

制約集合の正則性に対する定量的解析

東京工業大学 数理・計算科学専攻 関口 良行 (Yoshiyuki SEKIGUCHI)
 Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology
 e-mail: Yoshiyuki.Sekiguchi@is.titech.ac.jp

1 はじめに

1.1 方程式, 制約集合の正則性とその尺度

非線形方程式の解の存在性, 安定性は様々な形で研究されて来た重要な問題である. X, Y を Banach 空間, S を X から Y への十分滑らかな写像として, 以下のような非線形方程式を考えよう.

$$S(x) = y. \tag{1}$$

今, \bar{x} を $y = \bar{y}$ に対する解とする. パラメータ y を \bar{y} から少し動かしたとき, 上記の方程式は解を持つか, またその解は \bar{x} からどの位のところに存在するのか? このような問題に対する一つの答えが Lyusternik の定理から得られる. 後に改良, 洗練され定式化しなおされたが, その定理が言っているのは, もし $\nabla S(\bar{x})$ が全射ならば, ある $K \geq 0$ が存在して (\bar{x}, \bar{y}) に十分近い (x, y) に対して

$$d(x, S^{-1}(y)) \leq K \|y - S(x)\| \tag{2}$$

が成り立つと言うものである. この結論の性質が満たされるとき, S は (\bar{x}, \bar{y}) の周りで正則であると言われる. この不等式はある点から方程式 (1) の解集合までの距離が写像の値とパラメータとの差で一様に抑えられることを表わす. これは数学的に方程式 (1) の安定性を表わしているのが見てとれるが, それだけではなく現象として, その方程式を制約集合とする最適化問題に対するラグランジェ乗数の存在をこの正則な点で保証する. (2) で特に, $x = \bar{x}$ とすると

$$d(\bar{x}, S^{-1}(y)) \leq K \|y - S(\bar{x})\| = K \|y - \bar{y}\|$$

を得る. 方程式 (1) の解集合はパラメータが変わる事によって変化する. 上式より K の値はパラメータの変化が \bar{x} の近くの解集合の変動にどのくらいの影響を与えるかを表していることがわかるだろう. 簡単な例でこの K がどのような値になるか見てみよう.

$X = Y = R^n$, S を X から Y への連続フレッシュ微分可能な写像とする. このとき $\nabla S(\bar{x})$ が全単射ならば, 連続微分可能な逆写像 T が $\bar{y} = S(\bar{x})$ の回りで存在する. すると任意の $\epsilon > 0$ に対して (\bar{x}, \bar{y}) に十分近い (x, y) をとると

$$d(x, S^{-1}(y)) \leq \|x - T(y)\| = \|T(S(x)) - T(y)\| \leq (\|\nabla T(\bar{y})\| + \epsilon) \|S(x) - y\|$$

が成り立つ。したがって S は (\bar{x}, \bar{y}) で正則であり、逆写像の微分のノルム $\|\nabla T(\bar{y})\| = \|\nabla S(\bar{x})^{-1}\|$ が不等式 (1) に現れる K の下限と一致する事が推測できるだろう。

最適化問題の制約集合として次のようなものにもこの正則性の概念を考えることができる。 $X = C[0, 1]^n$, $Y = C[0, 1]^m$ とし、十分滑らかな関数 $g: [0, 1] \times R^n \rightarrow R^m$ を用いて

$$\mathcal{D}_y = \{x \in X : g(t, x(t)) \leq y(t), t \in [0, 1]\}$$

と定義する。これは最適化問題で良く現れる制約集合である [10]。ここで $g(x)(t) = g(t, x(t))$, $K = \{y \in Y : y(t) \leq 0, t \in [0, 1]\}$ を用いて、 X から Y への集合値写像 Ω を $\Omega(x) = g(x) - K$ で定義すると、

$$\mathcal{D}_y = \{x \in X : y \in \Omega(x)\} = \Omega^{-1}(y)$$

と書ける。そこで、集合値写像に対しても正則性を定義しよう。

定義. S を X から Y への集合値写像とし $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph} S$ とする。この時ある $K \geq 0$ が存在して (\bar{x}, \bar{y}) に十分近い (x, y) に対して

$$d(x, S^{-1}(y)) \leq Kd(y, S(x))$$

が成り立つとき、 S が (\bar{x}, \bar{y}) の周りで正則 (*Metrically regular*) であると言う。上式の K の下限を正則性のモジュラスと呼び、 $\text{reg} S(\bar{x}|\bar{y})$ で表わす。

