数理解析研究所講究録 1461 巻 2005 年 179-187

斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題の必然性測度最適化

大阪大学大学院　乾口雅弘 (Masahiro Inuiguchi)†
† Graduate School of Engineering Science, Osaka University

概要

本研究では，斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題の必然性測度最適化モデルを取り扱う．この問題が線形分数計画問題に帰着されることを示す．また，帰着問題の特別な構造を利用して，Bender の分割法に基づいた解法が提案される．最後に，簡単な数値例が与えられる．

Key Words: ファジィ線形計画法，斜交ファジィベクトル，必然性測度，線形分数計画法，Bender の分割法

1　はじめに

ファジィ線形計画法は，不明確な係数間に相互関係がないという暗黙の仮定の下に発展してきた．この仮定により，帰着問題が簡単になり，線形性を損なわずに解けることになる．帰着問題の取り扱い易さはファジィ線形計画法の利点の一つである．しかし，ポートフォリオ選択問題のように，制約条件の少ない問題では，この仮定のため，直感的に受け入れ難い解が得られることが報告されている [5]．このことより，任意の現実問題をモデル化するには，相互関係が無いという仮定は，必ずしも十分ではないことがわかる．

したがって，相互関係がある不明確な係数をもつファジィ線形計画問題を解くことが課題となる．しかし，残念ながら，この問題の帰着問題は，一般に，線形性あるいは凸性すら失うことが多く，取り扱いにくい問題となる．そこで，帰着問題の取り扱い易さをある程度保存する範囲で，不明確な係数間の相互関係を取り扱えるモデルを考察することが肝要となる．既に，いくつかの試みがなされ，ある程度の成果が得られている [1, 3, 4, 6, 9]．これらの中でも，ファジィ凸多面体をもつ線形計画問題 (LP 問題) に関する成果を纏めると，表 1 のようになる．ただし，表中の斜交ファジィベクトルと一般のファジィ凸多面体に関しては，必然性測度を用いた場合の成果である．

一般のファジィ凸多面体とは，すべての $h \in (0,1]$ に対して，h-レベル集合が凸多面体となるファジィ集合である．斜交ファジィベクトルは，相互関係の無いファジィ数と斜交行列により定められるファジィ集合である．これらの相互関係を取り扱うモデルは，文献 [1, 3, 7] で提案されている．文献 [3] では，不明確な変数間での相互関係を取り扱うため，斜交ファジィベクトルが提案されている．斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題の必然性測度を用いた満足水準最適化モデルが双対角形構造をもつ線形計画問題に帰着されることが示され，Bender の分割法に基づいた解法が提案されている．文献 [7] では，この成果が一般のファジィ凸多面体の場合に拡張されている．すなわち，必然性測度を用いた満足水準最適化モデルが半無限線形計画問題に帰着されることが示され，緩和法に基づく求解アルゴリズ

表 1: ファジィ凸多面体をもつ線形計画法の今までの成果

	満足水準最適化	様相性最適化
相互関係が無いファジィ数	- 線形計画問題	- L-L ファジィ数の場合は，線形分数計画法 - 一般の場合は，線形計画法 + 二分法
斜交ファジィベクトル	- 線形計画問題 - Bender の分割法	未解決
一般のファジィ凸多面体	- 半無限線形計画問題 - 緩和法	- 半無限計画問題 - 緩和法 + 二分法

ムが提案されている．また，文献 [1] では，一般のファジィ凸多面体をもつ線形計画問題の必然性測度最適化モデルが議論されている．必然性測度最適化モデルが半無限計画問題に帰着されることが示され，二分法と緩和法に基づく求解アルゴリズムが提案されている．このアルゴリズムでは，二分法と緩和法とを同時に収束させ，計算の高速化をはかっている．

しかし，斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題の必然性測度最適化モデルに関する議論は未だなされていない．本研究では，この未解決の問題を議論する．特に，斜交ファジィベクトルがL-L ファジィ数で定められる場合に，求解アルゴリズムが一般の場合より単純になるか否かが調べられる．

