数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 21-34

丹原ファンクター係数の多項式環
Polynomial Rings with coefficients in Tambara Functors

吉田知行 (北大理)
Tomoyuki YOSHIDA (Hokkaido Univ)

1 有限 G-集合

以下 G を有限群とする．G-集合 X とは，群 G が作用するような集合のことである．$\mathrm{Map}_G(X,Y)$ でふたつの G-集合の間の G-写像の集合を表す．とくに次の全単射がある：

$$\mathrm{Map}_G(G/H,X)\cong X^H;\ \lambda\longleftrightarrow\lambda(H).$$

ここで $X^H:=\{x\in X\mid hx=x\ (\forall h\in H)\}$ は H-固定点集合．G-集合と G-写像のカテゴリーを $\mathbf{Set}^G$ で表す．とくに，有限 G-集合のなす充満部分カテゴリーを $\mathbf{set}^G$ で表す．$\mathbf{set}^G$ は直和 $X+Y$，直積 $X\times Y$ を持つ．有限 G-集合 X,Y に対し，X から Y への写像全体の集合 Y^X も有限 G-集合 (作用 ${}^g\lambda$ は ${}^g\lambda(x):=g\lambda(g^{-1}x)$ で定義する)．ファンクター $X\times(-),\ (-)^X:\mathbf{set}^G\longrightarrow\mathbf{set}^G$ は随伴の関係にある：

$$(-)\times X\dashv(-)^X,\quad \text{i.e.}\quad \mathrm{Map}_G(A\times X,Y)\cong\mathrm{Map}_G(A,Y^X).$$

左随伴は余極限 (直和など) を保ち，右随伴は極限 (直積など) を保つので，分配法則と指数法則を得る：

$$(A+B)\times X\cong A\times X+B\times X,\ (A\times B)^X\cong A^X\times A^Y.$$

G-写像 $f:X\longrightarrow Z$ と $g:Y\longrightarrow Z$ のファイバー積 (または pullback) も G-集合である：

$$X\times_Z Y:=\{(x,y)\mid f(x)=g(y)\}.$$

ふつうの数学が集合の理論，離散数学が有限集合の理論なら，群作用を伴う離散数学は G-集合の理論，すなわち $\mathbf{set}^G$ の理論であろう．また加群の理論に相当するのは G-加群であろう．

2　自然数・整数・行列

群作用を考えない理論 (古典理論) における自然数の集合 $\boldsymbol{N} := \{1, 2, \cdots\}$ に相当するものを，群作用を伴う数学 (同変理論という) でも作りたい．考えとしてはふたつ (内部的定義と外部的定義) ある．

ひとつは，有名な Peano の公理系で，カテゴリーの言葉で書くと，写像の列 $1 \xrightarrow{o} \boldsymbol{N} \xrightarrow{s} \boldsymbol{N}$ を，図式 $1 \longrightarrow X \longrightarrow X$ のなすカテゴリーにおける始対象であるとして定義する．このとき $\boldsymbol{N}$ が自然数の集合になる．しかし，$\mathbf{Set}^G$ で同じことをしても，自明な群作用を持つ $\boldsymbol{N}$ が得られるだけである．

Dedekind によるもうひとつの定義は，$\boldsymbol{N}$ を有限集合の同型類の集合 $\mathbf{set}/\cong$ とするものである．同変理論では，$\mathbf{set}^G/\cong$ が $\boldsymbol{N}$ に相当する．また整数環に相当する環は，その Grothendieck 環 $\boldsymbol{B}(G) := \mathrm{Gro}(\mathbf{set}^G/\cong)$ で，**Burnside 環**とよばれる．以下では，Dedekind 式に，行列，加群，環，可換環，多項式，ベキ級数の外部的定義を考える．

行列の外部的定義はスパンである．すなわち古典論の場合，$X \times Y$ 型の $\boldsymbol{N}$-行列 (a_{xy}) と (Y から X への) スパン $[X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} Y]$ が対応している：

$$a_{xy} = |l^{-1}(x) \cap r^{-1}(y)|,\ x \in X, y \in Y.$$
$$A = \coprod_{x,y} A_{xy},\ |A_{xy}| = a_{xy}.$$

行列の積に対応するスパンの合成は，ファイバー積で定義される：

$$[X \longleftarrow A \longrightarrow Y] \circ [Y \longleftarrow B \longrightarrow Z] := [X \longleftarrow A \times_Y B \longrightarrow Y].$$

結局，有限集合と $\boldsymbol{N}$-行列のなすカテゴリーは，有限集合のスパンのカテゴリー $\mathbf{Sp}(\mathbf{set})$ に同値である．

これにならって，同変理論における $X \times Y$-型行列は，G-写像の対 $[X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} Y]$ で定義すればよい．有限 G-集合とスパンは biproduct を持つカテゴリー $\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G)$ をなす．半加群は，直積を保つファンクター $\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G) \longrightarrow \mathbf{Set}$ として定義される．