もし Ω が $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph} \Omega$ で正則ならば、ある $K > 0$ が存在して (\bar{x}, \bar{y}) に十分近い (x, y) に対して

$$d(x, \mathcal{D}_y) \leq Kd(y, S(x))$$

が成り立つ。この不等式は方程式の場合と同様に制約集合の安定性を表わし、 K は安定性の「良さ」を表わしていると言えるだろう。同様にこのときラグランジュ乗数がこの点で存在する。また正則性のモジュラスは制約付き最適化問題を制約のないものに変換する時にも使われる。集合値写像 S と L -Lipschitz 関数 f に対して次のような問題を考える。

$$\mathcal{P} \quad \text{minimize } f(x) \quad \text{subject to } x \in S(\bar{y}).$$

このとき \bar{x} を \mathcal{P} の局所解で、 S が (\bar{x}, \bar{y}) の回りで正則とする。すると任意の $K > L \cdot \text{reg} S(\bar{x}|\bar{y})$ に対して、 \bar{x} は

$$\mathcal{P}' \quad \text{minimize } f(x) + Kd(x, S(\bar{y}))$$

の局所解になる。

1.2 正則写像から非正則写像までの距離

このように正則性のモジュラスは制約集合の安定性の「良さ」を表わすものであるが、それだけではない。\$X, Y\$ が有限次元のとき [4] で示されたように、正則性のモジュラスの逆数は与えられた正則写像から非正則な写像の集合までの、「ある種の距離」と等しい。この距離は正則半径と呼ばれる。

定理 1.2.1 ([4]). \$X, Y\$ を Banach 空間, \$S\$ を \$X\$ から \$Y\$ への集合値写像でグラフが閉なものとする。このとき任意の \$(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}S\$ に対して

$$\text{rad}S(\bar{x}|\bar{y}) := \inf_{g \in \mathcal{L}(X, Y)} \{ \|g\| : S + g \text{ が } (\bar{x}, \bar{y} + g(\bar{x})) \text{ で正則でない} \} \geq \frac{1}{\text{reg}S(\bar{x}|\bar{y})}$$

が成り立つ。さらに \$X, Y\$ が有限次元のときは

$$\text{rad}S(\bar{x}|\bar{y}) = \frac{1}{\text{reg}S(\bar{x}|\bar{y})} \quad (3)$$

となる。(\$\text{rad}S(\bar{x}|\bar{y})\$ は正則半径と呼ばれる。)

\$X, Y\$ が有限次元でない時は正則半径が正則性のモジュラスの逆数と等しくない例があげられている [8]。また、線形な制約集合に対して適当な集合値写像を定めることによって、その写像の正則半径が内点法の計算量を決定する条件数 (distance to infeasibility) に等しいことが分っている。これは逆関数定理, 開写像定理の理論的研究から生まれた正則半径, または正則性のモジュラスという概念が全く異なる観点から生まれた内点法の条件数に一致すると言う点で興味深い。

本稿では次元が有限とは限らない時, 上で定義した \$\Omega\$ のような制約集合から生成される集合値写像の正則性のモジュラス, 正則半径を評価する。これは次節で説明するように閉凸グラフを持つ集合値写像を考えれば十分である。

有限次元の場合, 正則性のモジュラスの評価, 定理 1.2.1 の等式 (3) の成立には以下の式の成立が重要な役割を果たす:

$$\text{reg}S(\bar{x}|\bar{y}) = \text{reg}DS(\bar{x}, \bar{y})(0|0). \quad (4)$$