本稿の構成は次の通りである．次節では，本論文で取扱われる問題が説明される．第 3 節では，定式化された問題を変形し，帰着問題を示す．第 4 節では，帰着問題が特別な構造を有していることから，Bender の分割法に基づく求解アルゴリズムが与えられる．第 5 節では，簡単な数値例が与えられる．第 6 節では，本研究で得られた成果がまとめられ，今後の課題が述べられる．

2 斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題

斜交ファジィベクトル (OFV) をもつ次の線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \lesssim g_i,\ i=1,2,\ldots,m \\
& Q\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{p}
\end{array}
\tag{1}
$$

ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ は決定変数ベクトル，Q は $q\times n$ の定数行列，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_q)^{\mathrm{T}}$ は定数ベクトルである．$\boldsymbol{a}_i$, $i=0,1,\ldots,m$ は，それぞれ，斜交ファジィベクトル $\boldsymbol{A}_i$, $i=0,1,\ldots,m$ により規定される領域内の値をとる不明確な係数ベクトルである．'$r \lesssim g_i$' という記号は，'r がだいたい g_i より小さいか等しい' ことを表し，ファジィ制約 C_i で表される．各 C_i は $\mu_{C_i}(g_i)=1$ なる上半連続で非減少なメンバシップ関数 μ_{C_i} をもつと仮定される．

$\boldsymbol{A}_i$, $i=0,1,\ldots,m$ は，それぞれ，斜交行列 D_i, $i=1,2,\ldots,m$ と相互関係のないファジィ数 $B_{ij}=(b_{ij}^{\mathrm{L}},b_{ij}^{\mathrm{R}},\beta_{ij}^{\mathrm{L}},\beta_{ij}^{\mathrm{R}})_{L_iL_i}$, $i=0,1,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ をもつと仮定される．すなわち，$\boldsymbol{A}_i$ は次のメンバシップ関数 $\mu_{\boldsymbol{A}_i}$ で定められる．

$$
\mu_{\boldsymbol{A}_i}(\boldsymbol{r}) = \min_{j=1,2,\ldots,n} \mu_{B_{ij}}(\boldsymbol{d}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}) \tag{2}
$$

ただし，$\boldsymbol{d}_{ij}^{\mathrm{T}}$ は D_i の第 j 行である．一方，B_{ij} は次のメンバシップ関数 $\mu_{B_{ij}}$ で定められる．

$$\mu_{B_{ij}}(r)=\begin{cases} L_i\left(\dfrac{b_{ij}^{\mathrm{L}}-r}{\beta_{ij}^{\mathrm{L}}}\right) & r<b_{ij}^{\mathrm{L}}\text{のとき} \\ 1 & b_{ij}^{\mathrm{L}}\le r\le b_{ij}^{\mathrm{R}}\text{のとき} \\ L_i\left(\dfrac{r-b_{ij}^{\mathrm{R}}}{\beta_{ij}^{\mathrm{R}}}\right) & r>b_{ij}^{\mathrm{R}}\text{のとき} \end{cases} \tag{3}$$

ただし，$b_{ij}^{\mathrm{L}}\le b_{ij}^{\mathrm{R}}$，$\beta_{ij}^{\mathrm{L}}>0$，$\beta_{ij}^{\mathrm{R}}>0$ と仮定され，$L_i:[0,+\infty)\to[0,1]$ は次の性質をもつ reference 関数である．

(L1)　$L_i(0)=1$ である．　(L2)　L_i は上半連続である．

(L3)　L_i は非増加である．　(L4)　$\lim_{r\to+\infty}L_i(r)=0$ である．

$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ が取りうる領域は，次のメンバシップ関数 $\mu_{Y_i(\boldsymbol{x})}$ で定められるファジィ集合 $Y_i(\boldsymbol{x})$ で与えられる．

$$\mu_{Y_i(\boldsymbol{x})}(y)=\sup_{\boldsymbol{r}:\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=y}\mu_{\boldsymbol{A}_i}(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

