

環の拡大 Λ/Γ は Frobenius extension なので、dual projective pair と呼ばれる Λ の元 $r_1, \dots, r_n, l_1, \dots, l_n$ と Frobenius homomorphism と呼ばれる両側 Γ -準同型写像 $h \in \text{Hom}({}_\Gamma\Lambda_\Gamma, {}_\Gamma\Gamma_\Gamma)$ が存在し、任意の $x \in \Lambda$ に対して、 $x = \sum_{i=1}^n h(xr_i)l_i = \sum_{i=1}^n r_i h(l_i x)$ となるが、このとき、次が成り立つ。

定理 1 ([5]) 任意の左 P -加群 M に対して、 $M^\Lambda = \{m \in M \mid xm = mx \text{ for all } x \in \Lambda\}$, $M^\Gamma = \{m \in M \mid xm = mx \text{ for all } x \in \Gamma\}$, $N_{\Lambda/\Gamma}(M) = \{\sum_{i=1}^n r_i m l_i \mid m \in M^\Gamma\}$ とおくと、同型

$$H^0(\Lambda, \Gamma, M) \simeq M^\Lambda / N_{\Lambda/\Gamma}(M)$$

が成り立つ。

この定理の証明は具体的な Λ の complete (P, S) -resolution から $H^0(\Lambda, \Gamma, M)$ を構成することによって直ちに証明される。

2. Cup 積

[6]において、Frobenius algebra の complete cohomology に cup 積が定義されているが、Frobenius extension の complete relative cohomology についても次のように定義される。

定義 1 ([5]) A, B を任意の左 P -加群とし、 r, s を任意の整数とする。任意の元 $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$ に対して、元 $\alpha \cup \beta \in H^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$ が存在し、次の条件 (i) ~ (iv) を満たすとき、 \cup を cup 積と言う。

(i) \cup は $Z(\Lambda)$ -準同型写像

$$H^r(\Lambda, \Gamma, A) \otimes_{Z(\Lambda)} H^s(\Lambda, \Gamma, B) \xrightarrow{\cup} H^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$$

を引き起こす。

(ii) $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ を (P, S) -exact sequence とする。左 P -加群 B に対して、 $0 \rightarrow A_1 \otimes_\Lambda B \rightarrow A_2 \otimes_\Lambda B \rightarrow A_3 \otimes_\Lambda B \rightarrow 0$ が (P, S) -exact ならば任意の $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A_3)$, $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$ に対して、 $\partial(\alpha \cup \beta) = \partial(\alpha) \cup \beta$ が成り立つ。ただし、 ∂ は connecting homomorphism を表すものとする。

(iii) $0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow 0$ を (P, S) -exact sequence とする。左 P -加群 A に対して、 $0 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_1 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_2 \rightarrow A \otimes_\Lambda B_3 \rightarrow 0$ が (P, S) -exact ならば任意の $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B_3)$ に対して、 $\partial(\alpha \cup \beta) = (-1)^r \alpha \cup \partial(\beta)$ が成り立つ。ただし、 ∂ は connecting homomorphism を表すものとする。

(iv) 図式

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Lambda, \Gamma, A) \otimes_{Z(\Lambda)} H^0(\Lambda, \Gamma, B) & \xrightarrow{\cup} & H^0(\Lambda, \Gamma, A \otimes_{\Lambda} B) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(A) \otimes_{Z(\Lambda)} B^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(B) & \longrightarrow & (A \otimes_{\Lambda} B)^{\Lambda}/N_{\Lambda/\Gamma}(A \otimes_{\Lambda} B) \end{array}$$

は可換である。ここで、縦方向の同型写像は定理1の同型写像であり、最下行の準同型写像は

$$(a + N_{\Lambda/\Gamma}(A)) \otimes (b + N_{\Lambda/\Gamma}(B)) \rightarrow a \otimes b + N_{\Lambda/\Gamma}(A \otimes_{\Lambda} B)$$

によって与えられる。

[5] では、[1, p.140] と同様に Λ の complete (P, S) -resolution X に diagonal approximation $\Delta : X \rightarrow X \otimes_{\Lambda} X$ が存在することを帰納法で示し、それを使って cup 積の存在を示している。そして、この cup 積は次の性質を持つ。

定理2 ([5](anti-commutativity)) M を左 P -加群とするとき、任意の $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, \Lambda)$, $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, M)$ に対して、 $\alpha \cup \beta = (-1)^{rs} \beta \cup \alpha$ が成り立つ。