同変理論で $\boldsymbol{Z}$-行列に相当するのは，ふたつのスパンの形式的差，すなわち $\mathrm{Gro}(\mathbf{set}^G/X\times Y)$ (コンマカテゴリー $\mathbf{set}^G/X\times Y$ (対象は $X\times Y$ への G-写像) の Grothendieck 環) の元である．これからスパンのカテゴリーの加法化 $\mathbf{Sp}^+(\mathbf{set}^G)$ が得られる．

3 同変理論における加群—Mackery ファンクター

スパンの言葉を使うなら，古典論における加法的半群 M の概念は，直積を保つファンクター $\boldsymbol{M}:\mathbf{Sp}(\mathbf{set})^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Set}$ として表される．実際 M があれば，ファンクター $\boldsymbol{M}$ が $\boldsymbol{M}(X):=M^X=\mathrm{Map}(X,M)$,

$$\begin{array}{ccccc}[X\xleftarrow{l}A\xrightarrow{r}Y]\longmapsto(M^X & \longrightarrow & M^Y) & & \\ (m_x) & \longmapsto & (n_y), & n_y:=\displaystyle\sum_{a\in r^{-1}(y)}m_{l(a)} & \end{array}$$

によって得られる．逆にファンクター $\boldsymbol{M}$ があれば，$M:=\boldsymbol{M}(\mathbf{1})$ はアーベル半群になる．0 元は $\boldsymbol{M}(\emptyset)=\mathbf{1}\longrightarrow\boldsymbol{M}(\mathbf{1})=M$ の像であり，加法は $M\times M=\boldsymbol{M}(\mathbf{1})\times\boldsymbol{M}(\mathbf{1})\cong\boldsymbol{M}(\mathbf{2})\longrightarrow\boldsymbol{M}(\mathbf{1})=M$ である．

加群の概念との対応からすると，同変理論における「加群」としては，直和を保つファンクター $\mathbf{Sp}^+(\mathbf{set}^G)^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Set}$，あるいは同じことだが，アーベル群のカテゴリーへの加法的ファンクター $\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G)\longrightarrow\mathbf{Ab}$ を採用するのが自然であろう．この「加群」の概念は，Mackey ファンクターと同値である．

一般に $\mathcal{E}$ を有限直和 (とくに始対象 $\emptyset$ と $X+Y$) と pull-back を持つカテゴリー とする．簡単のため $\boldsymbol{k}$ 加群のカテゴリー $\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ への Mackey ファンクターを考える．$(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{M}_*):\mathcal{E}\longrightarrow\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ を，反変および共変ファンクターの対で，対象上一致するものとする．$\boldsymbol{M}^*(X)=\boldsymbol{M}_*(X)$ を単に $\boldsymbol{M}(X)$ と書く．また $f:X\longrightarrow Y$ に対し，$f^*:=\boldsymbol{M}^*(f):\boldsymbol{M}^*(Y)\longrightarrow\boldsymbol{M}^*(X)$, $f_*:=\boldsymbol{M}_*(f):\boldsymbol{M}(X)\longrightarrow\boldsymbol{M}^*(Y)$ と書く．このとき $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{M}^*,\boldsymbol{M}_*):\mathcal{E}\longrightarrow\mathbf{Set}$ が Mackey **ファンクター**であるとは，次のふたつの公理が成り立つことをいう：

(M1) $\boldsymbol{M}^*$ により，$\boldsymbol{M}(\emptyset)=\mathbf{1},\boldsymbol{M}(X+Y)\cong\boldsymbol{M}(X)\times\boldsymbol{M}(Y)$.

$$\text{(M2)}\qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \quad\Longrightarrow\quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{M}(W) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{C}"] & \boldsymbol{M}(X) \\ \boldsymbol{M}(Y) \arrow[r, "g_*"] \arrow[u, "q^*"] & \boldsymbol{M}(Z) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

(ここで P.B. は pullback 図式を，C は可換図式を意味する).

(注意) Mackey ファンクターの各成分 $\boldsymbol{M}(X)$ はアーベル半群の構造を持つ:

$$+ : \boldsymbol{M}(X)\times\boldsymbol{M}(X)\cong\boldsymbol{M}(X+X)\xrightarrow{\nabla_*}\boldsymbol{M}(X),\ \mathbf{1}=\boldsymbol{M}(\emptyset)\longrightarrow\boldsymbol{M}(X).$$

さらに f^*, f_* はこの和を保ち，直和図式 $X \xleftarrow{i} X+Y \xrightarrow{j} Y$ から誘導される

$$\boldsymbol{M}(X)\underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}}\boldsymbol{M}(X+Y)\underset{j_*}{\overset{j^*}{\leftrightarrows}}\boldsymbol{M}(Y)$$

は ($\mathcal{S}$ の) 可換モノイドの biproduct 図式である．したがって，行き先 $\mathcal{S}$ ははじめから半加法的カテゴリーで biporduct を持つとしてよい．

$\mathcal{E}=\mathbf{set}^G$ (有限 G-集合のカテゴリー) とする．この場合，(M1) により，Mackey ファンクター $\boldsymbol{M}$ は部分群 $H\le G$ での値 $\boldsymbol{M}(G/H)$ で決まる．誤解がなければ，$\boldsymbol{M}(G/H)$ を $\boldsymbol{M}(H)$ と書く．$H\le K\le G$ と $g\in G$ に対し，自然な G-写像 $xH\longmapsto xK$ と $xH\longmapsto xgH^g$ (ここで $H^g:=g^{-1}Hg$) は