$\boldsymbol{A}_i$ が相互関係のない L-L ファジィ数 B_{ij}，$j=1,2,\ldots,n$ により定められる斜交ファジィベクトルであるから，文献 [3] の成果より，$Y_i(\boldsymbol{x})$ も L-L ファジィ数 $(y_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),y_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}),\gamma_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),\gamma_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}))_{L_iL_i}$ となる．ただし，

$$y_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})=\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})\ge0}b_{ij}^{\mathrm{L}}k_{ij}(\boldsymbol{x})+\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})<0}b_{ij}^{\mathrm{R}}k_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

$$y_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})=\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})\ge0}b_{ij}^{\mathrm{R}}k_{ij}(\boldsymbol{x})+\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})<0}b_{ij}^{\mathrm{L}}k_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

$$\gamma_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})=\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})\ge0}\beta_{ij}^{\mathrm{L}}k_{ij}(\boldsymbol{x})-\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})<0}\beta_{ij}^{\mathrm{R}}k_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

$$\gamma_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})=\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})\ge0}\beta_{ij}^{\mathrm{R}}k_{ij}(\boldsymbol{x})-\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})<0}\beta_{ij}^{\mathrm{L}}k_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

と定められ，$k_{ij}(\boldsymbol{x})$ は次式で定められる．

$$k_{ij}(\boldsymbol{x})=\sum_{l=1}^{n}d_{ilj}^{*}x_l \tag{9}$$

d_{ilj}^{*} は，斜交行列 D_i^{-1} の第 (l,j) 成分である．したがって，次式が成立する．

$$\mathrm{cl}(Y_i(\boldsymbol{x}))_h=\left[y_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})-L_i^{\#}(h)\gamma_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),\,y_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})+L_i^{\#}(h)\gamma_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})\right] \tag{10}$$

ただし，$L_i^{\#}(h)=\sup\{r\in\mathbf{R}\mid L_i(r)>h\}$ と定められ，$(Y_i(\boldsymbol{x}))_h$ は，ファジィ集合 $Y_i(\boldsymbol{x})$ の強 h-レベル集合で，$(Y_i(\boldsymbol{x}))_h=\{r\mid\mu_{Y_i(\boldsymbol{x})}(r)>h\}$ と定められ，$\mathrm{cl}(Y_i(\boldsymbol{x}))_h$ はその閉包である．

必然性測度最適化モデル [2] に基づくと，問題 (1) は次式で定式化される．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & N_{Y_0(\boldsymbol{x})}([z^0,+\infty)) \\ \text{subject to} & N_{Y_i(\boldsymbol{x})}(C_i)\ge h^i,\ i=1,2,\ldots,m \\ & Q\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{p} \end{array} \tag{11}$$

ただし，$N_A(B) = \inf_r \max(1 - \mu_A(r), \mu_B(r))$ はファジィ集合 A の下でのファジィ集合 B の必然性測度である．定数 z^0 は意思決定者により与えられた目的関数の目標値である．$h^i \in (0,1]$, $i = 1,2,\ldots,m$ は意思決定者により定められる定数である．h^i が大きければ大きいほど，$\boldsymbol{x}$ が制約条件 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \lesssim g_i$ を満たす確実性が高くなる．

$[A]_h$ と $(A)_h$ をファジィ集合 A の h-レベル集合，強 h-レベル集合，すなわち，$[A]_h = \{r \mid \mu_A(r) \geq h\}$，$(A)_h = \{r \mid \mu_A(r) > h\}$ とすると，次式が成立する．

$$N_A(B) \geq h \Leftrightarrow (A)_{1-h} \subseteq [B]_h, \tag{12}$$

式 (12) より，問題 (11) は次のように変形できる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & h \\ \text{subject to} & \inf(Y_0(\boldsymbol{x}))_{1-h} \geq z^0 \\ & \sup(Y_i(\boldsymbol{x}))_{1-h^i} \leq \sup[C_i]_{h^i},\ i = 1,2,\ldots,m \\ & Q\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p} \end{array} \tag{13}$$

式 (10) より，この問題は次のように書き換えられる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & h \\ \text{subject to} & y_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) - L_i^{\#}(1-h)\gamma_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) \geq z^0 \\ & y_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) + L_i^{\#}(1-h^i)\gamma_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) \leq c_i(h^i),\ i = 1,2,\ldots,m \\ & Q\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p} \end{array} \tag{14}$$

ただし，$c_i(h^i) = \sup[C_i]_{h^i}$ と定める．

問題 (14) の最初の制約条件は次式と等価である．

$$\frac{y_0^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) - z^0}{\gamma_0^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})} \geq L_0^{\#}(1-h) \tag{15}$$

