数理解析研究所講究録 1461 巻 2005 年 62-69

最短路問題から導かれる共役集合ゲームに対するシャプレー値

The Shapley value for a conjugate-set game induced from the shortest path problem

淵上武暁、九州大学大学院数理学府 (Takeaki, FUCHIKAMI, Kyushu Univ.)
川崎英文、九州大学大学院数理学研究院 (Hidefumi KAWASAKI, Kyushu Univ.)

Abstract: 古典的変分問題において、共役点が存在すればそれを基に解を改善することができる。有限次元空間における極値問題に対しても共役点を定義することができるが [5]、そこでは変数の協力という側面が一段と鮮明に浮かび上がる。このことに着目すると極値問題から協力ゲームを定義でき、それを共役集合ゲームとよぶ。協力ゲームに対して解明すべきことが 2 つある。ひとつはプレイヤーがどのように協力 (提携) するかであり、他のひとつは協力した結果得られた利得をどのように配分するかである。ゲームが優加法的な場合、前者は全員提携という自明な解を導くが、その場合でも後者に対してはシャプレー値、コア等のさまざまな解が提唱されている。本稿ではシャプレー値を取り扱う。**一般に、シャプレー値を計算しようとすると、プレイヤーの部分集合全部を数え上げなければならず、計算が困難な問題として知られている。本稿の主な目的は、楕円体面上の最短路問題から導かれる共役集合ゲームに対してシャプレー値の陽な公式を与えることである。**

1. Motivation

共役点とは、変分問題

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\int_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ \text{subject to} & x(0) = A,\ x(T) = B \end{array}$$

に対して局所最適解を保障するために Jacobi により導入された大域的概念であり (Gelfand and Fomin[3]) 、今日では最適制御問題のような複雑な極値問題に対しても研究が進められている。

川崎は共役点の古典的研究を行う過程で、$\mathbb{R}^n$ における極値問題

$$(P_0) \qquad \text{Minimize} \quad f(x), \quad x \in R^n$$

に対する共役点理論の着想を得た [4][5] (概要は川崎 [7][8])。結論はコロンブスの卵のように単純である。x を n 変数関数 $f(x)$ の停留解とする。即ち、

$$f'(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \left(0,\ \ldots,\ 0\right).$$

この x が極小解であることを保障するには Hesse 行列 $f''(x)$ が正定値になることを示せばよい。よく知られた Sylvester の判定法によれば、n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ について、$A_k := (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ とおくとき

$$A > 0 \iff \text{首座小行列式 } |A_k| > 0 \quad 1 \le k \le n.$$

が成立する。また、$y_0 := 1$, $y_k := |A_k|$ は次の漸化式を満たす.

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\rho \in S(i+1,k)} \varepsilon(\rho) a_{i+1\rho(i+1)} a_{i+2\rho(i+2)} \cdots a_{k\rho(k)} y_i, \quad \forall k,$$

ただし、$\varepsilon(\rho)$ は置換 ρ の符号を表し、$S(i+1,k)$ は $\{i+1,\ldots,k\}$ 上の置換で、どの $\ell > i$ に対しても $\{\ell+1,\ldots,k\}$ 上では閉じていないもの全体を表わす。この漸化式を A の **Jacobi 方程式**とよび、$y_1 > 0,\ \ldots,\ y_{k-1} > 0,\ y_k \leq (<) 0$ を満たす番号 k があれば、k は 1 に **(狭義) 共役**であるという。このとき明らかに、対称行列 A が正定値であるための必要十分条件は共役点が存在しないことであり、k が 1 に狭義共役ならば、変数 $\{x_1,\ldots,x_k\}$ を適切に動かすことにより停留解を改善することができる。

一方、変分問題と違って、極値問題 (P_0) では共役点を定義するのに番号 1 から始める理由は何も無い。番号 (あるいは変数) の部分集合を考える方が自然である。つまり、停留解 x において、変数 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ の部分集合 $X_I := \{x_i\}_{i\in I}$ だけでは解を改善できないときでも、より大きな部分集合 $X_I \subset Y$ の変数を同時に動かすことにより解を改善できることがある。もしそのような集合 Y が存在すれば、それを **狭義共役集合**とよぶ。より正確には、Hesse 行列 $A = (a_{ij})$ について、ある $I \subset \{1,\ldots,n\}$ が存在して $A_I := (a_{ij})_{i,j\in I}$ が非正 (負) 主行列式をもつとき、I を **(狭義) 共役集合**とよぶ。包含関係に関して極小な (狭義) 共役集合を極小 (狭義) 共役集合とよぶ [9][10]。