ここで, \$DS(\bar{x}, \bar{y})\$ は集合値写像 \$S\$ の \$(\bar{x}, \bar{y})\$ における derivative で一般のノルム空間において,

$$DS(\bar{x}, \bar{y})(y) = \{x \in X : (x, \bar{y} + y) \in T_{\text{gph}S}((\bar{x}, \bar{y}))\}, y \in Y$$

で定義される。ここで集合 \$C \subset X, \bar{x} \in C\$ に対して \$T_C(\bar{x})\$ は接錘と呼ばれ,

$$u \in T_C(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists x_n \in C, \tau_n \searrow 0 \text{ s.t. } \frac{x_n - \bar{x}}{\tau_n} \rightarrow u$$

で定義される。しかし、無限次元では式 (4) は閉凸グラフを持つ集合値写像でも一般には成り立たない。

例. $X = Y = L^2[0, 1]$, $K = \{x \in X : x(t) \leq 0, \text{ a.e}\}$ とし, 閉凸グラフをもつ集合値写像 S を

$$S(x) = x - K$$

で定義する. いま $\bar{x} \equiv -1$ と定義すると, $0 \in S(\bar{x})$ が成り立つ. すると $\text{reg}S(\bar{x}|0) = 1$ だが $\text{reg}DS(\bar{x}, 0)(0|0) = 0$.

我々は正則性のモジュラスと逆数の関係にある rate of surjection の計算を通じて, 正則性のモジュラスを評価した. これを用いて半無限計画問題に良く現れる制約集合から作られる集合値写像は式 (4) を満たすと言うことを示した. また, これよりこの写像の正則半径は正則性のモジュラスの逆数と等しいと言うことが示される. 我々は式 (4) に注目することにより, 正則半径を求める一つの枠組みを提供している.

2 正則性のモジュラスの評価

X, Y を Banach 空間, F を X から Y への連続フレッシュ微分可能な写像, $C \subset X$ を閉凸集合, $K \subset Y$ を閉凸錘とする. すると

$$D = \{x \in C : F(x) \in K\}$$

は最適化問題の制約集合を表わすのに使われる. X から Y への集合値写像 Ω を

$$\Omega(x) = \begin{cases} F(x) - K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases} \quad (5)$$

で定義する. すると前節で述べたように Ω の正則性は D の安定性を表わす.

2.1 Robinson の定理の再考

正則性の研究は Banach の開写像定理までさかのぼれるが, 重要なターニングポイントとなった定理に次のようなものがある.

定理 2.1.1 (Robinson[11]). X, Y を Banach 空間, Ω を (5) で定められた集合値写像, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\Omega$ とする. $(x, \xi) \in X \times R$ に対しノルムを $\|(h, \xi)\| = \max\{\|h\|, |\xi|\}$ で定め, $L = \text{cl}\{(h, \xi) \in X \times R : \xi > 0, \bar{x} + \xi^{-1}h \in C\}$ を用いて, 以下のような $X \times R$ から Y への集合値写像 Ω_L を定める:

$$\Omega_L(h, \xi) = \begin{cases} F(\bar{x})\xi + \nabla F(\bar{x})h - K, & (h, \xi) \in L; \\ \emptyset, & (h, \xi) \notin L. \end{cases}$$

もし

$$0 \in \text{int}[F(\bar{x}) + \nabla F(\bar{x})(C - x) - K]$$

が成り立つならば, $\|\Omega_L^{-1}\|^- = \sup_{y \in B_Y} \inf\{\|(h, \xi)\| \in X \times R : y \in \Omega_L(h, \xi)\} < \infty$ で任意の $\epsilon > 0$ に対してある (\bar{x}, \bar{y}) の近傍 U が存在して, $(x, y) \in U$ に対して

$$d(x, \Omega^{-1}(y)) \leq (\|\Omega_L^{-1}\|^- + \epsilon)d(y, \Omega(x))$$

が成り立つ.