L は非増加な関数であり，h を最大化することは $L^{\#}(1-h)$ を最大化することと等価であるので，問題 (14) は次の問題に帰着する．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \dfrac{y_0^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) - z^0}{\gamma_0^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})} \\ \text{subject to} & y_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) + L_i^{\#}(1-h^i)\gamma_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) \leq c_i(h^i),\ i = 1,2,\ldots,m \\ & Q\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p} \end{array} \tag{16}$$

式 (5)–(8) を用いると，この問題は次のように書き換えられる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \dfrac{\displaystyle\sum_{j:k_{0j}(\boldsymbol{x})\geq 0} b_{0j}^{\mathrm{L}} k_{0j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j:k_{0j}(\boldsymbol{x})<0} b_{0j}^{\mathrm{R}} k_{0j}(\boldsymbol{x}) - z^0}{\displaystyle\sum_{j:k_{0j}(\boldsymbol{x})\geq 0} \beta_{0j}^{\mathrm{L}} k_{0j}(\boldsymbol{x}) - \sum_{j:k_{0j}(\boldsymbol{x})<0} \beta_{0j}^{\mathrm{R}} k_{0j}(\boldsymbol{x})} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})\geq 0} \bar{b}_{ij}^{\mathrm{R}}(1-h^i) k_{ij}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j:k_{ij}(\boldsymbol{x})<0} \bar{b}_{ij}^{\mathrm{L}}(1-h^i) k_{ij}(\boldsymbol{x}) \leq c_i(h^i) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m \\ & Q\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p} \end{array} \tag{17}$$

ただし，$\bar{b}_{ij}^{\mathrm{L}}(h) = b_{ij}^{\mathrm{L}} - \beta_{ij}^{\mathrm{L}} L^{\#}(h)$，$\bar{b}_{ij}^{\mathrm{R}}(h) = b_{ij}^{\mathrm{R}} - \beta_{ij}^{\mathrm{R}} L^{\#}(h)$ と定める．また，$\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{x}) = (k_{i1}(\boldsymbol{x}), k_{i2}(\boldsymbol{x}), \ldots, k_{in}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$, $i = 0,1,\ldots,m$ とおくと，$\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{x}) = {D_i^{-1}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $i = 0,1,\ldots,m$

と定められる．$\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^+ - \boldsymbol{y}_i^-$ and ${\boldsymbol{y}^+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^- = 0$ となる差異変数 $\boldsymbol{y}_i^+$, $\boldsymbol{y}_i^- \geq \boldsymbol{0}$ を用いて，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を消去すると，問題 (17) は次の問題に相補条件 ${\boldsymbol{y}_i^+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^- = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を加えた問題に変形できる．

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{L}} y_{0j}^+ - \sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{R}} y_{0j}^- - z^0}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{L}} y_{0j}^+ + \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{R}} y_{0j}^-} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}^{\mathrm{R}}(1-h^i) y_{ij}^+ - \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}^{\mathrm{L}}(1-h^i) y_{ij}^- \leq c_i(h^i),\ i = 1, 2, \ldots, m \\
& D_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_i^+ - \boldsymbol{y}_i^-) = D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_0^+ - \boldsymbol{y}_0^-),\ i = 1, 2, \ldots, m \\
& Q D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_0^+ - \boldsymbol{y}_0^-) \leq \boldsymbol{p} \\
& \boldsymbol{y}_i^+ \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_i^- \geq \boldsymbol{0},\ i = 0, 1, \ldots, m
\end{aligned}
\tag{18}
$$

次の定理は，問題 (18) の任意の最適解から相補条件 ${\boldsymbol{y}_i^+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^- = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を満たす最適解が求められることを示している．

定理 1． 問題 (17) の最適値が非負であるとする．このとき，問題 (18) の任意の最適解から相補条件 ${\boldsymbol{y}_i^+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^- = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を満たす最適解が得られる．