Theorem 1. ([6]) $2m+1$ 重対角行列 $A = (a_{ij})$ について、極小 *(狭義)* 共役集合の元は高々 m しかジャンプしない。特に A が三重対角行列のとき、極小 *(狭義)* 共役集合は連続した番号からなる。

古典的変分問題の時間変数を離散化して得られる極値問題において、その Hesse 行列は三重対角行列になる。曲面上の最短路問題 (測地線、図 1) を離散化して得られる折れ線最短路問題はその典型的な例である (図 2)。特に、楕円面上の折れ線最短路問題の Hesse 行列は定係数三重対角行列 ($a_{ii} \equiv a,\ a_{ii\pm1} \equiv b$) になり、共役点を陽に計算することができる ([6])。この意味で、**楕円面上の折れ線最短路問題は共役点理論において最も基本的である**と言える。

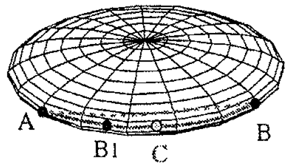


FIGURE 1. 楕円面上の最短路問題

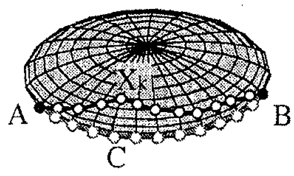


FIGURE 2. 楕円面上の折れ線最短路問題

一方、楕円面上の折れ線最短路問題において、k 個の節点を同時に動かすとより短い経路が見つかるとしよう。ここでは仮に $k=5$ としておく (図 3)。図 4、図 5 のような提携では短い経路を見つけることはできない。図 6 が良い提携である。

このとき、**各プレイヤーの貢献度を調べたい。そのために協力ゲームを定義し、シャプレー値を計算する。**

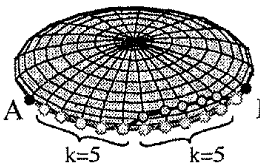


FIGURE 3. 連続した k 人が協力することにより、短い経路が見つかる。

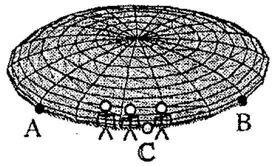


FIGURE 4. 全部で 5 人必要だ。

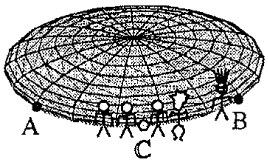


FIGURE 5. この 5 人では駄目だ。

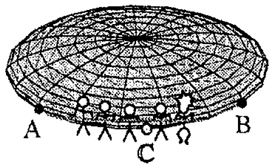


FIGURE 6. 今度はうまくいった。

FIGURE 7. お礼を下さい。

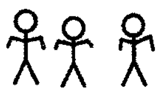


FIGURE 8. 君は端の方で少し動いただけだから。

FIGURE 9. 訴えてやる！

2. 共役集合ゲームとシャプレー値

$N := \{1, \ldots, n\}$: Player の集合
$1 \leq k \leq n$: 成功する為に必要な人数
$[j, j+k-1] := \{j, j+1, \ldots, j+k-1\}$: 長さ k の区間とよぶ。
$S \subset N$: **提携**とよぶ。
$v(S) :=$ S に含まれる互いに疎な長さ k の区間の最大数
(**特性関数**：提携 S が手にする利益)

これが最も基本的な共役集合ゲームである。この協力ゲームは**優加法性**を満たす。

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \quad \text{if } S \cap T = \phi.$$

一般の協力ゲームに対する Shapley 値は次式で定義される。

$$\phi_i = \sum_{i \in S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \{v(S) - v(S - \{i\})\},$$

ただし、$s := \#S$. このとき、$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = v(N)$ が成立する。

Lemma 1. **(Shapley 値の対称性)** 左から i 番目のプレイヤーと右から i 番目のプレイヤーの *Shapley* 値は等しい。

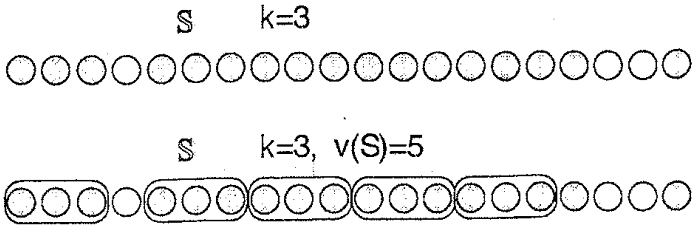


FIGURE 10. 特性関数 $v(S)$

一方、Π を N 上の置換全体、$\boldsymbol{S_{\pi,i}}$ を置換 π の順番でプレイヤーが並ぶとき i および i の前にいるプレイヤーの集合とするとき、シャプレー値は次のように表される。

$$\phi_i = \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!} \{v(S_{\pi,i}) - v(S_{\pi,i} - \{i\})\}.$$