これはある内点条件が満たされれば, Ω は正則になり正則性のモジュラスが

$$\text{reg}\Omega(\bar{x}|\bar{y}) \leq \|\Omega_L^{-1}\|^-$$

を満たすと言うことである. この左辺は Ω_L のある種の双対写像を考えることによつて, 以下の様に陽的に表わせる.

命題 2.1.2. 定理 2.1.1 と同じ仮定下で

$$\|\Omega_L^{-1}\|^- = \left[\inf\{\|k^* + \nabla F(\bar{x})^* y^*\| + |\eta^* + y^* F(\bar{x})| : \|y^*\| = 1, y^* \in K^\circ, (k^*, \eta^*) \in L^\circ\} \right]^{-1}.$$

一方, 有限次元では

$$\text{reg}\Omega(\bar{x}|0) = \left[\inf\{\|\nabla F(\bar{x})^* y^* + x^*\| : \|y^*\| = 1, y^* \in N_K(F(\bar{x})), x^* \in N_C(\bar{x})\} \right]^{-1}$$

となることが [12] で示されているので, Robinson の評価は正則性のモジュラスの真の値とは一致しないが近い値であったと言うことが分る. また定理 2.1.1 では (h, ξ) に対して max ノルムを用いているが, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\|(h, \xi)\| = \max\{\|h\|, \epsilon|\xi|\}$ と定義しても定理の主張は成り立つ. この考察より以下の定理を得る.

定理 2.1.3. 定理 2.1.1 と同じ仮定下で

$$\text{reg}\Omega(\bar{x}|\bar{y}) = \left[\liminf_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \|k^* + \nabla F(\bar{x})^* y^*\| + \frac{1}{\epsilon} |\eta^* + y^* F(\bar{x})| : \|y^*\| = 1, y^* \in K^\circ, (k^*, \eta^*) \in L^\circ \right\} \right]^{-1}.$$

等式の証明には次節で定義される rate of surjection の計算を使っている.

2.2 閉凸グラフを持つ集合値写像に対するモジュラス評価

制約集合から作られる集合値写像を解析するには, 閉凸グラフをもつ集合値写像を解析すれば十分である. (5) で定義された Ω の正則性を考えるときには次の定理より, Ω の一次近似写像によつて代用できる. $\bar{x} \in X$ と一価写像 g に対して

$$\text{lip}g(\bar{x}) = \liminf_{x, x' \rightarrow \bar{x}} \frac{\|g(x) - g(x')\|}{\|x - x'\|}$$

とする.

定理 2.2.1 ([4]). S を X から Y への閉グラフを持つ集合値写像, g を X から Y への写像で $\bar{x} \in X$ に対して $\text{lip}g(\bar{x}) = 0$ を満たすものとする

$$\text{reg}S(\bar{x}|\bar{y}) = \text{reg}(S + g)(\bar{x}|\bar{y} + g(\bar{x}))$$

が成り立つ.

いま,

$$f(x) = F(\bar{x}) + \nabla F(\bar{x})(x - \bar{x}) - F(x)$$

とすると, $\text{lip}f(\bar{x}) = 0$ で

$$\Omega(x) + f(x) = \begin{cases} F(\bar{x}) + \nabla F(\bar{x})(x - \bar{x}) - K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

となる. さらに $f(\bar{x}) = 0$ なので

$$\text{reg}\Omega(\bar{x}|\bar{y}) = \text{reg}(\Omega + f)(\bar{x}|\bar{y})$$

が成り立つ. ここで, $\Omega + f$ は閉凸グラフを持つことが分るだろう. よってこのような制約集合から作られる集合値写像の正則性に関する解析は閉凸グラフをもつ集合値写像の正則性の解析をすれば十分である.