(証明) $\hat{\boldsymbol{y}}_i^+$, $\hat{\boldsymbol{y}}_i^-$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を問題 (18) の任意の最適解とする．$\bar{\boldsymbol{y}}_i^+ = (\bar{y}_{1i}^+, \bar{y}_{2i}^+, \ldots, \bar{y}_{in}^+)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}_i^- = (\bar{y}_{1i}^-, \bar{y}_{2i}^-, \ldots, \bar{y}_{in}^-)^{\mathrm{T}}$ を $\bar{y}_{ij}^+ = \max(0, \hat{y}_{ij}^+ - \hat{y}_{ij}^-)$, $\bar{y}_{ij}^- = \max(0, \hat{y}_{ij}^- - \hat{y}_{ij}^+)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ により定義する．このとき，$\bar{y}_{ij}^+ \leq \hat{y}_{ij}^+$, $\bar{y}_{ij}^- \leq \hat{y}_{ij}^-$, $\bar{b}_{ij}^{\mathrm{L}}(1-h^i) \leq \bar{b}_{ij}^{\mathrm{R}}(1-h^i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\hat{\boldsymbol{y}}_i^+ - \hat{\boldsymbol{y}}_i^- = \bar{\boldsymbol{y}}_i^+ - \bar{\boldsymbol{y}}_i^-$, $i = 0, 1, \ldots, n$ より，$\bar{\boldsymbol{y}}_i^+$, $\bar{\boldsymbol{y}}_i^-$, $i = 0, 1, \ldots, m$ が実行可能解であることが分かる．また，$b_0^{\mathrm{L}} \leq b_0^{\mathrm{R}}$, $\beta_{0j}^{\mathrm{L}} > 0$, $\beta_{0j}^{\mathrm{R}} > 0$ より，

$$
\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{L}} \hat{y}_{0j}^+ - \sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{R}} \hat{y}_{0j}^- - z^0}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{L}} \hat{y}_{0j}^+ + \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{R}} \hat{y}_{0j}^-} \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{L}} \bar{y}_{0j}^+ - \sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{R}} \bar{y}_{0j}^- - z^0}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{L}} \bar{y}_{0j}^+ + \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{R}} \bar{y}_{0j}^-}
$$

が成立する．したがって，$\bar{\boldsymbol{y}}_i^+$, $\bar{\boldsymbol{y}}_i^-$, $i = 0, 1, \ldots, m$ も最適解となり，相補条件 ${\bar{\boldsymbol{y}}_i^+}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}_i^- = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を満たしている． (証終)

定理 3 は，問題 (18) を解くことにより，必然性測度最適化問題 (11) の最適解が求められることを示している．問題 (18) の最適値が負であれば，問題 (11) の最適値は 0 となる．この場合，与えられた z^0 の設定値は適当ではなく，より小さい値に変更する必要がある．問題 (18) は線形分数計画問題であるので，Charnes と Cooper の変形法を適用して，次の線

形計画問題へ帰着させることができる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b^{\mathrm{L}}_{0j} v^{+}_{0j} - \sum_{j=1}^{n} b^{\mathrm{R}}_{0j} v^{-}_{0j} - z^0 t \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta^{\mathrm{L}}_{0j} v^{+}_{0j} + \sum_{j=1}^{n} \beta^{\mathrm{R}}_{0j} v^{-}_{0j} = 1 \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \bar{b}^{\mathrm{R}}_{ij}(1-h^i) v^{+}_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \bar{b}^{\mathrm{L}}_{ij}(1-h^i) v^{-}_{ij} \le c_i(h^i)t,\ i=1,2,\dots,m \\
& D_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_i^{+} - \boldsymbol{v}_i^{-}) = D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+} - \boldsymbol{v}_0^{-}),\ i=1,2,\dots,m \\
& QD_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+} - \boldsymbol{v}_0^{-}) \le \boldsymbol{p}t \\
& t \ge 0,\ \boldsymbol{v}_i^{+} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}_i^{-} \ge \boldsymbol{0},\ i=0,1,\dots,m
\end{array}
\tag{19}
$$

$\hat{\boldsymbol{v}}_i^{+}$, $\hat{\boldsymbol{v}}_i^{-}$, $i=0,1,\dots,m$, $\hat{t}$ を問題 (19) の最適解とすると，問題 (11) の最適解は次のように求められる.

$$
\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{D_0^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{v}}_i^{+} - \hat{\boldsymbol{v}}_i^{-})}{\hat{t}} \tag{20}
$$

3 求解アルゴリズム

問題 (19) は双対角形構造 [8] と呼ばれる特殊な構造を有している． したがって，Bender の分解法が適用でき，問題 (19) は次のアルゴリズムで解くことができる.