定理3 ([5](associativity)) A, B, C を左 P -加群とするとき、任意の $\alpha \in H^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\beta \in H^s(\Lambda, \Gamma, B)$, $\gamma \in H^t(\Lambda, \Gamma, C)$ に対して、 $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ が成り立つ。

これらの定義・定理によって直和 $\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H^r(\Lambda, \Gamma, \Lambda)$ は環になる。

3. Complete relative cohomology の準同型写像

この章以降では前2章のように Λ が可換環 K 上の algebra, Γ がその subalgebra で、環の拡大 Λ/Γ が Frobenius extension である前提に加えて、環の拡大 Γ/K も Frobenius extension であると仮定する。 $\Lambda/\Gamma, \Gamma/K$ が Frobenius extension であるので、 Λ/K も Frobenius extension である。よって、左 P -加群 M に対して、 $H^r(\Lambda, K, M)$ が Λ の complete (P, K) -resolution Y より得られる。また、左 S -加群 M に対して、 $H^r(\Gamma, K, M)$ が Γ の complete (S, K) -resolution Z より得られる。 $(\Gamma/K$ が Frobenius extension であるので、 $S = \text{Im}(\Gamma \otimes_K \Gamma^{\circ} \rightarrow \Lambda \otimes_K \Lambda^{\circ}) \simeq \Gamma \otimes_K \Gamma^{\circ}$ である) ところで、 $Q = \Gamma \otimes_K \Lambda^{\circ}$ とおくと、 Q は自然な準同型写像 $\Gamma \otimes_K \Lambda^{\circ} \rightarrow \Lambda \otimes_K \Lambda^{\circ} (= P)$ が単射であるので、 P の部分環と見なせるが、 Y と $Z \otimes_{\Gamma} \Lambda$ がともに Λ の complete (Q, K) -resolution になるため左 P -加群 M に対して、同型

$$H^r(\text{Hom}(QY, QM)) \simeq H^r(\text{Hom}(QZ \otimes_{\Gamma} \Lambda, QM))$$

が成り立つ。また、同型 $\text{Hom}(QZ_r \otimes_{\Gamma} \Lambda, QM) \simeq \text{Hom}(S Z_r, S \text{Hom}(\Lambda_{\Lambda}, M_{\Lambda})) \simeq \text{Hom}(S Z_r, S M)$ より

同型

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Z \otimes_{\Gamma} \Lambda, {}_Q M)) \simeq H^r(\Gamma, K, M)$$

を得るが、この2つを合成して、同型

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M)) \simeq H^r(\Gamma, K, M)$$

が成り立つ。そして、自然な準同型写像 $\text{Hom}({}_P Y_r, {}_P M) \rightarrow \text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M)$ より引き起こされる準同型写像

$$H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M))$$

と合成して、restriction homomorphism

$$\text{Res}^r : H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\Gamma, K, M) \quad (r \in \mathbf{Z})$$

を得る。また、上の同型

$$H^r(\Gamma, K, M) \simeq H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M))$$

を準同型写像 $\text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M) \rightarrow \text{Hom}({}_P Y_r, {}_P M)$ ($f \in \text{Hom}({}_Q Y_r, {}_Q M)$ に対し

て $f \rightarrow [y \rightarrow \sum_i^n r_i f(l_i y)]$) によって引き起こされる準同型写像

$$H^r(\text{Hom}({}_Q Y, {}_Q M)) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M)$$

と合成して、corestriction homomorphism

$$\text{Cor}^r : H^r(\Gamma, K, M) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M) \quad (r \in \mathbf{Z})$$

を得る。

Λ の complete (P, K) -resolution Y の各左 P -加群 Y_r は (P, K) -projective であるが、環の拡大 P/K は Frobenius extension となるので、 (P, K) -injective でもある。よって、 Y は Λ の (P, K) -projective resolution と (P, K) -injective resolution をつなげて1つにしたものとみなせる。したがって、 Λ の identity homomorphism が準同型写像

$$\text{Inf}^r : H^r(\Lambda, \Gamma, M) \rightarrow H^r(\Lambda, K, M) \quad r \geq 1$$

および

$$\text{Def}^r : H^r(\Lambda, K, M) \rightarrow H^r(\Lambda, \Gamma, M) \quad r \leq -1$$

