

The existence of zeros of monotone operators  
concerning optimization problems  
(最適化問題に関連する単調作用素の零点の存在について)

Shin-ya Matsushita (松下 慎也)\*, Wataru Takahashi (高橋 渉)†

Department of Mathematical and Computing Sciences,  
Tokyo Institute of Technology  
(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

## 1 はじめに

$E$  を Banach 空間、 $f, g_i (i = 1, \dots, m) : E \rightarrow \mathbb{R}$  を連続凸関数とする。ここで、次の凸計画問題を考える。

$$\text{目的関数: } f(x) \rightarrow \text{最小} \quad (1.1)$$

$$\text{制約条件: } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

凸計画問題 (1.1) に対して、

$$C = \{x \in E : g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m)\}$$

を実行可能集合、その元を実行可能解と呼ぶ。実行可能集合の中で目的関数が最小となるような元を凸計画問題 (1.1) の最適解という。

凸計画問題 (1.1) に対して Martinez-Svaiter [7] は、approximate gradient projection condition という条件が、最適解を得るための十分条件になることを示している。また、Yokoyama-Shiraishi [14] は、Slater の制約想定を仮定せず、新たな条件を仮定して  $\epsilon$ -近似解を得るための Karush-Kuhn-Tucker タイプの条件を示している。最適性条件に関する参考文献としては、福島 [2], 川崎 [6], 田中 [13] が挙げられる。

一方、凸最小化問題に対する解を求める近似法として近接点法が知られている。 $H$  を Hilbert 空間、 $f : H \rightarrow (-\infty, \infty]$  を proper で下半連続な凸関数、 $r_n > 0$  とする。近接点法とは初期点  $x_0 = x \in H$  をとり、

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ f(y) + \frac{1}{2r_n} \|y - x_n\|^2 \right\} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

\*e-mail: shinya2@is.titech.ac.jp

†e-mail: wataru@is.titech.ac.jp

による点列  $\{x_n\}$  で  $f(u) = \operatorname{argmin}_{x \in H} f(x)$  となる元  $u$  を求める方法である。このとき、 $x \in H$  に対して、

$$\partial f(x) = \{z \in H : f(y) \geq \langle y - x, z \rangle + f(x) \quad (\forall y \in H)\}$$

を対応させる  $H$  から  $H$  への集合値写像  $\partial f$  を  $f$  の劣微分という。  $\partial f$  は単調作用素になることが知られている。これは、任意の  $(x, x^*), (y, y^*) \in G(\partial f)$  に対して、

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。ただし、 $G(\partial f)$  とは、写像  $\partial f$  のグラフで  $G(\partial f) = \{(x, x^*) : x^* \in \partial f(x)\}$  である。さらに、 $\partial f$  は極大単調作用素である。すなわち、 $\partial f$  のグラフを真に含むような単調作用素は存在しない。このとき、 $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$  であることは、 $0 \in \partial f(u)$  であることと同値になる。このことから、凸最小化問題は、極大単調作用素  $T$  に対して、

$$0 \in Tu \tag{1.2}$$

を満たす点  $u$  を求める問題に帰着できる。(1.2) を満たす元  $u \in H$  を、 $T$  の零点といい、 $T$  の零点の集合を  $T^{-1}0$  と表す。

近接点法はこれまで多くの研究者によって研究されてきた [3, 4, 5, 10, 11]。1976 年、Rockafellar [10] は近接点法を用いて極大単調作用素に対する次の存在定理を証明した。

**定理 1.1** (Rockafellar [10])  $H$  を Hilbert 空間、 $T : H \rightarrow 2^H$  を極大単調作用素とする。点列  $\{x_n\}$  を次のように定義する。 $x_0 = x \in H$  とし、

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする。ここで、 $J_{r_n} = (I + r_n T)^{-1}$ 、 $\{r_n\} \subset (0, \infty)$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす。このとき、 $T$  が零点を持つための必要十分条件は、点列  $\{x_n\}$  が有界となることである。

本研究では、Banach 空間における極大単調作用素の零点の存在について研究する。最近、上村-高阪-高橋 [5] によって Banach 空間における近接点法が考案されており、その近接点法を用いて零点の存在定理を証明する。その応用として、凸計画問題の最適解が存在するための必要十分条件を議論する。

## 2 準備

$E$  を Banach 空間とし、 $E^*$  をその共役空間とする。 $x \in E$  における  $x^* \in E^*$  の値を  $\langle x, x^* \rangle$  と表す。 $E$  が狭義凸であるとは、 $\|x\| = \|y\| = 1$  で  $x \neq y$  な

らば  $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$  が成り立つことをいう。また、 $E$  のノルムが滑らかであるとは、任意の  $x, y \in U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在することをいう。 $E$  の元  $x$  に対して、 $E$  から  $2^{E^*}$  への集合値写像  $J$  が

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義されるが、この  $J$  を  $E$  上の双対写像という。