アルゴリズム

Step 1. $s=0$ と設定する. $\boldsymbol{x}^0$ を $Q\boldsymbol{x}^0 \le \boldsymbol{p}$ を満たす任意の解とする. このとき，問題 (19) の初期解は次式で得られる.

$$
\boldsymbol{y}_0 = D_0^{-1^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{x}^s,\ t^0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j:y_{0j}\ge 0} \beta^{\mathrm{L}}_{0j} y_{0j} - \sum_{j:y_{0j}<0} \beta^{\mathrm{R}}_{0j} y_{0j}}
$$

$$
v_{0j}^{+^0} = t^0 \max(0, y_{0j}),\ v_{0j}^{-^0} = t^0 \max(0, -y_{0j}),\ j=1,2,\dots,n,
$$

ただし，y_{0j}, $v_{0j}^{+^0}$, $v_{0j}^{-^0}$ は，それぞれ，$\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{v}_0^{+^0}$, $\boldsymbol{v}_0^{-^0}$ の第 j 成分である.

Step 2. 次を計算する.

$$
\boldsymbol{v}_i = D_i^{-1^{\mathrm{T}}} D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+^s} - \boldsymbol{v}_0^{-^s}),\ i=0,1,\dots,m
$$

$$
b_i = \sum_{j:v_{ij}\ge 0} \bar{b}^{\mathrm{R}}_{ij}(1-h^i)v_{ij} + \sum_{j:v_{ij}<0} \bar{b}^{\mathrm{L}}_{ij}(1-h^i)v_{ij},\ i=1,2,\dots,m
$$

ただし，v_{ij} は $\boldsymbol{v}_i$ の第 j 成分である.

Step 3. 次式が満たされれば，アルゴリズムを終了する.

$$
s>0 \text{ and } b_i \le c_i(h^i)t^s,\ i=1,2,\dots,m.
$$

この場合，問題 (11) の最適解は $\boldsymbol{v}_0^{+^s}$, $\boldsymbol{v}_0^{-^s}$ および t^s を用いて，式 (20) により求められる.

Step 4. $s = s+1$ と更新する．$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ に関する次の線形関数を生成する．

$$f_{is}(\boldsymbol{v}) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j:v_{ij}\geq 0}\bar{b}_{ij}^{\mathrm{R}}(1-h^i)d_{ilj}^{*} + \sum_{j:v_{ij}<0}\bar{b}_{ij}^{\mathrm{L}}(1-h^i)d_{ilj}^{*}\right)v_l,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m \tag{21}$$

Step 5. 次の線形計画問題を解く．

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{L}} v_{0j}^{+} - \sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{\mathrm{R}} v_{0j}^{-} - z^0 t \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{L}} v_{0j}^{+} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j}^{\mathrm{R}} v_{0j}^{-} = 1 \\
& f_{ij}(D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+} - \boldsymbol{v}_0^{-})) \leq c_i(h^i)t,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, s \\
& QD_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+} - \boldsymbol{v}_0^{-}) \leq \boldsymbol{p}t \\
& t \geq 0,\ \boldsymbol{v}_0^{+} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}_0^{-} \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{22}$$

この問題の最適解を $\boldsymbol{v}_0^{+s}$, $\boldsymbol{v}_0^{-s}$, t^s とする．問題 (22) の最適値が負ならば，アルゴリズムを終了する．この場合，z^0 をより小さい値に変更する必要がある．問題 (22) の最適値が非負であれば，Step 2 へ戻る．

4 数値例

一例として，次のパラメータをもつ問題 (1) を考える．

$$\begin{array}{l}
n=2,\ m=3,\ q=2,\ z^0=25,\ g_1=20,\ g_2=14,\ g_3=24,\ Q=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \\
D_0=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ D_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ D_3=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \\
B_{01}=(1,1,1,1)_{LL},\ B_{02}=(12,12,3,3)_{LL},\ B_{11}=(4,4,0.2,0.2)_{LL}, \\
B_{12}=(7,7,0.1,0.1)_{LL},\ B_{21}=(3,3,0.5,0.5)_{LL},\ B_{22}=(2,2,1,1)_{LL}, \\
B_{12}=(4,4,0.2,0.2)_{LL},\ B_{21}=(3,3,0.1,0.1)_{LL},\ L(r)=\max(1-r,0).
\end{array} \tag{23}$$