解析は rate of surjection を使って行なう [6]. X から Y への集合値写像を S とすると $(x, y) \in \text{gph}S$, $\lambda > 0$ に対して

$$\text{Sur}S(x|y)(\lambda) = \sup\{r \geq 0 : y + rB_Y \subset S(x + \lambda B_X)\}$$

とし,

$$\text{sur}S(\bar{x}|\bar{y}) = \liminf_{\substack{(x,y) \in \text{gph}S(\bar{x},\bar{y}) \\ \lambda \searrow 0}} \frac{1}{\lambda} \text{Sur}S(x|y)(\lambda).$$

と定義された非負の数を rate of surjection と呼ぶ. これは

$$\text{reg}S(\bar{x}|\bar{y}) = [\text{sur}S(\bar{x}|\bar{y})]^{-1}$$

という関係を満たすことが分る. 正則性のモジュラスは定義式から間接的に定義されるのに対して, rate of surjection は直接式で書ける分計算し易い. これを用いると以下のような定理を得る.

定理 2.2.2. S を X から Y への集合値像で閉凸グラフを持つものとする. すると任意の (\bar{x}, \bar{y}) に対して,

$$\begin{aligned} \text{sur}S(\bar{x}|\bar{y}) &= \liminf_{(x,y) \xrightarrow{\text{gph}S}(\bar{x},\bar{y})} DS(x,y)(0|0) \\ &= \liminf_{(x,y) \xrightarrow{\text{gph}S}(\bar{x},\bar{y})} \inf\{\|x^*\| : x^* \in D^*S(x,y)(y^*), \|y^*\| = 1\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

「 \leq 」を示すのにグラフの凸性より得られる $\text{Sur}S(x, y)(\lambda)$ の性質が使われ, 「 \geq 」を示すにはエークランドの変分原理が用いられる [6]. $(x, y) \in \text{gph}S$ に対して $D^*S(x, y)$ は S の (x, y) における coderivative と呼ばれ

$$D^*S(x, y)(y^*) = \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in N_{\text{gph}S}((x, y))\}, y^* \in Y^*$$

で定義される Y^* から X^* への集合値写像である. ここで $C \subset X$, $\hat{x} \in C$ に対して $N_C(\hat{x})$ は法線錘であり,

$$N_C(\hat{x}) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \hat{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$$

で定義される [13].

2.3 半無限計画に現れる制約集合の正則半径

この評価式を用いて半無限計画問題の制約式の正則性を解析する. 半無限計画問題については [5] を見よ. 設定として以下のものを考える.

$$X = R^n, Y = C([0, 1], R),$$

$f : [0, 1] \times X \rightarrow R$, 第二変数に対してフレッシュエ微分可能で, f, f_x が連続;

$$C \subset X: \text{閉凸集合}, K = \{y \in Y : y(t) \leq 0, t \in [0, 1]\},$$

$$T(x) = \begin{cases} f(\cdot, x) - K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

とする. いま T は R^n から $C([0, 1], R)$ への集合値写像である. 上記の考察よりこの写像の正則性の考察には以下のような写像を考えれば十分だと言うことが分る.

$$a \in C([0, 1], R^n),$$

$$L(x) = \begin{cases} a(\cdot)^T x - K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C, \end{cases}$$

$$\bar{y} \in L(\bar{x}).$$

定義域の有限次元性より, Carathéodory の定理を用いると以下の補題を得る.

補題 2.3.1. ND を $[0, 1]$ 上の単調非減少関数の集合とする. すると

$$\left\{ \int_0^1 a(t) d\alpha(t) : \alpha \in \text{ND}, \alpha(1) - \alpha(0) = 1 \right\} = \text{conv}\{a(t) : t \in [0, 1]\}$$

が成り立つ. したがってこの集合はコンパクトである.

この補題より coderivative による Y^* の単位円の像を, 有限次元の元を使って書き表わせる.

命題 2.3.2. $y_0 \in L(x_0)$ に対して,

$$\begin{aligned} D^*L(x_0, y_0)(S_{Y^*}) &= \{x^* \in R^n : y^* \in Y^*, x^* \in D^*L(x_0, y_0)(y^*), \|y^*\| = 1\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a(t_k) \in R^n : t_k \in [0, 1], \right. \\ &\quad \left. \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1, \lambda_k (a(t_k)^T x_0 - y_0(t_k)) = 0 \right\} + N_C(x_0). \end{aligned}$$

すると rate of surjection の評価式の極限を外せる.

