数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 1-10

旗多様体上の軌道対応に関する領域の同一性IIの補足

京都大学大学院理学研究科　松木　敏彦 (Toshihiko Matsuki)
Faculty of Science, Kyoto University

1 Introduction

$G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純リー群、$G_{\mathbb{R}}$ をその連結な real form とする。K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、$K_{\mathbb{C}}$ をその（連結な）複素化とする。$G_{\mathbb{C}}$ の任意の旗多様体 $X=G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道と $G_{\mathbb{R}}$-軌道との間には次の自然な 1 対 1 対応がある ([M4])。

$$\begin{aligned} &K_{\mathbb{C}}\backslash X \ni S \longleftrightarrow S' \in G_{\mathbb{R}}\backslash X \\ &\Longleftrightarrow S\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合} \end{aligned} \tag{1.1}$$

[GM1] において、$S\in K_{\mathbb{C}}\backslash X$ に対し、次のような $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合を定義した。

$$C(S)=\{x\in G_{\mathbb{C}} \mid xS\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合}\}$$

ただし、S' は (1.1) によって定まる X 上の $G_{\mathbb{R}}$-軌道である。明らかに $C(S)$ は左 $G_{\mathbb{R}}$-不変かつ右 $K_{\mathbb{C}}$-不変な集合である。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解とする。$\mathfrak{t}$ を $i\mathfrak{m}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、$\mathfrak{t}^{+}=\{Y\in\mathfrak{t} \mid |\alpha(Y)|<\pi/2 \text{ for all } \alpha\in\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t})\}$ とおく。このとき **Akhiezer-Gindikin 領域** D が次の式で定義される ([AG])。

$$D=G_{\mathbb{R}}(\exp\mathfrak{t}^{+})K_{\mathbb{C}}$$

[GM1] の Conjecture 1.6 は最近、次のように肯定的に解決された。

定理 1.1 ([WZ1, WZ2, FH, B, GM1, M7, M8, M9]) $S\neq X$ が nonholomorphic type のとき $C(S)_0=D$ である。ただし、$C(S)_0$ は $C(S)$ の単位元を含む連結成分とする。

注意 1.2 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型のとき、$i\mathfrak{k}$ の非自明な中心元 Z の随伴作用 $\mathrm{ad}(Z)$ による $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の固有空間分解を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\overline{\mathfrak{n}}\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{n}$ とし、$G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群 B を $\exp\mathfrak{n}$ を含むように取る。このとき、$G_{\mathbb{C}}$ の full flag manifold $G_{\mathbb{C}}/B$ 上には 2 つの特殊な閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $S_{(1)}=K_{\mathbb{C}}B/B=Q/B$ と $S_{(2)}=K_{\mathbb{C}}w_0B/B=\overline{Q}w_0/B$ が存在する。ただし $Q=K_{\mathbb{C}}\exp\mathfrak{n}$ は $G_{\mathbb{R}}/K$ の複素構造を定義するための極大放物型部分群であり、w_0 はワイル群の最長元とする。このとき、任意の放物型部分群 $P\supset B$ に対し、$S_{(1)}P$ と $S_{(2)}P$ は $G_{\mathbb{C}}/P$ の holomorphic type の $K_{\mathbb{C}}$-軌道と呼ばれ、それ以外の $K_{\mathbb{C}}$-軌道はすべて nonholomorphic type と定義する。従って、閉でないすべての軌道あるいは $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときのすべての軌道は nonholomorphic type である。