ファジィ制約のメンバシップ関数は次式で定められる．

$$\mu_{C_i}(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } r \leq g_i \\ 1 - \dfrac{r-g_i}{4}, & \text{if } g_i < r \leq g_i + 4 \\ 0, & \text{if } r > g_i + 4 \end{cases} \tag{24}$$

$h^i = 0.4$, $i = 1,2,3$ として，必然性測度最適化モデルを解こう．初期解を $(1,4)^{\mathrm{T}}$ としてアルゴリズムを適用すると，3 回の反復で終了し，次の最適解が求められる．

$$\hat{x} = D_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_0^{+2} - \boldsymbol{v}_0^{-2})/t^2 = (7.770, 3.330)^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

計算過程を表 2 に示す．

表 2: 数値例の計算過程

Step 1. $s=0$, $\boldsymbol{x}^0=(1,2)^{\mathrm{T}}$: $\boldsymbol{y}^0=(-1,1)^{\mathrm{T}}$, $t^0=1$, $\boldsymbol{v}_0^{+0}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_0^{-0}=(-1,0)^{\mathrm{T}}$

Step 2. $\boldsymbol{v}_1=(5,-2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2=(1.4,0.4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_3=(-3,7)^{\mathrm{T}}$, $b_1=6.72$, $b_2=5.66$, $b_3=9.78$.

Step 3. $s=0$. 継続する.

Step 4. $s=1$. $f_{11}(\boldsymbol{v})=1.52v_1+1.3v_2$, $f_{21}(\boldsymbol{v})=0.94v_1+1.18v_2$, $f_{31}(\boldsymbol{x})=0.82v_1+2.24v_2$

Step 5.

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & v_{01}^{+}+12v_{02}^{+}-v_{01}^{-}-12v_{02}^{-}-25t\\
\text{subject to}\quad & v_{01}^{+}+3v_{02}^{+}+v_{01}^{-}+3v_{02}^{-}=1\\
& 0.22v_{01}^{+}+6.94v_{02}^{+}-0.22v_{01}^{-}-6.94v_{02}^{-}\le 21.6t\\
& -0.24v_{01}^{+}+5.42v_{02}^{+}+0.24v_{01}^{-}-5.42v_{02}^{-}\le 15.6t\\
& -1.42v_{01}^{+}+8.36v_{02}^{+}+1.42v_{01}^{-}-8.36v_{02}^{-}\le 25.6t\\
& -v_{01}^{+}+v_{02}^{+}+v_{01}^{-}-v_{02}^{-}\le 0\\
& -2v_{01}^{+}+3v_{02}^{+}+2v_{01}^{-}-3v_{02}^{-}\le 0\\
& v_{01}^{+},v_{02}^{+},v_{01}^{-},v_{02}^{-},t\ge 0
\end{aligned}$$

$t^1=0.0748$, $\boldsymbol{v}_0^{+1}=(0.333,0.222)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_0^{-1}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

Step 2. $\boldsymbol{v}_1=(-1.667,1.222)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2=(0.533,-0.244)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_3=(0.444,0.111)^{\mathrm{T}}$, $b_1=2.162$, $b_2=1.418$, $b_3=1.504$

Step 3. $c_1(h^1)t^1=1.616<b_1$, $c_2(h^2)t^2=1.167<b_2$, $c_3(h^3)t^1=1.616>b_3$. 継続する.

Step 4. $s=2$. $f_{12}(\boldsymbol{v})=2.58v_1+0.7v_2$, $f_{22}(\boldsymbol{v})=1.42v_1+0.94v_2$ and $f_{32}(\boldsymbol{x})=1.18v_1+1.76v_2$

Step 5.

