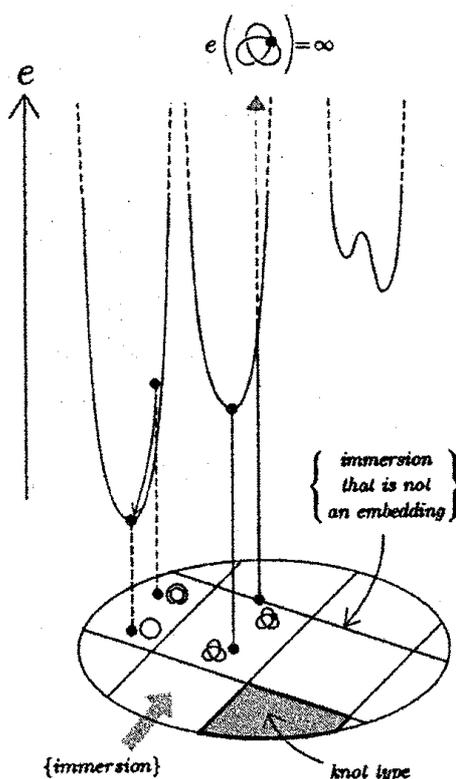


図 1: モチベーション.

の結び目に対して、発散してしまう。

$$"E"(K) = \iint_{K \times K} \frac{dx dy}{|x - y|} = \infty \quad (\forall K)$$

有限な値にするための方法 (詳細は後述) として、次の二つが考えられる。

- (1) 対角成分  $\Delta \subset K \times K$  の  $\varepsilon$ -近傍の補集合上積分し、 $\varepsilon \rightarrow +0$  での発散を差し引く。
- (2) 相対的なエネルギーを考える。すなわち、一つ基準となる結び目 (例えば、正円  $K_0$ ) を決め、それとの差をとり  $"E"(K) - "E"(K_0) = \infty - \infty$  で有限な値にする。

すると、二つの方法で同じもの  $E^{(1)}$  が得られる。

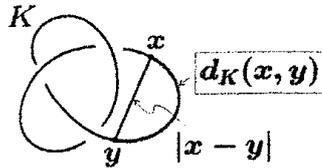
ところが、この  $E^{(1)}$  は斥自性を持たない、すなわち、結び目が自己交叉しても  $E^{(1)}$  の値は有界となってしまう、我々の目的には適さないことが分かる。

斥自性を持つ汎関数を得る為の一つの方法は、被積分関数の中の  $|x - y|$  の冪 (エネルギーの指数と呼ぶことにする) を大きくすることで、実は 2 以上にすると斥自性を持つことが分かる。

そこでまず、指数が 2 の場合を考えよう。距離  $r$  の点電荷の間の「クーロン斥力」が  $r^{-3}$  に比例するという仮定の下での静電エネルギーとみなすことができる。

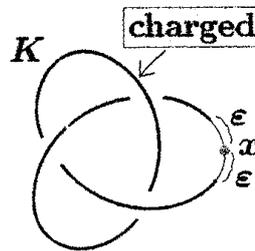
以下簡単のため、特に断らない限り、結び目は長さ1で、弧長でパラメトライズされているものとする。

結び目  $K$  の二点  $x, y$  の間の弧長を  $d_K(x, y)$  で表す。



エネルギー  $E_o^{(2)}$  の定義 方法1:

上の「クーロン力の逆3乗則」の仮定の下で、点  $x$  から弧長で  $\varepsilon$  だけはなれた部分弧が荷電しているときの  $x$  の「電位」を  $V_\varepsilon^{(2)}(K; x)$  とする。i.e.



$$V_\varepsilon^{(2)}(K; x) = \int_{d_K(x, y) \geq \varepsilon} \frac{dy}{|x - y|^2}.$$

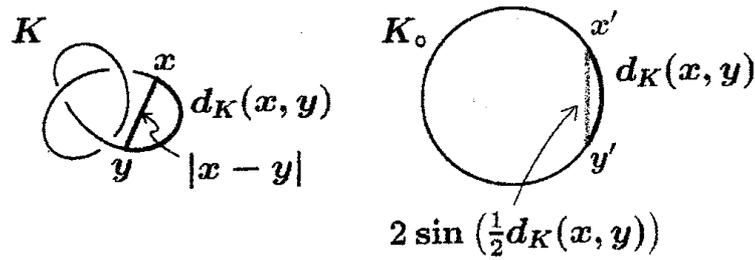
この  $V_\varepsilon^{(2)}(K; x)$  は  $\varepsilon \rightarrow +0$  で発散するが、発散のオーダーは結び目  $K$  と点  $x$  にはよらず、 $O\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$  である。そこで、

$$\begin{aligned} V^{(2)}(K; x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( V_\varepsilon^{(2)}(K; x) - \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{d_K(x, y) \geq \varepsilon} \frac{dy}{|x - y|^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_o^{(2)}(K) &= \int_K V^{(2)}(K; x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \iint_{\{d_K(x, y) \geq \varepsilon\} \subset K \times K} \frac{dx dy}{|x - y|^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

とおくと、 $E_o^{(2)}$  は斥自性を持つエネルギーとなる。

エネルギー  $E_o^{(2)}$  の定義 方法2:  $K_o$  を正円とすると、 $E_o^{(2)}(K_o) = 0$  となる。よって  $E_o^{(2)}(K) = E_o^{(2)}(K) - E_o^{(2)}(K_o)$  となり、上の(1)式の  $-\frac{2}{\varepsilon}$  がキャンセルする。 $K$  と  $K_o$  の対応する点をとると、



$$E_o^{(2)}(K) = \iint_{K \times K} \left( \frac{1}{|x - y|^2} - \frac{1}{(2 \sin(\frac{1}{2} d_K(x, y)))^2} \right) dx dy$$

$$= -4 + \iint_{K \times K} \left( \frac{1}{|x - y|^2} - \frac{1}{d_K(x, y)^2} \right) dx dy.$$

定義 2.2 ([O1]) 結び目  $K$  の  $r^{-2}$ -エネルギー  $E_o^{(2)}(K)$  を

$$E_o^{(2)}(K) = -4 + \iint_{K \times K} \left( \frac{1}{|x - y|^2} - \frac{1}{d_K(x, y)^2} \right) dx dy \quad (2)$$

で定める<sup>2</sup>。

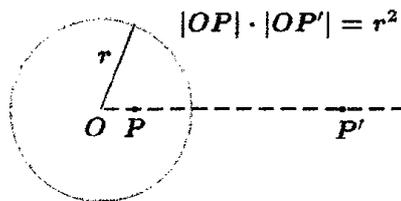
$K$  が (両端が同一直線に漸近的なような) 開いた結び目のときは、定数項  $-4$  を除いて  $E_o^{(2)}(K)$  を定義する。