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\ &:\ \boldsymbol{M}(K)\longrightarrow\boldsymbol{M}(H);\beta\longmapsto\beta\downarrow_H \\ \mathrm{cor}\ &:\ \boldsymbol{M}(H)\longrightarrow\boldsymbol{M}(K);\alpha\longmapsto\alpha\uparrow^K \\ \mathrm{cor}\ &:\ \boldsymbol{M}(H)\longrightarrow\boldsymbol{M}(H^g);\alpha\longmapsto\alpha^g \end{aligned}$$

を誘導する．

$$\beta\downarrow_H\uparrow^K=(K:H)\beta\quad(\forall H\le K\le G,\ \beta\in\boldsymbol{M}(K))$$

のとき，$\boldsymbol{M}$ を Hecke ファンクター (またはコホモロジー的 Mackey ファンクター) という ([Yo 83a]).

例．(1) V を $\boldsymbol{k}G$-加群とする．このとき $X\longmapsto \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{k}G}(kX,M)$，または $H(\le G)\longmapsto H^n(G,V)$ は Hecke ファンクターになる．G-写像 $f : X\longrightarrow Y$ に対し，$f:\boldsymbol{k}X\longrightarrow\boldsymbol{k}Y$ とその転置 $f':\boldsymbol{k}Y\longrightarrow\boldsymbol{k}X$ があるので，それぞれから f^* と f_* が誘導される．$H\le K$ のとき

$H^n(H,V) \longrightarrow H^n(K,V)$ は transfer 写像，$H^n(K,V) \longrightarrow H^n(H,V)$ は制限写像である．

(2) G-集合 X に対し，X 上の $\boldsymbol{C}G$ 加群の Grothendieck 環を $\boldsymbol{R}(X)$ とする．ここで X 上の $\boldsymbol{C}G$ 加群とは，X をカテゴリーと見た (対象は X の元，射 $x \longrightarrow y$ は $x = gy$ を満たす G の元 g，合成は G における積) ときのファンクター $X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_k$ のことである．とくに $\boldsymbol{M}(G/H)$ は指標環 $\boldsymbol{R}(H)$ に同形である．このとき，$X \longmapsto \boldsymbol{R}(X)$ は Mackey ファンクターになる．

(3) $\mathbf{set}^G/X$ を X 上の G-集合 (すなわち G-写像 $A \longrightarrow X$) のカテゴリーとする．$\boldsymbol{B} : X \longmapsto \mathrm{Gro}(\mathbf{set}^G/X)$ (Gro は Grothendieck 環) は Mackey ファンクターになる．これを **Burnside 環ファンクター**という．$\boldsymbol{B}(G/H)$ は Burnside 環 $\boldsymbol{B}(H)$ (有限 H-集合の Grothendieck 環) に同形である．

$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} : \mathbf{set}^G \to \mathbf{Mod}_k$ を Mackey ファンクターとする．$\rho : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{L}$ が **paring** であるとは，ρ が自然な双線形写像の族

$$\rho_{XY} : \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{N}(Y) \longrightarrow \boldsymbol{L}(X \times Y) \quad (X, Y \in \mathbf{set}^G)$$

であることをいう．この条件は，双線形写像の族

$$\rho_X : \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{N}(X) \longrightarrow \boldsymbol{L}(X);\ (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \cdot \beta$$

で次の条件を満たすものといってもよい：

(P1) $f^*(\alpha' \cdot \beta') = f^*(\alpha') \cdot f^*(\beta')$;
(P2) $f_*(\alpha \cdot f^*(\beta')) = f_*(\alpha) \cdot \beta'$;
(P3) $f_*(f^*(\alpha') \cdot \beta) = \alpha' \cdot f_*(\beta)$.

(P2), (P3) を Frobenius 性という．

自分自身との paring $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}$ を使って「環」の概念が定義される (各 $\boldsymbol{A}(X)$ は $\boldsymbol{k}$-多元環で，各 f^* は多元環準同形写像)．また「環」$\boldsymbol{A}$ 上の「加群」の概念が paring $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ により定義される．

例. (1) $(K, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{F})$ を p-モジュラーシステムとする．すなわち $\boldsymbol{O}$ は完備離散付値環，K はその商の体で標数は 0，$\boldsymbol{F}$ は剰余体で標数は $p > 0$ である．さらに K も $\boldsymbol{F}$ も考えている有限群に対して十分大きいとする．この場合，指標環 $\boldsymbol{R}_K$ もモジュラー指標環 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{F}}$ も Mackey ファンクターとしての「環」である．さらに，$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{F}}$ と射影的表現の加群 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{F}}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の「加

群」である．Cartan 準同形 $c : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R_F}$ と分解準同形 $d : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R_F}$ は「$\boldsymbol{R}$-加群」の「$\boldsymbol{R}$-準同形」を与える．
(2) $\boldsymbol{k}G$-加群の pairing $M \times N \longrightarrow L$ から誘導される

$$\mathrm{Ext}^m_{\boldsymbol{k}G}(kX, M) \times \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{k}G}(kY, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m+n}\boldsymbol{k}G(x[X \times Y], L)$$