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & v_{01}^{+}+12v_{02}^{+}-v_{01}^{-}-12v_{02}^{-}-25t\\
\text{subject to}\quad & v_{01}^{+}+3v_{02}^{+}+v_{01}^{-}+3v_{02}^{-}=1\\
& 0.22v_{01}^{+}+6.94v_{02}^{+}-0.22v_{01}^{-}-6.94v_{02}^{-}\le 21.6t\\
& -0.24v_{01}^{+}+5.42v_{02}^{+}+0.24v_{01}^{-}-5.42v_{02}^{-}\le 15.6t\\
& -1.42v_{01}^{+}+8.36v_{02}^{+}+1.42v_{01}^{-}-8.36v_{02}^{-}\le 25.6t\\
& 1.78v_{01}^{+}+7.06v_{02}^{+}-1.78v_{01}^{-}-7.06v_{02}^{-}\le 21.6t\\
& 0.48v_{01}^{+}+5.66v_{02}^{+}-0.48v_{01}^{-}-5.66v_{02}^{-}\le 15.6t\\
& -0.58v_{01}^{+}+7.64v_{02}^{+}+0.58v_{01}^{-}-7.64v_{02}^{-}\le 25.6t\\
& -v_{01}^{+}+v_{02}^{+}+v_{01}^{-}-v_{02}^{-}\le 0\\
& -2v_{01}^{+}+3v_{02}^{+}+2v_{01}^{-}-3v_{02}^{-}\le 0\\
& v_{01}^{+},v_{02}^{+},v_{01}^{-},v_{02}^{-},t\ge 0
\end{aligned}$$

$t^2=0.100$, $\boldsymbol{v}_0^{+2}=(0.333,0.222)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_0^{-2}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

Step 2. $\boldsymbol{v}_1=(-1.667,1.222)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2=(0.533,-0.244)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_3=(0.444,0.111)^{\mathrm{T}}$, $b_1=2.162$, $b_2=1.418$, $b_3=1.504$

Step 3. $c_1(h^1)t^2=2.162>b_1$, $c_2(h^2)t^2=1.562>b_2$, $c_3(h^3)t^2=2.563>b_3$. 終了する.

5 おわりに

本研究では，L-L ファジィ数により定められる斜交ファジィベクトルをもつ線形計画問題の必然性測度最適化モデルが双対角形構造をもつ線形計画問題に帰着されることを示した．双対角形構造を利用した解法として，Bender の分解法に基づく求解アルゴリズムが提案された．このアルゴリズムは，一般の場合に提案された文献 [1] のアルゴリズムより計算コストが少ない．

今後の課題として，目的関数と制約条件を同等に扱う対称モデルに関する同様な研究，可能性測度を用いる場合の帰着問題および解法の研究などが挙げられる．

最後に，本研究の一部は，科学研究費基盤研究 (B) No. 17310098 の援助を受けたことを記し，謝意を表する．

参考文献

[1] Inuiguchi, M. (2004), Necessity Optimization in Linear Programming Problems with Interactive Fuzzy Numbers, *Proc. 7th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, pp.9–14.

[2] Inuiguchi, M. and Ramík, J. (2000), Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.111, No.1, pp.3–28.

[3] Inuiguchi, M., Ramík, J. and Tanino, T. (2003), Oblique Fuzzy Vectors and Their Use in Possibilistic Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.137, No.1, pp.123–150.

[4] Inuiguchi, M. and Sakawa, M. (1995), A Possibilistic Linear Program is Equivalent to a Stochastic Linear Program in a Special Case, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.76 pp.309–318.

[5] Inuiguchi, M. and Tanino, T. (2000), Portfolio Selection under Independent Possibilistic Information, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.115, No.1, pp.83–92.

[6] Inuiguchi, M. and Tanino, T. (2002), Possibilistic Linear Programming with Fuzzy If-Then Rule Coefficients", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.1, No.1, pp.65–91.

[7] Inuiguchi, M. and Tanino, T. (2004), Fuzzy Linear Programming with Interactive Uncertain Parameters, *Reliable Computing*, Vol.10, No.5, pp.357–367.

[8] Lasdon, L.S. (1970), *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York.

[9] Rommelfanger, H. and Kresztfalvi, T. (1991), Multicriteria Fuzzy Optimization Based on Yager's Parameterized T-norm, *Foundation of Computing and Decision Sciences*, Vol.16, No.2, pp.99-110.