定数項  $-4$  は後述の無限小非調和比を用いた定義との整合性のために付けた。正円での値、及び、開いた結び目の場合の直線での値は  $0$  になる。

$E_o^{(2)}(K)$  は、「クーロン力の逆 3 乗則」の仮定の下での、荷電した結び目の“静電エネルギー”を、(全空間から決まる) 外在的なものから (結び目だけで決まる) 内在的なものを引いて正規化したものと解釈できる。

## 2.2 $E_o^{(2)}$ の共形不変性

$T: \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  がメビウス変換であることは、 $T$  が球面に関する反転の合成として表すことが出来ることと同じである。



<sup>2</sup> $E_o^{(2)}$  の下の  $o$  は、別に O'Hara の頭文字という訳ではなくて、正円  $\circ$  で値  $0$  を取る、という意味でつけた。

定理 2.3 (Freedman-He-Wang [FWH]'94)  $E_{\circ}^{(2)}$  は共形不変である。すなわち、 $T$  をメビウス変換とすると、

$$E_{\circ}^{(2)}(T(K)) = E_{\circ}^{(2)}(K) \quad \forall K.$$

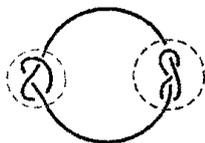
これは、 $T(K)$  が開いた結び目の場合も正しい。

### 2.3 エネルギー最小元の存在について

Freedman, He, Wang は、共形不変性を用いて、次を示した。

定理 2.4 ([FWH]) 素な結び目型には、 $E_{\circ}^{(2)}$ -最小元が存在する。

ここで、図 2.3 のように、2つの非自明な結び目の連結和となる結び目を合成結び目といい、合成結び目でない結び目を素な結び目という。

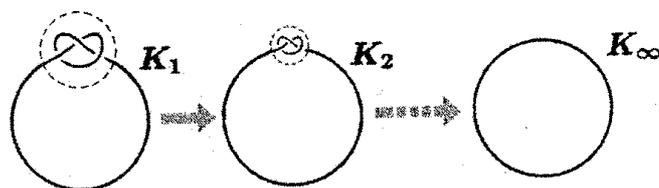


定理の「素」という条件の理由は以下の通り。

$\{K_n\} \subset [K]$  なる結び目の列で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\circ}^{(2)}(K_n) = E_{\circ}^{(2)}([K]) = \inf_{K' \in [K]} E_{\circ}^{(2)}(K')$$

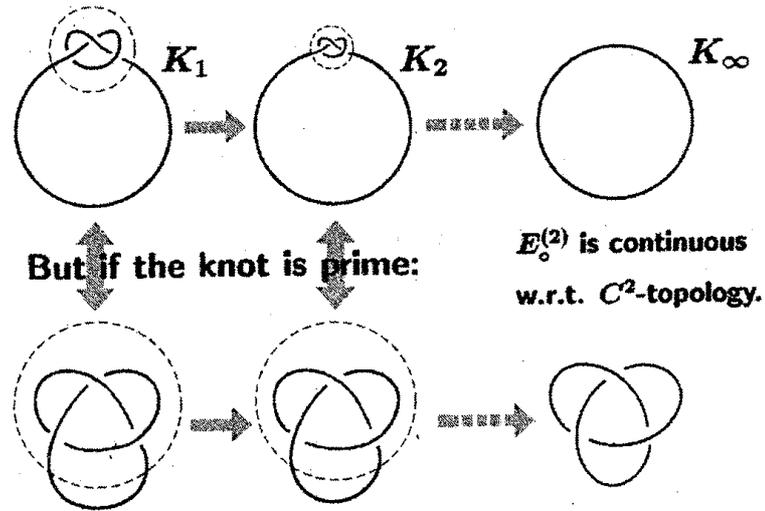
なるものをとる。 $C^0$ -位相に関しては、必要なら  $\mathbb{R}^3$  の相似変換をすれば、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n =: K_{\infty}$  が存在する。ところが、途中で結び目が交わらなくても、下図のように、タングルが1点に縮んで、 $K_{\infty}$  の結び目型が変わってしまうことが起こりうる。これを「プル-タイト」と呼ぶ。



ところが、もしも素な結び目型ならば、メビウス変換によって、タングル(一つしかない)を大きくし、プル-タイトを防ぐことが出来るのである。

後は、Fatou の補題により  $E_{\circ}^{(2)}(K_{\infty}) \leq E_{\circ}^{(2)}([K])$  となり、定理が証明される。

$E_{\circ}^{(2)}$  の  $L^2$ -勾配を求め、Euler-Lagrange 方程式を解くことにより、He は、 $E_{\circ}^{(2)}$ -最小元は滑らかであることを示した。

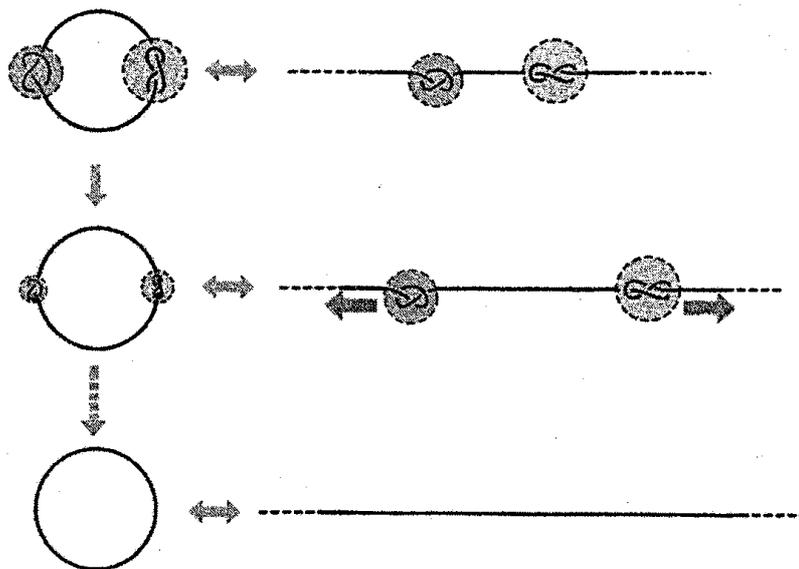


注 2.5 共形不変性から、ある結び目はその結び目型の  $E_0^{(2)}$ -最小元だとすると、そのメビウス変換の像 (必要なら、その鏡像) もまたその結び目型の  $E_0^{(2)}$ -最小元となるので、自明でない素な結び目型には、非可算無限個の  $E_0^{(2)}$ -最小元が存在することになる。