Definition 1. $W_S := \{i \mid v(S) - v(S - \{i\}) = 1\}$ の元を S のピボットとよぶ。

さらに、ピボットを用いるとシャプレー値は次のようにも表される。

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \#\{\pi \mid i \text{ is a pivot of } S_{\pi,i}\}.$$

シャプレー値については、例えば Aumann and Hart[1] を参照せよ。

3. シャプレー値の計算

Definition 2. プレイヤー i とそれを含む集合（提携）$S \subset N$ に対して, i を含み S に含まれる最大の区間を $\boldsymbol{I(i;S)} \subset \boldsymbol{S}$ で表す。さらに、i を保ったまま、$I(i;S)$ の両端から長さ k の区間をできるだけたくさん取り除いた残りを $\boldsymbol{Ker(i;S)}$ と書く。

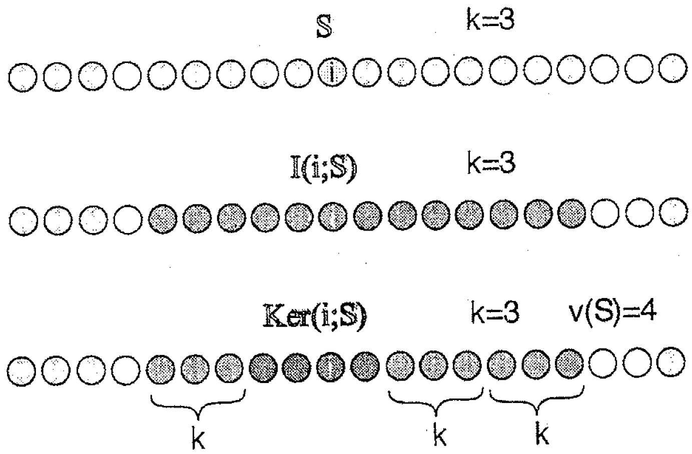


FIGURE 11. 上から順に S, $I(i;S)$, $Ker(i;S)$

Theorem 2. 次の条件は同値である。

(i) i は S のピボット
(ii) i は $I(i;S)$ のピボット

(iii) i は $Ker(i;S)$ のピボット
(iv) $\#Ker(i;S) \geq k$

先ず、プレイヤー1の Shapley 値 ϕ_1 を計算するために、$i=1$ が S のピボットかどうかを判定する。(図12)

$$1 \text{ is a pivot of } S \;\Leftrightarrow\; \#Ker(1;S) \geq k \;\Leftrightarrow\; Ker(1;S) = [1,k]$$

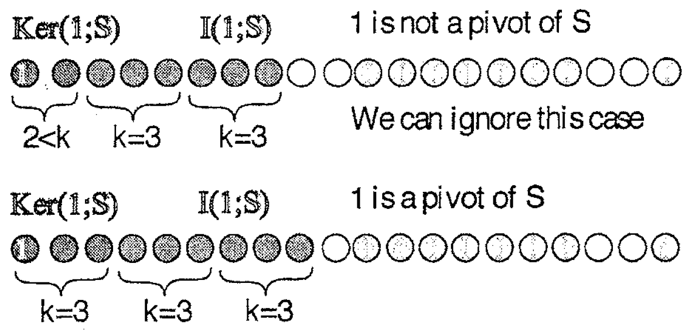


FIGURE 12. ピボットの判定

次に、$Ker(1;S) = [1,k]$ から $I(1;S)$ を再生すると(図13)、

$$I(1;S) = [1,k],\ [1,2k],\ \ldots\ [1,pk]$$

となる。ただし、$n = pk + r$.