定理 2.3.3. 任意の $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}L$ に対して,

$$\text{sur}L(\bar{x}|\bar{y}) = \text{sur}DL(\bar{x}, \bar{y})(0|0)$$

が成り立つ.

したがって, これを用いてもとの集合値写像 T の正則性のモジュラスと正則半径を求めることができる.

系 2.3.4. $X = R^n, Y = C([0, 1], R), f : [0, 1] \times X \rightarrow R$ を第二変数に対してフレッシュエ微分可能な関数で f, f_x が連続, $C \subset X$ を閉凸集合, $K = \{y \in Y : y(t) \leq 0, t \in [0, 1]\}$ とする. X から Y への集合値写像 T を

$$T(x) = \begin{cases} f(\cdot, x) - K, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

で定義する. すると, 任意の $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}T$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{reg}T(\bar{x}|\bar{y}) &= \text{reg}DT(\bar{x}, \bar{y})(0|0) \\ &= \left[\inf \left\{ \left\| \int_0^1 f_x(t, \bar{x}) dy^*(t) + z \right\| : \|y^*\| = 1, y^* \in N_K(f(\cdot, \bar{x})), z \in N_C(\bar{x}) \right\} \right]^{-1} \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\inf_{g \in C([0, 1], R^n)} \{ \|g\| : T + g \text{ が } (\bar{x}, \bar{y} + g(\bar{x})) \text{ で正則でない} \} = \frac{1}{\text{reg}T(\bar{x}|\bar{y})} \quad (6)$$

を得る.

3 結論

閉凸グラフを持つ集合値写像は最適化理論のなかでも良く現れる基礎的な写像である。しかし、凸解析で標準的に使われる法線錘を用いても正則性のモジュラスは一般には等式評価できない。しかし本稿では定義域側が有限次元の場合、ある広いクラス of 集合値写像に対して法線錘による等式評価ができることを示した。これによって、正則半径を求めることにも成功した。[3]において定理 2.3.4 の式 6 は変数制約がないモデルで示している。しかし、そこでの議論は制約式の形に強く依存したものになっているので、その証明方法では変数制約を加えるのは難しい。我々の方法はまず閉凸グラフを持つ集合値写像の正則性のモジュラスを coderivative の極限を用いた形で一般に評価している。そのうち、個々の写像に対して極限が取れるのかどうかを調べることで、正則半径が正則性のモジュラスの逆数に等しいかどうか判定する。このような取扱いで変数制約が自然な形で加えられたというのは、我々の方法のひとつの優位性を表わしていると言えるだろう。

参考文献

- [1] J. M. Borwein, *Stability and regularity of inequality systems*, J. Optim. Theory Appl. **48** (1986), 9–52.
- [2] J. M. Borwein, *Norm duality for convex processes and applications*, J. Optim. Theory Appl. **48** (1986), 53–64.
- [3] M.J. Cánovas, A.L. Dontchev, M.A. López, J. Parra, *Metric regularity of semi-infinite constraint systems*, Math. Programming. Ser. B, published online, 14 July, 2005.
- [4] A. L. Dontchev, A. S. Lewis and R. T. Rockafellar, *The radius of metric regularity*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2002), 493–517.
- [5] M. A. Goberna, M. A. López, *Linear Semi-infinite Optimization*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (1998).
- [6] A. D. Ioffe, *On the local surjection property*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 565–592.
- [7] A. D. Ioffe, *Metric regularity and subdifferential calculus*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 501–558.
- [8] A. D. Ioffe, *On stability estimates for the regularity property of maps*, Topological methods, variational methods and their applications (Taiyuan, 2002), World Sci. Publishing (2003), 133–142.

- [9] A. D. Ioffe, *personal communication*
- [10] 川崎 英文, 極値問題, 横浜図書 (2004).
- [11] S. M. Robinson, *Stability theory for systems of inequalities, Part II: Differential nonlinear systems*, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 497–513.
- [12] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [13] 高橋 渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書 (2000).