一方素でない結び目型については、Kusner と Sullivan は、数値実験から、

予想 2.6 ([KS]) 素でない結び目型には、 $E_0^{(2)}$ -最小元は存在しない。 $E_0$  を減らそうとすると、素でない結び目は正円に退化しようとする。

と予想している。これは、メビウス変換で開いた結び目にして考えれば、図のように、各々の成分が離れて、相互作用の積分への寄与が減ることに対応する。



## 2.4 数値実験

$E_0^{(2)}$  は式 (2) のようにポテンシャル的な出自を持つので、エネルギーの値を減らすように結び目を変形させる数値実験に適しており、 $E_0^{(2)}$  及びその一般化を用いて結び目 (及び絡み目) を美しい形に変形していくプログラムがいろいろな人達によって作られている。(お薦めは、Scharein ([S]) による KnotPlot である。) その結果の一部はウェブ上公開されていて、筆者のホームページ [O4] からリンクされている。

図 2.4 で、Kusner と Sullivan が数値実験で得た  $E_0^{(2)}$ -最小元とその値を、小さい方から順に挙げる。立体的に見える図がホームページ [Kus] で公開されている。

## 3 Willmore 予想 (Langevin 氏のモチベーション)

$\iota : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  : a smooth embedding.  $\kappa_1, \kappa_2$  を  $\iota(T^2)$  の主曲率とし、Willmore 汎関数を

$$W(\iota) = \int_{T^2} \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right)^2 d\text{vol}(T^2) = \int_{T^2} \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right)^2 d\text{vol}(T^2)$$

で定める。 $W$  は Möbius 変換で不変。

**予想 3.1**  $W(\iota) \geq 2\pi^2$ . “=”  $\iff \iota(T^2)$  は共形変換で (中心  $(\sqrt{2}, 0)$  半径 1 の円を  $y$ -軸のまわりに回転させた) 回転トーラス  $T_{\sqrt{2}, 1}$  に移る。

$S(3, 2)$  を  $S^3$  の中の向きのついた 2 次元球面全体のなす空間とする。これはミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  の中の de Sitter 空間と同一視できる。 $S(3, 2)$  には、メビウス変換で不変な測度が存在する。 $S^3 \supset T^2$  の各点に、曲率が  $T^2$  の平均曲率と等しい 2 次元球面を対応させることにより、“平均球面写像” :  $T^2 \rightarrow S(3, 2)$  を得る。Bryant は  $W(\iota)$  がこの平均球面写像の像の符号、重複度込みの面積と等しいことを示した。

Langevin 氏の目論見は、曲線や曲面にたいして、メビウス変換で不変となるような汎関数をいろいろ研究し、それらの間の不等式と、ある汎関数の最小を与えるものを具体的に求めることにより、上の Willmore 予想にアタックしよう、というものである。

## 4 共形角と無限小非調和比

**定義 4.1** (Doyle-Schramm ([KS]))  $x, y$  を結び目  $K$  上の 2 点とする。 $C(x, x, y)$  を点  $x$  で結び目  $K$  に接し点  $y$  を通る円、 $C(y, y, x)$  を点  $y$  で結び目  $K$  に接し点  $x$  を通る円とする。 $C(x, x, y)$  と  $C(y, y, x)$  とが点  $x$  あるいは点  $y$  に

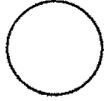
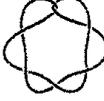
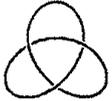
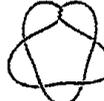
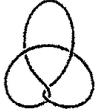
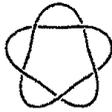
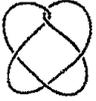
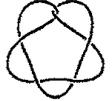
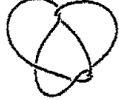
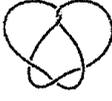
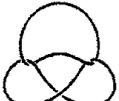
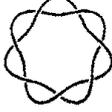
unknot		0	$7_2$		190.3
$3_1$		70.4	$7_3$		192.7
$4_1$		104.9	$8_{19}$		197.0
$5_1$		126.8	$7_4$		197.7
$5_2$		134.6	$7_5$		199.7
$6_1$		162.8	$7_6$		203.7
$6_2$		168.5	$8_{20}$		203.9
$6_3$		172.9	$7_7$		207.1
$7_1$		181.0	$8_{21}$		209.5

図 2: Kusner と Sullivan が数値実験で得た  $E_0^{(2)}$ -最小元とその値

においてなす角を  $\theta = \theta_K(x, y)$  とし ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )、これを  $x$  と  $y$  の間の共形角と呼ぶことにする。

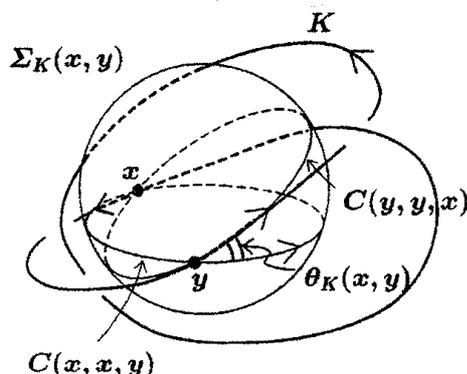


図 3:

$C(x, x, y)$  には、点  $x$  で  $K$  の向きと同調する向きを与える。 $(\theta_K(x, y))$  は  $x, y$  の連続関数だが、 $C^1$  級関数ではなく、滑らかな関数の絶対値の形をしている。

$K \times K \setminus \Delta$  上の複素 2 次形式  $\Omega_{CR} = \Omega_{CR}(x, y)$  を以下のように定義する。

#### 4.1 幾何学的意味付け

$\Sigma(x, x + dx, y, y + dy)$  を、結び目  $K$  上の (順序のついた) 4 点  $x, x + dx, y, y + dy$  を通る 2 次元球面とする。これは、4 点  $x, x + dx, y, y + dy$  が共円でない限り一意に定まる。 $\Sigma(x, x + dx, y, y + dy)$  は  $dx, dy \rightarrow 0$  での極限で、結び目に 2 点  $x, y$  で接する球面になる。これを、 $\Sigma = \Sigma_K(x, x, y, y)$  と書く。これは、 $C_K(x, x, y)$  と  $C_K(y, y, x)$  を含む球面となる。