集合値写像  $T : E \rightarrow 2^{E^*}$  が単調であるとは、任意の  $(x, x^*), (y, y^*) \in G(T)$  に対して、

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。また、 $T$  が極大単調であるとは、 $T$  のグラフを真に含むような単調作用素は存在しない。

$E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間、 $T : E \rightarrow 2^{E^*}$  を極大単調作用素、 $r > 0$  とする。任意の  $x \in E$  に対して、

$$Q_r x = \{z \in E : Jx \in Jz + rTz\} \quad (2.1)$$

とすると、 $Q_r$  は  $E$  から  $D(T)$  への一価写像となる ([5, 11])。この  $Q_r$  を  $T$  のリゾルベントという。 $Q_r$  の定義より  $Q_r = (J + rT)^{-1}J$  であり、任意の  $x \in E$  に対して

$$\frac{Jx - JQ_r x}{r} \in TQ_r x \quad (2.2)$$

が成り立つ。関数  $\phi : E \times E \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in E)$$

によって定義する。関数  $\phi$  は次の性質を持っている。

**補助定理 2.1**  $E$  を滑らかな Banach 空間とする。任意の  $a, b, c \in E$  に対して

$$2\langle c - a, Jb - Ja \rangle = \phi(c, a) + \phi(a, b) - \phi(c, b)$$

が成り立つ。

### 3 存在定理

この節では、極大単調作用素の零点が存在するための必要十分条件について議論する。

定理 3.1  $E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし、 $T: E \rightarrow 2^{E^*}$  を極大単調作用素とする。点列  $\{x_n\}$  を次のように定義する。 $x_0 = x \in E$  とし、

$$x_{n+1} = Q_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする。ここで、 $\{r_n\} \subset (0, \infty)$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす。このとき、 $T$  が零点を持つための必要十分条件は、点列  $\{x_n\}$  が有界となることである。

証明 必要条件であることは、上村-高阪-高橋 [5] によって証明されている。十分条件であることを示す。 $(u, v) \in G(T)$  とする。補助定理 2.1 において  $a = x_{k+1}$ 、 $b = x_k$ 、 $c = u$  とおくと

$$\begin{aligned} 2r_k \langle u - x_{k+1}, (Jx_k - Jx_{k+1})/r_k \rangle &= 2 \langle u - x_{k+1}, Jx_k - Jx_{k+1} \rangle \\ &= \phi(u, x_{k+1}) + \phi(x_{k+1}, x_k) - \phi(u, x_k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

(2.2) と  $T$  の単調性より

$$\langle x_{k+1} - u, (Jx_k - Jx_{k+1})/r_k - v \rangle \geq 0.$$

これと (3.1) から

$$2r_k \langle u - x_{k+1}, v \rangle \geq \phi(u, x_{k+1}) + \phi(x_{k+1}, x_k) - \phi(u, x_k).$$

よって

$$\begin{aligned} 2r_k \langle x_{k+1} - u, v \rangle &\leq \phi(u, x_k) - \phi(u, x_{k+1}) - \phi(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq \phi(u, x_k) - \phi(u, x_{k+1}) \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n r_k \langle x_{k+1} - u, v \rangle &\leq \phi(u, x_0) - \phi(u, x_1) \\ &\quad + \phi(u, x_1) - \phi(u, x_2) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \phi(u, x_{n-1}) - \phi(u, x_n) \\ &\quad + \phi(u, x_n) - \phi(u, x_{n+1}) \\ &= \phi(u, x_0) - \phi(u, x_{n+1}) \end{aligned}$$

を得る。両辺を  $2 \sum_{k=0}^n r_k$  で割ると、

$$\begin{aligned} \langle z_n - u, v \rangle &\leq \frac{\phi(u, x_0) - \phi(u, x_{n+1})}{2 \sum_{k=0}^n r_k} \\ &\leq \frac{\phi(u, x_0)}{2 \sum_{k=0}^n r_k}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし、 $z_n = \frac{\sum_{k=0}^n r_k x_{k+1}}{\sum_{k=0}^n r_k}$  である。点列  $\{x_n\}$  は有界であるので  $\{z_n\}$  も有界となり、 $z_{n_i} \rightarrow \hat{z} (i \rightarrow \infty)$  となる  $\{z_{n_i}\} \subset \{z_n\}$  と  $\hat{z} \in E$  が存在する。一方、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  より  $\sum_{k=0}^n r_k \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$  となるので (3.2) より、

$$\langle z_{n_i} - u, v \rangle \leq \frac{\phi(u, x_0)}{2 \sum_{k=0}^{n_i} r_k}$$

において  $i \rightarrow \infty$  とすると

$$\langle \hat{z} - u, v \rangle \leq 0.$$

ここで、 $(u, v)$  は任意の  $G(T)$  の元であったので  $T$  の極大性より  $(\hat{z}, 0) \in G(T)$ 。よって

$$0 \in T\hat{z}$$

を得る。 ■

## 4 応用

この節では、定理 3.1 を用いて凸計画問題における最適解の存在について議論する。その前に定義を与えておく。 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  が凸関数であるとは、任意の  $x, y \in E$  と  $\lambda \in (0, 1)$  に対して、