は Mackey ファンクターの pairing を与える．したがって $\mathrm{Ext}^{**}(\boldsymbol{k}X, \boldsymbol{k})$ は Mackey ファンクターの意味での「環」になる．
(3) Burnside 環 $\boldsymbol{B}$ は Mackey ファンクターとしても「環」である．paring $\boldsymbol{B}(X) \times \boldsymbol{B}(Y) \longrightarrow \boldsymbol{B}(X \times Y)$ は $((A \longrightarrow X), (B \longrightarrow Y)) \longmapsto (A \times B \longrightarrow X \times Y)$ で与えられる．$\boldsymbol{B}(X)$ の環構造はファイバー積 $[A \longrightarrow X] \cdot [B \longrightarrow X] = [A \times_X B \longrightarrow X]$ で与えられる．すべての Mackey ファンクター $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{B}$-加群である．作用 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ は，

$$\boldsymbol{B}(X) \times \boldsymbol{M}(X) \longrightarrow \boldsymbol{M}(X); [A \xrightarrow{\alpha} X]m := \alpha_* \circ \alpha^*(m)$$

で与えられる．

4 同変理論における可換環—丹原ファンクター

有限 G-集合の次の様な可換図式を **exponential diagram** という：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "p"'] & X \times_Y \Pi_f(A) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & & \Pi_f(A) \arrow[ll, "q"] \end{tikzcd}$$

ここで，$\Pi_f(A)$ などは次で定義する：

$$\begin{aligned} &\Pi_f A := \{(y, \sigma) \mid y \in Y, \sigma : q^{-1}(y) \longrightarrow A, p\sigma = \mathrm{id}\}, \\ &q : (y, \sigma) \longmapsto y, \quad f' : (x, y, \sigma) \longmapsto (y, \sigma) \\ &e : (x, y, \sigma) \longmapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

このとき**丹原ファンクター** $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}_!, \boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{T}_\bullet) : \mathbf{set}^G \longrightarrow \mathbf{Set}$ (**Set** は $\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ でもよい) を次で定義する．

(T1) $(\boldsymbol{T}_!, \boldsymbol{T}^*) : \mathbf{set}^G \longrightarrow \mathbf{Set}$ および $(\boldsymbol{T}_\bullet, \boldsymbol{T}^*) : \mathbf{set}^G \longrightarrow \mathbf{Set}$ はともに Mackery ファンクターである．$\boldsymbol{T}_!(X) = \boldsymbol{T}^*(X) = \boldsymbol{T}_\bullet(X)$ を単に $\boldsymbol{T}(X)$ と書く．
(T2) 上の exponential diagram に対し，$f_\bullet \circ p_! = q_! \circ f'_\bullet \circ e^*$.

ここで，$f_!$ を f の加法的 transfer，$f_\bullet$ を乗法的 transfer ということがある．(T1) により各成分 $\boldsymbol{T}(X)$ は自然に加法と乗法が入るが，(T2) はそれらの演算が分配法則を満たすことを保証する．したがって $\boldsymbol{T}(X)$ は可換半環になる．$f_!$ は加法を保ち，$f_\bullet$ は乗法を保つ．f^* は加法と乗法を保つ．$f_\bullet$ は多項式写像である．

$\boldsymbol{T}(\mathbf{1})$ が環にもなっているとする．このとき，$f : X \longrightarrow Y$ に対する $boldT(X)$ は $f^*(\boldsymbol{T}(Y))$ 上整である．さらにまた係数拡大 $K \otimes_k \boldsymbol{T}$ (ここで $K \supset k \supset \boldsymbol{T}(\mathbf{1})$ も丹原ファクターである．

例. (1) R を可換 k-多元環とする．このとき $X \longmapsto E_R(X) := \mathrm{Ext}^{**}_{\boldsymbol{k}G}(\boldsymbol{k}X, R)$ は丹原ファンクター．$E_R(XG/H) \cong H^{**}(H, R)$ (コホモロジー環) である．$f_!$ は Eckman の加法的 transger であり，$f_\bullet$ は Evens の乗法的 transfer.
(2) R が可換 $\boldsymbol{k}$-多元環で，G が多元環準同型として作用しているとする．このとき $E^0_R : X \longmapsto \mathrm{Map}_G(X, R)$ は丹原ファンクターになる．ただし，$f : X \longrightarrow Y$ に対し，

$$\begin{aligned}
f_!(\alpha) &: y \longmapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \alpha(x), \quad \alpha \in \mathrm{Map}_G(X, R) \\
f^*(\beta) &: x \longmapsto \beta(f(x)), \quad \alpha \in \mathrm{Map}_G(X, R) \\
f_\bullet(\alpha) &: y \longmapsto \prod_{x \in f^{-1}(y)} \alpha(x), \quad \alpha \in \mathrm{Map}_G(X, R).
\end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{R} : X \longmapsto \boldsymbol{R}(X) := \mathrm{Gro}(\mathbf{Mod}_{CG}/X)$ (X 上の CG-加群のカテゴリーの Grothendieck 環) は丹原ファンクターである．

$$\boldsymbol{R}(X) = \{(\alpha_x)_{x \in X} \mid \alpha_x \in \boldsymbol{R}(G_x),\ \alpha_{gx} = {}^g\alpha_x\}$$