$\Sigma$  から  $\mathbb{C}$  への立体射影を一つ考えることにより 4 点  $x, x + dx, y, y + dy$  を 4 つの複素数  $\tilde{x}, \tilde{x} + \tilde{dx}, \tilde{y}, \tilde{y} + \tilde{dy}$  と見なすことが出来る。(これら 4 つの複素数自体はユニークに定まらない。) この非調和比

$$(\tilde{x} + \tilde{dx}, \tilde{y}; \tilde{x}, \tilde{y} + \tilde{dy}) = \frac{(\tilde{x} + \tilde{dx}) - \tilde{x}}{(\tilde{x} + \tilde{dx}) - (\tilde{y} + \tilde{dy})} : \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\tilde{y} - (\tilde{y} + \tilde{dy})} \sim \frac{\tilde{dx}\tilde{dy}}{(\tilde{x} - \tilde{y})^2}.$$

で結び目の無限小非調和比  $\Omega_{CR}(x, y)$  を定める ([LO]). 4 つの複素数  $\tilde{x}, \tilde{x} + \tilde{dx}, \tilde{y}, \tilde{y} + \tilde{dy}$  自体はユニークに定まらないが、別の立体射影で別の 4 つの複素数が得られたとすると、それらは、元の 4 つ組みからメビウス変換で得られ、非調和比が向きを保つメビウス変換で不変なことから、結び目の無限小非調和比  $\Omega_{CR}(x, y)$  はユニークに定まることが分かる。

##### 4.1.1 向きに関する議論

正確には、複素共役の曖昧さを除いて定義するためには、球面  $\Sigma$  に向きを入れなければならない。

$Cc(S^3) \subset (S^3)^4 \setminus \Delta$  を共円な4点のなす空間とする。 $Cc(S^3)$  は  $(S^3)^4 \setminus \Delta$  の中で余次元2である。従って、 $((S^3)^4 \setminus \Delta) \setminus Cc(S^3)$  は (弧状) 連結になる。共円でない順序付けられた4点の組全てに対し、それを通る2次元球面全てに向きを与えることができる ([O2])。すなわち、 $((S^3)^4 \setminus \Delta) \setminus Cc(S^3)$  から、 $S^3$  の向き付けられた2次元球面の集合  $S(3, 2)$  への連続写像が存在する (後述の (6) 式)。この向きの与え方を採用すると、順序付けられた4点  $x_1, x_2, x_3, x_4$  を通る向き付けられた2次元球面  $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$  を複素球面と同一視して、4点  $x_1, x_2, x_3, x_4$  の非調和比を取ると、その虚部は正となる。(4点の非調和比が実数となるのは、4点が共円のときである。 $((S^3)^4 \setminus \Delta) \setminus Cc(S^3)$  は連結で、その上の「非調和比をとる」という関数は連続なので、その像は  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  の連結成分に含まれる。よって、その虚部は、 $((S^3)^4 \setminus \Delta) \setminus Cc(S^3)$  の上で常に正か、常に負になるはずである。)

具体的には、 $\Sigma$  の向きは、以下のように与えられる。

(i) 4点  $x, x + dx, y, y + dy$  が共円でない場合。 $v_y, \tilde{v}_x(y)$  をそれぞれ  $y$  における  $T_y C(y, y, x), T_y C(x, x, y)$  の正の向きの単位接ベクトルとする。順序付けられた基底  $\{\tilde{v}_x(y), v_y\}$  が  $T_y \Sigma$  の正の向きを与えるように、球面  $\Sigma$  の向きを定める (図4)。

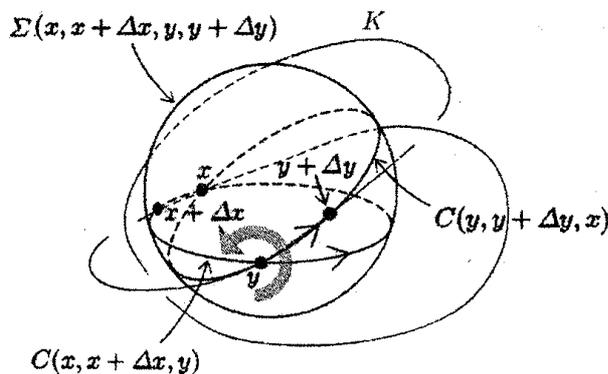


図4: 球面  $\Sigma(x, x + \Delta x, y, y + \Delta y)$  の向き。

(ii) 4点  $x, x + dx, y, y + dy$  が共円である場合。 $\Sigma$  として円  $C(x, x, y) = C(y, y, x)$  を通る任意の球面 (平面を含む) をとればよい。このとき、無限小非調和比  $\Omega_{CR}(x, y)$  は実数となる。

### 4.2 共形不変な角度と2次形式を用いた定義

命題 4.2 ([LO])  $\frac{\widetilde{dxdy}}{(\tilde{x}-\tilde{y})^2}$  の絶対値と偏角を考慮することにより、

$$\Omega_{CR}(x, y) = e^{i\theta_K(x, y)} \frac{dxdy}{|x - y|^2}$$

となることが分る。(初等幾何も使う。)

また、非調和比は  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の向きを保つ (逆にする) メビウス変換で不変である (複素共役になる) ことから、 $\Omega_{CR}(x, y)$  はメビウス変換で不変であることが分かる。このことは、共形角  $\theta_K$  と 2 次微分形式  $\frac{dx dy}{|x-y|^2}$  がメビウス変換で不変なことからも分かる。

## 5 無限小非調和比と結び目のエネルギー $E_{\circ}^{(2)}, E_{\sin \theta}$

**命題 5.1** Doyle と Schramm による  $E_{\circ}^{(2)}(K)$  のコサイン公式 ([KS])

$$E_{\circ}^{(2)}(K) = \iint_{K \times K} \frac{1 - \cos \theta_K(x, y)}{|x - y|^2} dx dy$$

より (この公式は、Freedman-He-Wang による  $E_{\circ}^{(2)}$  の共形不変性 (定理 2.3) の別証明になっている)、

$$E_{\circ}^{(2)}(K) = \iint_{K \times K \setminus \Delta} (|\Omega_{CR}| - \Re \Omega_{CR}) \quad (3)$$

が分る。

**定義 5.2** 結び目の共形的サインエネルギーを

$$E_{\sin \theta}(K) = \iint_{K \times K \setminus \Delta} \Im \Omega_{CR} = \iint_{K \times K} \frac{\sin \theta_K(x, y) dx dy}{|x - y|^2} \quad (4)$$