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

が成り立つことをいう。さらに、 $f$  が  $x \in E$  において Gâteaux 微分可能であるとは、ある  $x^* \in E^*$  が存在して、任意の  $y \in E$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} = \langle y, x^* \rangle \quad (4.1)$$

が成り立つときをいう。ここで、 $f$  が Gâteaux 微分可能であるような元  $x \in E$  に対して、(4.1) を満たすような元  $x^*$  を対応させるような写像を  $\nabla f$  と表し、 $\nabla f$  を  $f$  の勾配と呼ぶことにする。 $C$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とする。 $z \in C$  における  $C$  の normal cone  $N_C(z)$  を

$$N_C(z) = \{z^* \in E^* : \langle z - u, z^* \rangle \geq 0 (\forall u \in C)\}$$

で定義する。

**定理 4.1**  $E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間、 $f, g_i : E \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)$  は連続凸関数、 $C = \{x \in E : g_i(x) \leq 0 (i = 1, 2, \dots, m)\}$  とし、 $f$  は  $C$  で Gâteaux 微分可能とする。 $r_n > 0, \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  とし、 $\{x_n\} \subset E$  を以下の条件を満たす点列とする。 $x_0 = x \in E$  とし、

$$x_{n+1} = y_n (n = 0, 1, \dots),$$

ただし、 $\{y_n\}$  は任意の  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して  $y_n \in C$  かつ

$$\langle u - y_n, Jy_n - Jx_n + r_n \nabla f(y_n) \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in C)$$

を満たす点列とする。このとき、凸計画問題 (1.1) の最適解が存在するための必要十分条件は、点列  $\{x_n\}$  が有界となることである。

**証明**  $g_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は連続凸関数より、 $C$  は  $E$  の閉凸部分集合となる。 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C$  で Gâteaux 微分可能な凸関数より  $\nabla f$  は  $C$  でヘミ連続で単調となる [8]。これより  $\nabla f + N_C : E \rightarrow 2^{E^*}$  は極大単調作用素となる [9]。このとき  $y_n = Q_{r_n} x_n$  であることを示す。ただし、 $Q_{r_n}$  は  $\nabla f + N_C$  のリゾルベントである。 $N_C$  の定義より

$$y_n \in C \text{ かつ } \langle u - y_n, Jy_n - Jx_n + r_n \nabla f(y_n) \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in C)$$

であることと

$$y_n \in C \text{ かつ } N_C(y_n) \ni -Jy_n + Jx_n - r_n \nabla f(y_n)$$

は同値である。 $r_n > 0$  より  $N_C(y_n) = r_n N_C(y_n)$  となり、

$$y_n \in C \text{ かつ } Jx_n \in Jy_n + r_n (\nabla f + N_C)(y_n)$$

が成り立つから  $y_n = Q_{r_n} x_n$  である。

次に

$$\{z \in E : z \text{ は凸計画問題 (1.1) の最適解}\} = (\nabla f + N_C)^{-1} 0$$

を示す。 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C$  上で連続より

$$z \in C \text{ かつ } f(x) \geq f(z) \quad (\forall x \in C)$$

であるための必要十分条件は、

$$z \in C \text{ かつ } \nabla f(z) \cap (-N_C(z)) \neq \emptyset$$

となることである [1, 11]。ここで

$$x^* = \nabla f(z), x^* \in -N_C(z)$$

となる  $x^* \in E^*$  が存在することと

$$0 \in (\nabla f + N_C)(z)$$

は同値であり、その結果

$$\{z \in E : z \text{ は凸計画問題 (1.1) の最適解}\} = (\nabla f + N_C)^{-1} 0$$

が成り立つ。

以上より、定理 3.1 を用いて結論を得ることができる。 ■

## 参考文献

- [1] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, Techniques of variational analysis, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [2] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [3] O. Güler, Ergodic convergence in proximal point algorithms with Bregman functions, in Advances in optimization and approximation, 155-165, Nonconvex Optim. Appl., 1, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [4] S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces, J. Approx. Theory **106** (2000), 226-240.
- [5] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417-429.
- [6] 川崎英文, 極値問題, 横浜図書, 2004.
- [7] J. M. Martinez and B. F. Svaiter, A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 117-133.
- [8] D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mappings of monotone type*, Noordhoff, Leiden, 1978.
- [9] R. T. Rockafellar, On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75-88.
- [10] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877-898.
- [11] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.
- [12] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.
- [13] 田中謙輔, 凸解析と最適化理論, 牧野書店, 1994.
- [14] K. Yokoyama and S. Shiraishi, An  $\epsilon$ -KKT condition and its illustrative examples (in Japanese), RIMS Kokyuroku, **1409** (2005), 219-223.