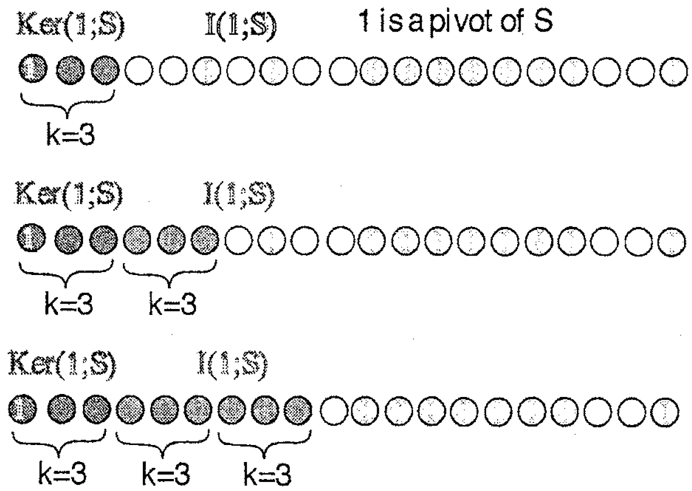


FIGURE 13. $I(1;S)$ の再生

さらに、$S_{\pi,1}$ を用いて $I(1;S)$ から S を再生する(図14)。

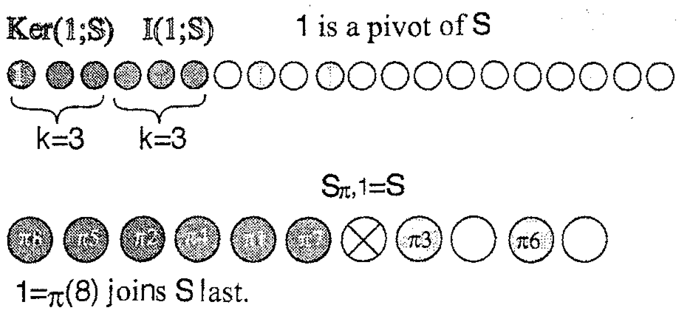


FIGURE 14. $S_{\pi,1}$ を用いて $I(1;S)$ から S を再生する。

Theorem 3. （プレイヤー1のシャプレー値）

$$\phi_1 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{mk(mk+1)} + \frac{1}{pk} & \mathit{if}\ r = 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{mk(mk+1)} & \mathit{if}\ r \neq 0, \end{cases}$$

ただし、$n = pk + r$ $(0 \leq r \leq k-1)$.

次に、プレイヤー i のシャプレー値 ϕ_i が満たす漸化式を求める。

Case 1: $n - k + 1 \leq i \leq k - 1$,
Case 2: $1 \leq i \leq \min\{n-k,\ k-1\}$,
Case 3: $k \leq i \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

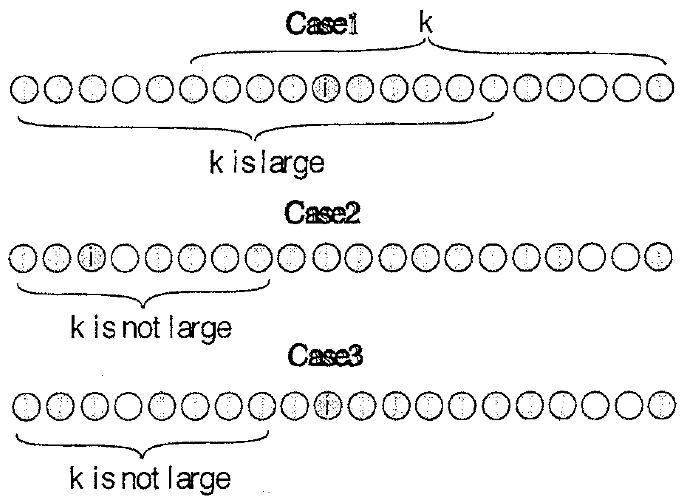


FIGURE 15. 3つの場合わけ

Lemma 2. $\phi_{i+1} = \phi_i + \delta_i^+ - \delta_i^-$. ただし

$$\delta_i^+ := \#\{\pi | i \notin W_{S_{\pi,i+1}},\ i+1 \in W_{S_{\pi,i+1}}\}/n!$$

$$\delta_i^- := \#\{\pi | i \in W_{S_{\pi,i}},\ i+1 \notin W_{S_{\pi,i}}\}/n!.$$

Theorem 4. （ϕ_i **の漸化式: Case 1**） $n-k+1 \le i \le k-1$ のとき、$\delta_i^+ = \delta_i^- = 0$. 故に、$\phi_{n-k+1} = \phi_{n-k+2} = \cdots = \phi_{k-1}$.