で定める。右辺は Kusner と Sullivan ([KS]) により導入された。

### 5.1 無限小非調和比の実部と球面の余接束のシンプレクティック形式

$(q_1, \dots, q_m)$  を多様体  $M$  の局所座標、 $(p_1, \dots, p_m)$  を余接束  $T^*M$  のファイバーの、基底  $\{dq_1, \dots, dq_m\}$  に関する座標とすると、 $T^*M$  の局所座標として、 $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$  をとることが出来る。このとき、 $T^*M$  の標準的な symplectic form  $\omega_M$  は  $\omega_M = \sum dq_i \wedge dp_i$  で与えられる。一方  $M$  には tautological 1-form と呼ばれるものがある。これは局所的には、 $\theta = \sum p_i dq_i$  と表される。 $\omega_M = -d\theta$  が成り立つので、 $T^*M$  の標準的な symplectic form は完全形式である。 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  とし、 $S^n \ni \mathbf{x}$  に対し  $\Pi_{\mathbf{x}}$  を原点  $O$  を通り、ベクトル  $\vec{O\mathbf{x}}$  と直交する  $\mathbb{R}^{n+1}$  の  $n$ -平面とし、 $p_{\mathbf{x}} : S^n \setminus \{\mathbf{x}\} \rightarrow \Pi_{\mathbf{x}}$  を立体射影とする。 $\Pi_{\mathbf{x}}$  を平行移動により、 $T_{\mathbf{x}}S^n$  と同一視すると、 $S^n \setminus \{\mathbf{x}\}$  は

$$S^n \setminus \{\mathbf{x}\} \ni \mathbf{y} \mapsto (T_{\mathbf{x}}S^n \ni \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})) \in \mathbb{R}) \in T_{\mathbf{x}}^*S^n$$

により  $T_{\mathbf{x}}^*S^n$  と同一視することができる。これにより、 $S^n \times S^n \setminus \Delta$  と  $T^*S^n$  を

$$S^n \times S^n \setminus \Delta = \bigcup_{\mathbf{x} \in S^n} \{\mathbf{x}\} \times (S^n \setminus \{\mathbf{x}\}) \cong \bigcup_{\mathbf{x} \in S^n} T_{\mathbf{x}}^*S^n = T^*S^n$$

により同一視する。 $T^*S^n$  の標準的なシンプレクティック形式  $\omega_{S^n}$  は  $S^n \times S^n \setminus \Delta$  上次式で与えられる。

$$\omega_{S^n} = d \left( -\frac{\sum_{i=1}^{n+1} y_i dx_i}{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} dx_i \wedge dy_i}{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})} + \frac{(\sum_{i=1}^{n+1} y_i dx_i) \wedge (\sum_{i=1}^{n+1} x_i dy_i)}{(1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2}$$

**命題 5.3** (1)  $\omega_{S^n}$  は Möbius 変換の  $S^n \times S^n$  への diagonal action で不変。

(2) (folklore)  $n = 2$  のとき。立体射影により  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視する。 $(w, z)$  を  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  の座標とすると、 $w, w + dw, z, z + dz$  の非調和比  $\frac{dw \wedge dz}{(w - z)^2}$

の実部は  $-\frac{1}{2}\omega_{S^2}$  と等しい。

(3)  $\iota: K \times K \setminus \Delta \hookrightarrow S^3 \times S^3 \setminus \Delta$  を包含写像とすると、

$$\Re \Omega_{CR}(x, y) = -\frac{1}{2} \iota^* \omega_{S^3} \quad (5)$$

従って特に、 $\Re \Omega_{CR}$  は完全形式。

**注 5.4**  $\Im \Omega_{CR}$  を何らかの 2-form の pull-back の形に表すことは出来ない。

$K \times K$  の対角成分の  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ -近傍の補集合上で  $\Re \Omega_{CR}$  の積分を考え、ストークスの定理を適用し、命題 5.3 を用いて計算すると、 $-\frac{2}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$  となり、上の (3) から、[O1] で与え  $E_o^{(2)}(K)$  の元々の定義 (1) を復元できる。また、 $\Re \Omega_{CR}$  の積分は、結び目のグローバルな情報を拾わないことが分かる。

## 6 ミンコフスキー空間を使った記述

$\mathbb{R}^{n+2}$  にローレンツ計量  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2}$  を入れたミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  で考える。 $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{v}$  は  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$  のとき space-like、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  のとき light-like、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$  のとき time-like という。 $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の vector subspace  $W$  は  $W$  に属する任意の non-zero vector が space-like であるとき space-like、space-like vector と time-like vector 両方を含むときに of mixed type という。 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$  を光錐、一葉超双曲面  $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$  を **de Sitter 空間** と呼ぶ (図 5)。ローレンツ計量  $\langle, \rangle$  を保つ線形同型の集合をローレンツ群と呼び  $O(n+1, 1)$  と書く。

ローレンツ計量に関する  $W$  の直交補空間  $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1,1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \forall \mathbf{w} \in W\}$  を  $W^\perp$  と書く。光錐の上半分  $\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\} \cap \{x_{n+2} > 0\}$  の無限遠点の集合、すなわち、原点から出る光錐の上半分内の半直線の集合を  $S_\infty^n$  とおく。半直線は光錐と  $\{x_{n+2} = 1\}$  超平面との交点と 1 対 1 に対応するから、 $S_\infty^n$  は  $S_1^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1 = 0\}$  と同一視出来る。こうして、 $S^n$  を  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の中に実現する。 $O(n+1, 1)$  の元の  $S^n \cong S_\infty^n$  への作用が Möbius 変換である。

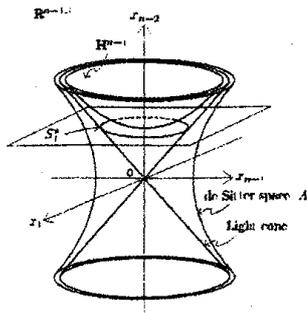
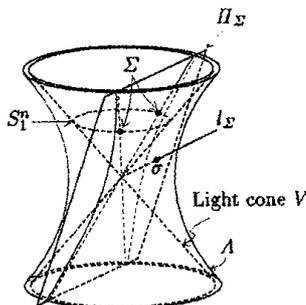


図 5: ミンコフスキー空間と de Sitter 空間

$S(n, n-1)$  を  $S^n$  中の向き付けられた  $n-1$  次元球面  $\Sigma$  の集合とする。 $\mathbb{R}^{n+1,1}$  で考えると、 $\Sigma$  は  $S^n \subset A$  と  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の原点を通る超平面  $\Pi_\Sigma$  との交わりとなる。この  $\Pi_\Sigma$  とローレンツ計量  $\langle, \rangle$  に関して直交する直線  $l_\Sigma$  は、 $A$  と 2 点で交わるが、向きを考慮すればその内の 1 点  $\sigma = \varphi(\Sigma)$  を定めることができる。この対応により、全単射  $\varphi: S(n, n-1) \xrightarrow{\cong} A$  を得る。この同一視は  $O(n+1, 1)$  の作用と両立する、i.e.  $\varphi(A\Sigma) = A\varphi(\Sigma)$  ( $A \in O(n+1, 1)$ )。