を引き起こす。(それぞれ inflation homomorphism, deflation homomorphism と呼ぶ) また、定理1の同型により、 $H^0(\Lambda, K, M)$ と $M^\Lambda/N_{\Lambda/K}(M)$, $H^0(\Lambda, \Gamma, M)$ と $M^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(M)$ を同一視すると準同型写像 $H^0(\Lambda, K, M) \rightarrow H^0(\Lambda, \Gamma, M)$ ($m + N_{\Lambda/K}(M) \in H^0(\Lambda, K, M)$ に対して、 $m + N_{\Lambda/\Gamma}(M) \rightarrow m + N_{\Lambda/\Gamma}(M)$) が存在

するので、これを Def^0 と定義する。

上に述べた4つの準同型写像 Res^r , Cor^r , Inf^r , Def^r の間には次のような関係がある。

定理4 ([5]) N を左 P -加群とし、左 P -加群 N^i ($i \geq 0$) を $N^0 = N$, $N^i = \text{Hom}({}_Q P, {}_Q N^{i-1})$ ($i \geq 1$) と帰納的に定義すると、 $r \geq 1$ に対して $H^n(\Gamma, K, N^{r-n}) = 0$ ($0 < n < r$) ならば、

$$0 \rightarrow H^r(\Lambda, \Gamma, N) \xrightarrow{\text{Inf}^r} H^r(\Lambda, K, N) \xrightarrow{\text{Res}^r} H^r(\Gamma, K, N)$$

は完全である。

定理5 ([5]) M を左 P -加群とし、左 P -加群 M_i ($i \geq 0$) を $M_0 = M$, $M_i = P \otimes_Q M_{i-1}$ ($i \geq 1$) と帰納的に定義すると、 $r \geq 0$ に対して $H^{-n}(\Gamma, K, M_{r-n}) = 0$ ($0 \leq n \leq r-1$) ならば、

$$0 \leftarrow H^{-r}(\Lambda, \Gamma, M) \xleftarrow{\text{Def}^{-r}} H^{-r}(\Lambda, K, M) \xleftarrow{\text{Cor}^{-r}} H^{-r}(\Gamma, K, M)$$

は完全である。

定理4の証明は[3]による。定理5の証明は $r = 0$ の場合を証明し、帰納法により他の場合が証明される。

4. Cup 積と Complete relative cohomology の準同型写像

先の章で述べた Res^r と cup 積の関係については[7]で述べられている。[5]では cup 積と Inf^r , Def^r の間に次のような関係があることを示している。

命題1 ([5]) A, B を左 P -加群とし、 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ をそれぞれ $H^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $H^s(\Lambda, \Gamma, B)$, $H^r(\Lambda, K, A)$, $H^s(\Lambda, K, B)$ の元とするとき次の等式が成り立つ。

- (1) $\text{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \beta) = \text{Inf}^r(\alpha) \cup \text{Inf}^s(\beta)$ ($r \geq 1, s \geq 1$)
- (2) $\text{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \beta') = \text{Def}^r(\alpha') \cup \text{Def}^s(\beta')$ ($r \leq 0, s \leq 0$)
- (3) $\text{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \text{Inf}^s(\beta)) = \text{Def}^r(\alpha') \cup \beta$ ($r < 0, s \geq 1, r+s \leq 0$)
- (4) $\text{Def}^{r+s}(\text{Inf}^r(\alpha) \cup \beta') = \alpha \cup \text{Def}^s(\beta')$ ($r \geq 1, s < 0, r+s \leq 0$)
- (5) $\text{Inf}^{r+s}(\text{Def}^r(\alpha') \cup \beta) = \alpha' \cup \text{Inf}^s(\beta)$ ($r \leq 0, s \geq 1, r+s \geq 1$)
- (6) $\text{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \text{Def}^s(\beta')) = \text{Inf}^r(\alpha) \cup \beta'$ ($r \geq 1, s \leq 0, r+s \geq 1$)

この命題の証明は具体的な Λ の complete (P, S) -resolution と complete (P, K) -resolution を用いて Inf^r と Def^r を具体的に与えることと、帰納法を使うことによってすべての r, s について証明している。

References

- [1] K.S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] R. Farnsteiner, On the cohomology of ring extensions, Advances in Math. 87(1991), 42–70.
- [3] A. Hattori, On fundamental exact sequences, J. Math. Soc. Jap. 12(1960), 65–80.
- [4] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, Osaka Math. J. 9(1957), 165–187.
- [5] T. Nozawa, On the complete relative cohomology of Frobenius extensions, Tsukuba J. Math. 17(1993), 99–113.
- [6] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 65–88.
- [7] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 89–106.