とも見なせる．G-写像 $f : X \longrightarrow Y$ は次のようなコンマカテゴリー間の随伴ファンクター $\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$ を誘導する:

$$\begin{aligned}
\Sigma_f &: \mathbf{set}^G/X \longrightarrow \mathbf{set}^G/Y; (A \xrightarrow{\alpha} X) \longmapsto (f \circ \alpha : A \longrightarrow Y) \\
f^* &: \mathbf{set}^G/Y \longrightarrow \mathbf{set}^G/X; (B \xrightarrow{\beta} Y) \longmapsto (X \times_Y B \xrightarrow{\mathrm{pr}} X) \\
\Pi_f &: \mathbf{set}^G/X \longrightarrow \mathbf{set}^G/Y; (A \xrightarrow{\alpha} X) \longmapsto (\Pi_f(A) \xrightarrow{q} Y)
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{II}_f(A)$ は exponential diagram の中のものと同じである．これらのファンクターは Burnside 環の間の写像 $f_!, f^*, f_\bullet$ に拡張できる．$f_!$ は加法群の準同型，f^* は環準同型，$f_\bullet$ は乗法的な多項式写像である．

5 同変理論における多項式・ベキ級数

群 G の作用を伴う数学における (K-係数) 多項式とベキ級数の定義として，形式的 K-係数 (有限または無限) 一次結合

$$f(t) = \sum_X a_X t^X$$

であろう．ここで，X は有限 G-集合の同型類上を動く．t^X は G-集合 X に対応する記号で，演算規則は $t^\emptyset = 1$, $t^{X+Y} = t^X \cdot t^Y$ とする．このような多項式 (ベキ級数) 全体は，$t^{G/H}$ (H は G の部分群の共役類) を変数とする多項式 (ベキ級数) 環をなす．多変数だがあたかも一変数の多項式のように扱える．例えば，有限 G-集合の軌道分解の一意性は，指数関数型恒等式

$$\mathbf{set}^G(t) := \sum_X \frac{t^X}{|\mathrm{Aut}(X)|} = \exp\left(\sum_{H \leq G} \frac{t^{G/H}}{(G:H)}\right)$$

と同値である．例えば，t^X に $t^{|X|}$ を代入することによって，Wohlfahrt の公式が得られる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(G, S_n)|}{n!} t^n = \exp\left(\sum_{H \leq G} \frac{t^{(G:H)}}{(G:H)}\right).$$

困ったことにこの定義では，合成が不自由である．例えば $(1+t^M)^N$ の意味は今のところ意味がない．ただし，有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{set}^G$ の代わりに，有限集合の間の全射を対象とするカテゴリー Epi では plethysm 合成とよばれる合成法がある．あまり知られていないようだが，根つき森のカテゴリー RForest でもそのような合成がある．

そこでもう一度有限集合のカテゴリー $\mathbf{set}$ に戻って多項式の概念を考えてみる．まずベキ集合への写像 $[\delta : A \longrightarrow \mathbf{2}^M]$ ($\mathbf{2} = \{0,1\}$) と非負整数係数の多項式 $A(t)$ が対応していることに注意しておく：

$$A(t) = \sum_{a \in A} t^{|\delta(a)|}.$$

したがって，多項式を矢印で定義したいなら，$[\delta : A \longrightarrow \mathbf{2}^M]$ (または対応する関係 $R \subseteq A \times M$) を多項式と考えればよい．

この定義は同変版に拡張出来る．すなわち G-写像 $[\delta : A \longrightarrow \mathbf{2}^M]$ を「(次数 M 以下の) 多項式」と考えるのである．ただし，単射 $M \rightarrowtail M'$ があるとき，$[A \longrightarrow \mathbf{2}^M] = [A \longrightarrow \mathbf{2}^M \longrightarrow \mathbf{2}^{M'}]$ と見なす．次数を指定しない場合は $[A \longrightarrow 2^M]$ を単に A と書く．多項式と名乗るなら，様々な演算を持たなければならない．まず加法と乗法は容易である:

$$\begin{aligned}
[A \to \mathbf{2}^M] + [B \to \mathbf{2}^N] &= [A \to \mathbf{2}^M \to \mathbf{2}^{M+N}] + [B \to \mathbf{2}^N \to \mathbf{2}^{M+N}] \\
&= [A + B \to \mathbf{2}^{M+N}], \\
[A \longrightarrow \mathbf{2}^M] \cdot [B \longrightarrow \mathbf{2}^N] &= [A \times B \longrightarrow \mathbf{2}^M \times \mathbf{2}^N = \mathbf{2}^{M+N}].
\end{aligned}$$

微分は $\partial A(t) = t\, dA(t)/dt$ に相当するものが定義できる:

$$\begin{aligned}
&\partial[A \xrightarrow{\delta} \mathbf{2}^M] := [\partial A \xrightarrow{\delta} \mathbf{2}^M], \\
&\partial A := \{(i, a) \in N \times A \mid i \in \delta(a)\}, \quad \delta(i, a) = \delta(a).
\end{aligned}$$