$n = 3$  のとき、共円でない 4 点  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{i5}) (i = 1, 2, 3, 4)$  が与えられれば、それを通る 2 次元球面  $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$  が定まる。Lorentz 外積  $x_1 \wedge_L \dots \wedge_L x_4$  を

$$\left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{12} & \dots & x_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{42} & \dots & x_{45} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{41} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{14} & x_{15} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{44} & x_{45} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{15} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{45} \end{array} \right|, \\ - \left| \begin{array}{ccc} x_{11} & \dots & x_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{41} & \dots & x_{44} \end{array} \right| \end{array} \right)$$

で定義すれば (第 5 成分の符号に注意)、 $\langle x_1 \wedge_L \dots \wedge_L x_4, x_j \rangle = 0 (j = 1, 2, 3, 4)$  となるので、 $\varphi(\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)) \in A$  は次で与えられる：

$$\varphi(\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{x_1 \wedge_L \dots \wedge_L x_4}{\sqrt{\langle x_1 \wedge_L \dots \wedge_L x_4, x_1 \wedge_L \dots \wedge_L x_4 \rangle}} \quad (6)$$

## 7 プリュッカー座標を用いた $S(n, q)$ の記述 ( $0 \leq q < n - 1$ )

$S(n, q)$  を  $S^n$  中の向き付けられた  $q$  次元球面全体のなす空間とする。上の話と合わせる為に、射影空間ではなく、ユークリッド空間でプリュッカー座標を使うことにする。 $S^n \cong S_\infty^n \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$  の向き付けられた  $q$ -球面  $\Sigma$  は  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の原点を通る向き付けられた  $(q+2)$ -平面  $\Pi$  と  $S_\infty^n$  の交わりとなる。従って、 $S^n$  の向き付けられた  $q$ -球面の集合  $S(n, q)$  は、Minkowski 空間  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の向き付けられた  $(q+2)$  次元部分空間のなす Grassmann 多様体  $\widetilde{\text{Gr}}_{n+2, q+2}$  の部分空間となる。プリュッカー座標を使うと、次のように表される。 $x_i$  を  $\Pi$  の一次独立な  $(q+2)$  個の点、

$$p_{i_1 \dots i_{q+2}} = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_{q+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(q+2)i_1} & \cdots & x_{(q+2)i_{q+2}} \end{vmatrix}, \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_{q+2} \leq n+2)$$

とおくと、外積は  $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2} = (\cdots, p_{i_1 \dots i_{q+2}}, \cdots) \in \mathbb{R}^N$ 、但し  $N = \binom{n+2}{q+2}$ 、で与えられる。 $p_{i_1 \dots i_{q+2}}$  は独立ではなく、Plücker 関係式

$$\sum_{k=1}^{q+3} (-1)^k p_{i_1 \dots i_{q+1} j_k} p_{j_1 \dots j_k \dots j_{q+3}} = 0 \quad (7)$$

を満たす。 $[x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2}] \in \mathbb{R}P^{N-1}$  は  $\Pi$  の基底  $x_i$  の取り方によらず、また逆に  $\Pi$  を定める。

$\mathbb{R}^N$  の計量については、前節で最後の座標  $x_{i_5}$  を含まない小行列式で与えられる座標の符号が  $-$  であったことから、 $N_1 = \binom{n+1}{q+1}$ ,  $N_2 = \binom{n+1}{q+2}$  として、

$$\langle u, u \rangle_{N_1, N_2} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{q+1} \leq n+1} (u_{i_1 \dots i_{q+1} n+2})^2 - \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{q+2} \leq n+1} (u_{i_1 \dots i_{q+2}})^2$$

で与え、この計量を持つ  $\mathbb{R}^N$  を  $\mathbb{R}^{N_1, N_2}$  とし、その直交群を  $O(N_1, N_2)$  と書く。

$$\Lambda_{N_1, N_2} = \{v \in \mathbb{R}^{N_1, N_2} \mid \langle v, v \rangle_{N_1, N_2} = 1\},$$

$$\Theta(n, q) = \Lambda_{N_1, N_2} \cap \{\text{Plücker 関係式 (7)}\}$$

とおくと、

**定理 7.1** ([LO2]) (1)  $S^n$  の向き付けられた  $q$ -球面の集合  $S(n, q)$  は  $\Theta(n, q)$  と同一視することが出来る。点  $x_1, \dots, x_{q+2}$  を通る  $q$ -球面を  $\Sigma(x_1, \dots, x_{q+2})$  とすると、全単射  $\psi: S(n, q) \rightarrow \Theta(n, q)$  は

$$\psi(\Sigma(x_1, \dots, x_{q+2})) = \frac{x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2}}{\sqrt{\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2}, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2} \rangle_{N_1, N_2}}}$$

で与えられる。

(2)  $A = (a_{ij}) \in O(n+1, 1)$  とする。multi-index  $I = (i_1 \cdots i_{q+2}), J = (j_1 \cdots j_{q+2})$  に対し、

$$a_{IJ} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_{q+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{q+2} j_1} & \cdots & a_{i_{q+2} j_{q+2}} \end{vmatrix}$$

とおき、 $A_* = (a_{IJ}) \in M_N(\mathbb{R})$  とおくと、 $A_* \in O(N_1, N_2)$  で  $(Ax_1) \wedge \cdots \wedge (Ax_{q+2}) = A_* (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{q+2})$ 、よって  $\psi(A\Sigma) = A_* \psi(\Sigma)$  を満たす。

(3)  $\Theta(n, q)$  の次元は  $(q+2)(n-q)$  で、 $\mathbb{R}^{N_1, N_2}$  の不定内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N_1, N_2}$  を  $\Theta(n, q)$  に制限したものの符号は  $((q+1)(n-q), n-q)$  で与えられる。

証明は、プリユッカー座標を用いてもよいし、等質空間

$$SO(n+1, 1)/SO(n-q) \times SO(q+1, 1)$$

と考えるとよいが、§9 で扱うペンシルを用いた  $S(n, q) \cong \Theta(n, q)$  の“正規直交基底” (サブセクション 9.1 の図 15) を使うと簡単になる。