この定理を証明するには、i が S のピボットのとき、

$$Ker(i;S) = \left\{ \begin{array}{llll} [1,k], & [1,k+1], & \ldots & [1,n], \\ & [2,k+1], & \ldots & [2,n], \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & [n-k+1,n] \end{array} \right\}$$

となることを示し、プレイヤー1のシャプレー値を計算したときと同様に、$K(i;S)$ から S を再生すればよい。

Theorem 5. （ϕ_i **の漸化式: Case 2**） $1 \le i \le \min\{n-k,\ k-1\}$ のとき

$$\delta_i^+ = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{mk(mk+1)} & 1 \le i \le r-1, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{mk(mk+1)} + \frac{1}{pk} & i = r, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{mk(mk+1)} & r+1 \le i \le k-1, \end{cases}$$

$$\delta_i^- = 0,$$

ただし、$n = pk + r$ $(0 \le r \le k-1)$. 従って、$\phi_i \le \phi_{i+1}$.

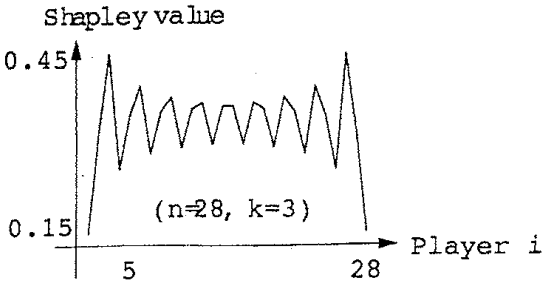
Theorem 6. （ϕ_i **の漸化式: Case 3**） $k \le i \le [\frac{n-1}{2}]$ のとき

$$\delta_i^+ = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{p-q} \frac{1}{mk(mk+1)} & 0 \le s \le r-1, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p-q-1} \frac{1}{mk(mk+1)} + \frac{1}{(p-q)k} & s = r, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p-q-1} \frac{1}{mk(mk+1)} & r+1 \le s \le k-1, \end{cases}$$

$$\delta_i^- = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{q-1} \frac{1}{mk(mk+1)} + \frac{1}{qk} & s = 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{q} \frac{1}{mk(mk+1)} & s \ne 0, \end{cases}$$

ただし、q と j は次式で定義される.

$$i = qk + s \quad (q \ge 1,\ 0 \le s \le k-1).$$



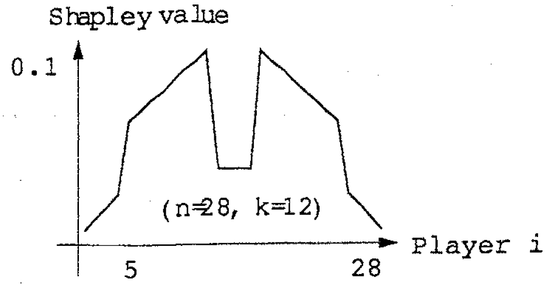


FIGURE 16. $n =$ プレイヤー数, $k =$ 成功に必要な人数

REFERENCES

[1] Aumann, R. J., and Hart, S., Editors, *Handbook of game theory with Economic Applications Vol. 1*, Elsevier, Amsterdam, (1992).

[2] Fuchikami, T. and Kawasaki, H. An explicit formula of the Shapley value for a cooperative game induced from the conjugate point, submitted.

[3] Gelfand, I. M., and Fomin, S. V., *Calculus of variations.* Prentice Hall, (1963).

[4] Kawasaki, H., *Conjugate points for a nonlinear programming problem with constraints*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 1, (2000) 87–293.

[5] Kawasaki, H., *A conjugate points theory for a nonlinear programming problem*, SIAM Journal Control and Optimization 40, (2001) 54–63.

[6] Kawasaki, H., *Analysis of conjugate points for constant tridiagonal Hesse matrices of a class of extremal problems*, Optimization Methods and Software 18, (2003) 197–205.

[7] 川崎英文、最適化における共役点理論概要、OR 学会第 50 回シンポジウム論文集「OR と数学」, (2003).

[8] 川崎英文、極値問題、横浜図書, (2004).

[9] Kawasaki H., A game-theoretic aspect of conjugate sets for a nonlinear programming problem, Proceedings of the third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, (2004) 159–168.

[10] Kawasaki H., Conjugate-set game for a nonlinear programming problem, in *Game theory and applications 10*, eds. L.A. Petrosjan and V.V. Mazalov, Nova Science Publishers, New York, USA, (2005) 87–95.