合成は

$$\begin{aligned}
&[B \to \mathbf{2}^N] \circ [A \to \mathbf{2}^M] := [B \circ A \to \mathbf{2}^{M \times N}], \\
&B \circ A := \{(b, \sigma) \mid b \in B, \sigma : \delta_B(b) \to A\}, \\
&\delta_{B \circ A}(b, \sigma) = \{(i, j) \mid j \in \delta_B(b), i \in \delta_A(\sigma(j))\}
\end{aligned}$$

で定義する．有限集合のカテゴリー **set** の場合には，確かに多項式の正しい演算を与えている．期待通り，次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\partial(A \cdot B) &= \partial(A) \cdot B + A \cdot \partial(B) \\
\partial(B \circ A) &= \partial(A) \cdot (\partial B) \circ A.
\end{aligned}$$

$[A \xrightarrow{\delta} \mathbf{2}^M]$ への G-集合 X の代入 $A(X)$ は，δ と $\eta^N : (\mathbf{1}+X)^M \longrightarrow \mathbf{2}^M$ とのファイバー積で定義する．ここで $\mathbf{1} = \{0\}, \mathbf{2} = \{0, 1\}$ で，$\eta : \mathbf{1} + X \longrightarrow \mathbf{2}$ を $0 \longmapsto 1$, $x(\in X) \longmapsto 1$ で定義する．したがって $\eta^N : \lambda \longmapsto \lambda^{-1}(1)$ である．

ここまでは,「自然数」係数の「たかだか M-次の多項式」だった．一般の「整数係数多項式環」は $\varinjlim \boldsymbol{B}(\mathbf{2}^M)$ と定義すればよい．同様にベキ級数環は $\varprojlim \boldsymbol{B}(\mathbf{2}^M)$ と定義すればよい．これまで定義してきたいろいろな演算は,「多項式環」と「ベキ級数環」に拡張できる．

6 丹原ファンクター係数の多項式環とベキ級数環

$\boldsymbol{T}:\mathbf{set}^G \longrightarrow \mathbf{Mod}_k$ を丹原ファンクターとする．単射 $N \rightarrowtail N'$ は，$i: 2^N \longrightarrow 2^{N'}; R(\subseteq N) \longmapsto i(R)$ を誘導し，それはさらに $i_!: \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N) \longrightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{N'})$ と $i^*: \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{N'}) \longrightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N)$ を誘導する．このとき $\boldsymbol{T}$-係数の多項式環とベキ級数環は

$$\boldsymbol{T}[\cdot] := \varinjlim \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N),\ \boldsymbol{T}[[\cdot]] := \varprojlim \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N)$$

で定義する．これらは確かに環になっている．ふつうの多項式やベキ級数に関するいくつかの演算が出来る．

積． $\boldsymbol{T}[\cdot]\times\boldsymbol{T}[\cdot] \longrightarrow \boldsymbol{T}[\cdot], \boldsymbol{T}[[\cdot]]\times\boldsymbol{T}[[\cdot]] \longrightarrow \boldsymbol{T}[[\cdot]]$.

$\boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M)\times\boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N) \longrightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M\times\mathbf{2}^N) \cong \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{M+N})$ から誘導される．

微分． ($t\,d/dt$ に相当するもの)．$\partial: \boldsymbol{T}[\cdot] \longrightarrow \boldsymbol{T}[\cdot], \boldsymbol{T}[[\cdot]] \longrightarrow \boldsymbol{T}[[\cdot]]$.

$$\begin{aligned}&\in_M := \{(i,R)\in M\times\mathbf{2}^M \mid i\in R\}, \quad p:(i,R)\longmapsto R,\\ &\partial: \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M) \xrightarrow{p^*} \boldsymbol{T}(\in_M) \xrightarrow{p_!} \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M).\end{aligned}$$

から誘導された写像．Leibniz の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\partial(A\cdot B) &= \partial(A)\cdot B + A\cdot\partial(B),\\ \partial^n(A\cdot B) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\partial^{n-k}(A)\cdot\partial^k(B).\end{aligned}$$

代入． $(-)(X): \boldsymbol{T}[\cdot] \longrightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{1})$.

$\boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N) \xrightarrow{(\eta^N)^*} \boldsymbol{T}((\mathbf{1}+X)^N) \xrightarrow{\tau_!} \boldsymbol{T}(\mathbf{1})$. ここで，$\mathbf{2}^N \xleftarrow{\eta^N} (\mathbf{1}+X)^N \xrightarrow{\tau} \mathbf{1}$

合成． $\boldsymbol{T}[\cdot]\times\boldsymbol{T}[\cdot] \longrightarrow \boldsymbol{T}[\cdot]; (B,A) \longmapsto B\circ A$. かなり複雑な定義しかない．有限 G-集合 X, Y に対し，$XY := X\times Y$ と略記する．

$$\begin{aligned}p &: \mathbf{1}+\mathbf{2}^M \longrightarrow \mathbf{2}^M;\ 0\longmapsto\emptyset, R\longmapsto R\\ \chi_\eta &: \mathbf{1}+\mathbf{2}^M \longrightarrow \mathbf{2}; 0\longmapsto 0, R\longmapsto 1\\ \langle p,\chi_\eta\rangle &: \mathbf{1}+\mathbf{2}^M \longrightarrow \mathbf{2}^M\times\mathbf{2}(=: Z),\\ \mathrm{ev} &: Z^N N \longrightarrow Z; (\lambda,b)\longmapsto\lambda(b),\end{aligned}$$