系 7.2  $S^3$  中の、順序付けられた相異なる 2 点の集合  $S(3, 0)$  は、プリユッカー座標を用いると、 $\Theta(3, 0) \subset \mathbb{R}^{4,6}$  で  $\dim \Theta(3, 0) = 6$  で  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{4,6}|_{\Theta(3,0)}$  の符号は  $(3, 3)$  となる。

## 8 無限小非調和比の実部と虚部の意味づけ-共形的面積要素

定理 8.1 ([LO2])  $x \in \gamma_1, y \in \gamma_2$  ( $\gamma_1 = \gamma_2 = K$  のときは  $x \neq y$ ) とする。2 点のペア  $(x, y)$  を  $S^0 \subset S^3$  と見て  $S(3, 0) \cong \Theta(3, 0) \subset \mathbb{R}^{4,6}$  の元だと思つたものを  $v(x, y)$  と書く。  $\Theta(3, 0)$  の曲面  $\gamma_1 \times \gamma_2 = \{v(x, y)\}_{x \in \gamma_1, y \in \gamma_2}$  の“虚面積要素”は、無限小非調和比の実部と一致する。

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \langle v_x, v_x \rangle_{4,6} & \langle v_x, v_y \rangle_{4,6} \\ \langle v_y, v_x \rangle_{4,6} & \langle v_y, v_y \rangle_{4,6} \end{vmatrix}} dx dy = 2\sqrt{-1} \Re \Omega_{CR}.$$

§9 で扱うペンシルを用いた  $S(n, q) \cong \Theta(n, q)$  の“正規直交基底” (サブセクション 9.1 の図 15) を使うと簡単になる。

系 8.2  $\Re \Omega_{CR}$  は完全形式で、 $\gamma_1 \times \gamma_2 \cong T^2$  なので、 $\Theta(3, 0)$  の曲面  $\gamma_1 \times \gamma_2$  の面積は 0。

実部は global な意味づけが可能だが、虚部は local にしか出来ない。

**定理 8.3** ([LO2])  $l(x, y)$  を  $x \in \gamma_1$  と  $y \in \gamma_2$  を  $\mathbb{H}^4$  の中で結ぶ測地線とする。 $\Pi_0$  を  $l(x_0, y_0)$  と直交する  $\mathbb{H}^4$  の全測地的 3-平面とする。 $(x, y)$  を  $(x_0, y_0)$  の近傍  $N_0$  の点とする。 $l(x, y)$  と  $\Pi_0$  の交わりを  $S(x, y)$  とすると、 $S = \{S(x, y)\}_{(x, y) \in N_0}$  は  $\Pi_0$  の曲面になる。このとき、 $S$  の  $S(x_0, y_0)$  における面積要素は、 $4\text{Sm} \Omega_{CR}$  に等しい。 $(\Pi_0$  の選び方によらない。)

## 9 Pencils of codimension 1 spheres

最後に、ペンシルの簡単な解説をしたい。

まずは  $S(2, 1)$  のペンシルから始めよう。 $S^2$  の定点  $A, B$  を通る円の族 (図 6(黒)) を、基点  $A, B$  を持つペンシルといい、それらと直交する円の族 (図 6(灰)) を limit points  $A, B$  を持つポンスレ・ペンシルという。(立体射影により、 $\mathbb{R}^2$  にうつしたものが図 7。)

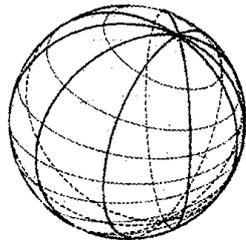


図 6:

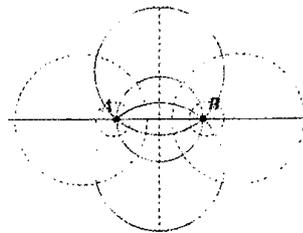


図 7:

$S^n$  の余次元 1 球面全体の集合  $S(n, n-1)$  を de Sitter 空間  $A \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$  と同一視すると、ペンシル  $\mathcal{P}$  とは、de Sitter 空間  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  の 2次元線形部分空間  $P$  と  $A$  の交わり (またはその連結成分) のことである。 $P$  のタイプにより、3つの場合がある。

### Case 1. $\mathcal{P}$ が space-like.

$P$  上の  $\sigma_1 = \varphi(\Sigma_1)$  と  $\sigma_2 = \varphi(\Sigma_2)$  の間の弧長  $\rho$  は  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の間の角  $\theta$  と等しく (図 8, 9)、 $\cos \rho = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  を満たす。

$\sigma \in \mathcal{P}$  ならば  $\Sigma = \varphi^{-1}(\sigma)$  は base sphere (or circle, points)  $\Gamma = P^\perp \cap S^n$  を含む。 $\mathbb{H}^{n+1}$  ( $\partial\mathbb{H}^{n+1} = S^n$ ) で考えると、 $\Delta_i$  を  $\partial\Delta_i = \Sigma_i$  を満たす  $\mathbb{H}^{n+1}$  の全測地的  $n$ -平面、 $\Upsilon \subset \Delta_i$  を  $\partial\Upsilon = \Gamma$  を満たす  $\mathbb{H}^{n+1}$  の全測地的  $(n-1)$ -平面とすると、 $\mathcal{P}$  に属する球面は  $\Upsilon$  の回りに  $\Delta$  を回転させたものと  $\partial\mathbb{H}^{n+1} = S^n$  との交わりとして得られる。

### Case 3. $\mathcal{P}$ が of mixed type.

2直線  $P \cap V$  を  $l_1 \cup l_2$  と表すと、 $l_i^\perp = l_i$ 。  $\{q_{\pm\infty}\} = (l_1 \cup l_2) \cap S_\infty^n$  を  $\mathcal{P}$  の limit points と呼ぶ (図 10)。

$\gamma$  を  $q_\infty$  と  $q_{-\infty}$  を結ぶ  $\mathbb{H}^{n+1}$  の測地線、 $w_i = \gamma \cap \Delta_i$  とおく (図 12) と、 $\Delta_i \perp \gamma$ 。  $\mathcal{P}$  上の  $\sigma_1 = \varphi(\Sigma_1)$  と  $\sigma_2 = \varphi(\Sigma_2)$  の間の“虚弧長”(  $\mathcal{P}$  の接ベクト

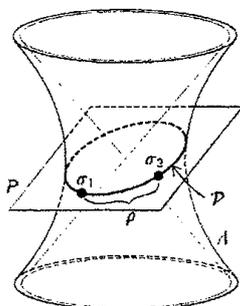


图 8:

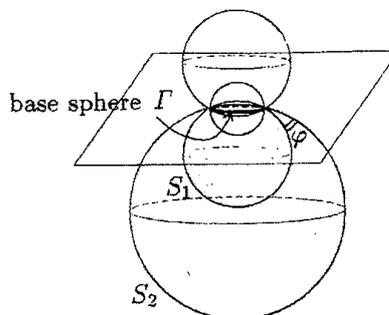


图 9:

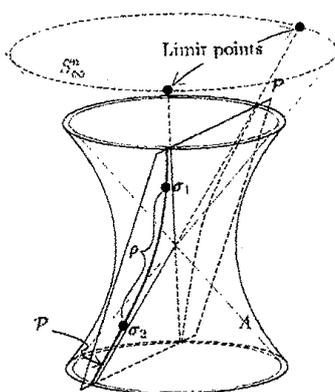


图 10:

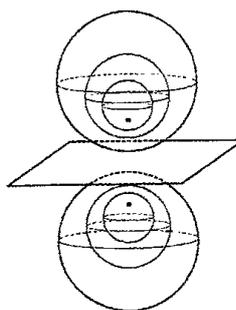


图 11:

ルは time-like) の絶対値  $\rho$  は  $w_1$  と  $w_2$  の間の距離と等しく、 $\cosh \rho = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  を満たす。

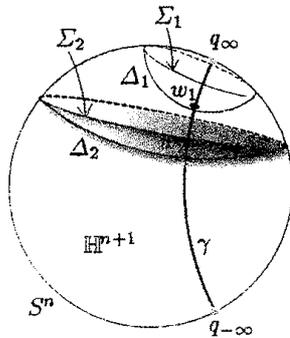


図 12:

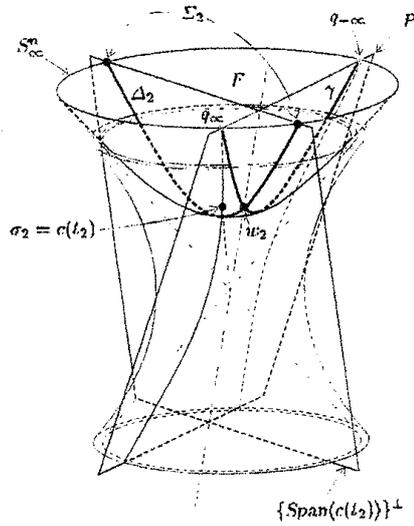


図 13:

### 9.1 ペンシルを用いた $S(1, 0)$ , $S(3, 0)$ の正規直交基底

#### 9.1.1 $S(1, 0)$

$S^1$  はミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{2,1}$  の光錐の上半分の無限遠点の集合と同一視し、 $S^1$  の (順序付けられた) 2 点の集合  $S(1, 0)$  は  $\mathbb{R}^{2,1}$  の de Sitter 空間  $\Lambda$  と同一視する。 $\Lambda$  は 2 次元でその符号は  $(1, 1)$ 。 $\Lambda \ni x$  を図 14 の左端の 2 点とする。 $x$  を通る、互いに直交するペンシル (すなわち、原点を通り互いに直交する  $\mathbb{R}^{2,1}$  の平面と  $\Lambda$  の交わり) は、次のように得られる。この 2 点を通る  $\mathbb{H}^2$  の測地線を  $\gamma$  とし、その上に点  $W$  をとる。この点の周りに測地線を回転させ、 $S^1 = \partial\mathbb{H}^2$  との交わりを考えれば、space-like なペンシルを得る (図 14 の左から二番目)。また、この点  $W$  を通り  $\gamma$  と直交する測地線と直交する測地線と  $S^1 = \partial\mathbb{H}^2$  との交わりを考えれば、time-like なペンシルを得る (図 14 の右端)。それぞれのペンシルの単位ベクトルをとれば、それが  $T_x\Lambda$  の正規直交基底となる。

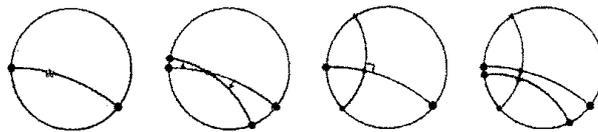


図 14:

### 9.1.2 $S(3,0)$

$S(3,0)$  の正規直交基底 (図 15)。上段が space-like, 下段が time-like。(立体射影により  $\mathbb{R}^3$  の絵にした。)  $S(3,0) \ni S^0$  に対して、その 2 点を通る、互いに直交する 3 つの円をとる。それぞれの円で、上で与えた  $S(1,0)$  の space-like ペンシルと time-like ペンシルを考え、その単位接ベクトルをとればよい。

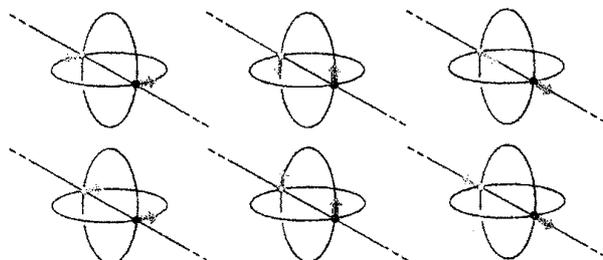


図 15:  $S(3,0)$  の正規直交基底

### 参考文献

- [FHW] M.H. Freedman, Z.-X. He and Z. Wang, *Möbius energy of knots and unknots*. Ann. of Math. **139** (1994), 1–50.
- [He] Z.-X. He, *The Euler-Lagrange equation and heat flow for the Möbius energy*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), 399–431.
- [Kus] [http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot\\_pix/](http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/).
- [KS] R. Kusner, and J.M. Sullivan. *Möbius energies for knots and links, surfaces and submanifolds*, Geometric Topology (Proceedings of the 1993 Georgia International Topology Conference). AMS/IP Studies in Adv. Math., W. H. Kazez ed. Amer. Math. Soc. and International Press, Cambridge, MA. (1997) 570–604.
- [LO] R. Langevin and J. O'Hara. *Conformally invariant energies of knots*, J. Institut Math. Jussieu 4 (2005), 219–280.
- [LO2] R. Langevin and J. O'Hara. *Introduction of conformal geometry for knots and links*. in preparation.
- [O1] J. O'Hara. *Energy of a knot*, Topology **30** (1991) p.241–247.
- [O2] J. O'Hara. *Energy of knots and conformal geometry*, Series on Knots and Everything Vol. 33, World Scientific, Singapore, xiv + 288 pages.

- [O4] <http://www.comp.metro-u.ac.jp/~ohara/> .
- [O3] 今井 淳. 結び目のエネルギー, 数学, 1997, 49 卷 4 号, p.365-378,
- [S] Rob Scharein, KnotPlot Site <http://www.cs.ubc.ca/spider/scharein/>