とする．これから得られる G-写像の列

$$\mathbf{2}^M \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathbf{1}+\mathbf{2}^M \xrightarrow{\langle p,\chi_\eta\rangle} \mathbf{2}^M \times \mathbf{2}(=: Z) \xleftarrow{\mathrm{ev}} Z^N N \xrightarrow{\mathrm{pr}} Z^N = \mathbf{2}^{MN} \times \mathbf{2}^N$$

に丹原ファンクター $\boldsymbol{T}$ を適用して

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M) \xrightarrow{\mathrm{inc}_\bullet} \boldsymbol{T}(\mathbf{1}+\mathbf{2}^M) \xrightarrow{\langle p,\chi_\eta\rangle_!} \boldsymbol{T}(Z) \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} \boldsymbol{T}(Z^N N) \xrightarrow{\mathrm{pr}_\bullet} \boldsymbol{T}(Z^N) = \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N)$$

を得る．さらに $\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{2}^N$ に $\boldsymbol{T}$ を適用して，$\boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N) \xrightarrow{\mathrm{pr}^*} \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N)$ を得る．これより合成

$$\begin{aligned} \circ \ : \ \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^N) \times \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^M) &\longrightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N) \times \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N) \\ &\xrightarrow{\mathrm{multi}} \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}\mathbf{2}^N) \xrightarrow{\mathrm{pr}_!} \boldsymbol{T}(\mathbf{2}^{MN}) \end{aligned}$$

が得られる．合成関数の微分に関する公式も成り立つ．

$$\partial(B \circ A) = \partial(A) \cdot (\partial(B) \circ A).$$

7 局所有限トポスからの丹原ファンクター

トポスとは,「一般化された集合」のカテゴリーである．局所有限とは，各 Hom-set が有限集合であることを意味する．有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{set}^G$ は局所有限トポスの典型例である．Mackey ファンクターや丹原ファンクターの本当に整備された理論を作るなら局所有限トポスからのものを考えるのが自然である．また，離散数学が有限集合のカテゴリーの上に構築されているというなら，局所有限トポス上に構築するべきは一般化された離散数学である．

カテゴリー $\mathcal{E}$ が**トポス**であるとは，次の条件を満たすことをいう:

(T1) $\mathcal{E}$ は有限完備，すなわち有限極限，とくに終対象 $\mathbf{1}$，直積 $X \times Y$，ファイバー積 $X \times_Z Y$，等化などを持つ．

(T1') $\mathcal{E}$ は有限余完備，すなわち有限余極限，とくに始対象 $\emptyset$，直和 $X+Y$，ファイバー和などを持つ．

(T2) べキ閉である．すなわち $(-)\times Y : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}; X \longmapsto X \times Y$ は右随伴 $Z \longmapsto Z^Y$ を持つ．したがって X, Z に関して自然な全単射の族がある:

$$\hom(X \times Y, Z) \cong \hom(X, Z^Y).$$

(T3) 部分対象分類子と呼ばれる射 $t:\mathbf{1}\longrightarrow\Omega$ があって,

$$\mathrm{Hom}(X,\Omega)\cong\mathrm{Sub}(X);f\longmapsto(X\times_\Omega\mathbf{1}\hookrightarrow X).$$

ここで $\mathrm{Sub}(X)$ は X の部分対象全体の集合.

これらの性質は,明らかに集合のカテゴリー **Set** で成り立っている. 例えば $Z^Y=\mathrm{Map}(Y,Z)$ である. Ω は2点集合 $\mathbf{2}=\{0,1\}$ で, (T3) は部分対象 $A\subseteq X$ と特性写像 $\chi_A:X\longrightarrow\mathbf{2}$ の対応を意味する. また有限集合のカテゴリー **set** は局所有限トポスである. これだけの公理 (実は (T1') は不要) から離散数学もどきが構築できる.

以下, $\mathcal{E}$ を局所有限トポスとする. 例えば, 有限半群 S に対する有限 S-集合のカテゴリー $\mathbf{set}^S$, 有向グラフのカテゴリー, ある高さ以下の根つき森のカテゴリー **RForest**, より一般に有限カテゴリー上の有限集合の前層 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{set}]$, 有限写像の間の全射のカテゴリー, 有限半単体的複体のカテゴリーなどがそのような例である.

局所有限トポス $\mathcal{E}$ を $\mathbf{set}^G$ の代わりに使っても同様の理論が出きる. 例えば, (T2) から直和と直積に対する分配法則 $X\times(Y+Y')\cong X\times Y+X\times Y'$ などが成り立つので, $\mathcal{E}/\cong$ が自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ に当たると考えられる. さらに Burnside 環と同様, Grothendieck 環 $\boldsymbol{B}(\mathcal{E}):=\mathrm{Gro}(\mathcal{E}/\cong)$ が整数環に相当する. Mackey ファンクターや丹原ファンクターも同様に定義できる.

$\mathcal{E}/X$ をコンマカテゴリーとする. すなわち $A\longrightarrow X$ の形の射を対象とするカテゴリーである. $f:X\longrightarrow Y$ は, 次の随伴関手の組を誘導する.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}/X \arrow[r, shift left=2, "\Sigma_f"] \arrow[r, shift right=2, "\Pi_f"'] & \mathcal{E}/Y \arrow[l, "f^*"' description] \end{tikzcd} \quad \Sigma_f\dashv f^*\dashv\Pi_f\,*.$$

これより, $X\longmapsto(\mathcal{E}/X)/\cong$ (Burnside 半環ファンクター) は集合のカテゴリーへの丹原ファンクターになる. Burnside 環ファンクター $\boldsymbol{B}(X)=\mathrm{Gro}(\mathcal{E}/X)$ は一般には丹原ファンクターにならない. 乗法的 induction Π_f が Grothendieck 群にまで拡張するには, $\boldsymbol{B}(X)$ を完備化する必要がある.

また, $\mathrm{Sub}(X)$ で X の部分対象の集合を表す. このときやはり $f:$

$X \longrightarrow Y$ に対し，

$$\mathrm{Sub}(X) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\ \exists_f\ } \\ \xleftarrow{\ f^{-1}\ } \\ \xrightarrow[\ \forall_f\ ]{} \end{array} \quad \mathrm{Sub}(Y)$$

がある．これによって $X \longmapsto \mathrm{Sub}(X)$ は丹原ファンクターになる．

局所有限トポス上 $\mathcal{E}$ の丹原ファンクター $\boldsymbol{T}$ に係数を持つ多項式環やベキ級数環の定義も，$\mathbf{set}^G$ の場合と同様に出来る．次数 N 以下の多項式の加群は $\boldsymbol{T}(\Omega^N)$ で定義する．ただしふたつの元が等しいことを，$\boldsymbol{T}(\Omega^N/|aut(N))$ に飛ばして等しいことと定義する．このとき多項式環とベキ級数環はそれぞれ

$$\boldsymbol{T}[\cdot] := \varinjlim \boldsymbol{T}(\Omega^N), \quad \boldsymbol{T}[[\cdot]] := \varprojlim \boldsymbol{T}(\Omega^N)$$

で定義される．たかだか N 次の多項式への対象 X の「代入」では，$\mathbf{set}^G$ の場合に使った $\mathbf{1} + X$ の代わりに部分射分類子 $\eta : X \rightarrowtail \widetilde{X}$ を使う (部分射 $A(\subseteq X) \longrightarrow Y$ と射 $\widetilde{X} \longrightarrow Y$ が一対一に対応)．その他にも多項式環やベキ級数環上のいくつかの作用素，例えば，K-回微分 (K は $\mathcal{E}$ の対象) が定義される．

8 あとがき

すでに紙数がオーバーしている．丹原ファンクター係数の多項式環とベキ級数環について，書き残したこととやり残したことを簡単に追加しておく．

(A) 具体例．G-集合の場合，典型的な丹原ファンクターとして Burnside 環ファンクター，指標環ファンクター，コホモロジー環ファンクターがある．これらが係数環の場合に，簡単な群，例えば，巡回群，基本可換 p-群，二面体群，小さな次数の対称群と交代群についての計算例がほしい．

(B) 応用．群作用を持つ符号理論 (同変 MacWilliams 型恒等式) への応用がある (Kumamoto J.Math., 1993)．Burnside 環係数の多項式環を使っているが，モジュラー指標環やコホモロジー環を係数環とすることも当然

考えられる．他に有限群の表現論やコホモロジー論への応用はないのだろうか．

(C) Plethysm 合成．有限集合の間の全射を対象とするカテゴリー **Epi** は局所有限トポスである．この場合，Burnside 環係数の多項式は，加算変数の通常の多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots]$ と同一視できる．合成は，plethysm と呼ばれる合成に対応している．**Epi** は高さ 1 の根つき森のカテゴリーと見なせる．それなら一般の高さ $\leq h$ の根つき森のカテゴリーではどうなるだろう．

(D) 非アーベル丹原ファンクター係数の多項式環．$X \longmapsto \mathrm{Sub}(X)$ は丹原ファンクターである．それを係数とする多項式環はなんだろう．$\mathrm{Sub}(X)$ は分配束である．また丹原 2-ファンクター $X \longmapsto \mathcal{E}/X$ を係数環とする「高次元多項式環」(?) $\varinjlim \mathcal{E}/\Omega^N$ は意味があるのだろうか．

参考文献

[1] D.Tambara. On multiplicative transfer. *Comm. Algebra* **21** (1993), 1393–1420.

[2] P.T.Johnstone, "Toops Theory "., Academic Press,

[3] Yoshida, Tomoyuki MacWilliams identities for linear codes with group action. Kumamoto J. Math. 6 (1993), 29–45.

[4] Yoshida, Tomoyuki Categorical aspects of generating functions. I. Exponential formulas and Krull-Schmidt categories. J. Algebra 240 (2001), no. 1, 40-82.