B に関する単純ルート α についての鏡映 w_α によって、B を含む放物型部分群 P_α を $P_\alpha = B \sqcup Bw_\alpha B$ で定義する。このとき、$P_\alpha/B \cong P^1(\mathbb{C})$ である。$\widetilde{S}$ を S に含まれるただ1つの dense な $K_\mathbb{C}$-B 両側剰余類とする。このとき、$K_\mathbb{C}$-B 両側剰余類の列 $S_0, \ldots, S_\ell$ および B に関する単純ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ が次を満たすように取れる。

$$\begin{aligned}
S_m^{cl} &= S_{m-1}^{cl} P_{\alpha_m} \quad (m = 1, \ldots, \ell) \\
\dim_\mathbb{C} S_m &= \dim_\mathbb{C} S_{m-1} + 1 \quad (m = 1, \ldots, \ell) \\
&S_0 \text{ は閉 } K_\mathbb{C}\text{-}B \text{ 両側剰余類} \\
&S_k = \widetilde{S} \quad \text{for some } k \\
&S_\ell = S_{\mathrm{op}} \quad (S_{\mathrm{op}} \text{ はただ1つの開 } K_\mathbb{C}\text{-}B \text{ 両側剰余類})
\end{aligned}$$

任意の $x \in G_\mathbb{C}$ に対し、

$$I_m(x) = xS_m^{cl} \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_\ell} \cdots P_{\alpha_{m+1}} = xS_0 P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_m} \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_\ell} \cdots P_{\alpha_{m+1}}$$

とおく。次の定理が定理 1.1 の証明において重要である。

定理 1.3 ([M8]) (i) $I_0(x)$ が連結ならば $I_m(x)$ は連結 $(m = 1, \ldots, \ell)$。
(ii) $x \in D^{cl} \cap C(S)$ のとき、$I_k(x) = xS \cap S'_k$ である。

注意 1.4 (1) [M8] (ver. 1) における定理 1.3 (ii) の証明には gap があったので、2004 年 5 月に ver. 2 において修正された。
(2) さらに同年 12 月に (i) を付け加えたことにより、その証明は非常に簡潔になった (ver. 3)。

この定理によって、次のように $G_\mathbb{R}$ が非エルミート型のときの定理 1.1 が証明される。[M9] におけるエルミート型のときの証明にも定理 1.1 は同様に用いられる。

系 1.5 ([M8]) $G_\mathbb{R}$ は単純かつ非エルミート型とする。このとき任意の旗多様体 $G_\mathbb{C}/P$ 上のすべての開でない $K_\mathbb{C}$-軌道 S に対し、$C(S)_0 = D$ である。(開軌道については [M7] において示されている。)

証明 一般に $D \subset C(S)$ が示されている ([M6])。$x \in D^{cl} \cap C(S)$ とする。このとき $x \in D$ であることを示せばよい。$S_k P_{\alpha_{k+1}} \cdots P_{\alpha_{\ell-1}} \cap S_{\mathrm{op}} = \phi$ であるから、duality ([M2]) により $S'_k P_{\alpha_{k+1}} \cdots P_{\alpha_{\ell-1}} \cap S'_{\mathrm{op}} = \phi$ であり、よって

$$S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_{k+1}} \cap S'_k = \phi$$

である。定理 1.3 (ii) により

$$\begin{aligned}
xS^{cl} \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_{k+1}} &= xS^{cl} \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_\ell} \cdots P_{\alpha_{k+1}} \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_{k+1}} \\
&= xS \cap S'_k \cap S'_{\mathrm{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_{k+1}} = \phi.
\end{aligned}$$

よって

$$xS^{cl}_{\ell-1}\cap S'_{\mathrm{op}} = xS^{cl}P_{\alpha_{k+1}}\cdots P_{\alpha_{\ell-1}}\cap S'_{\mathrm{op}} = \phi.$$

余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $S_{\ell-1}$ に対し、[GM2] において次の領域が定義された。

$$\Omega = \{x\in G_{\mathbb{C}} \mid xS^{cl}_{\ell-1}\cap S'_{\mathrm{op}} = \phi\}_0$$

$G_{\mathbb{R}}$ が非エルミート型のとき、[FH], [M7] において

$$\Omega = D$$

が示されている。従って $x\in D$ である。 □

本稿では、具体例に基づいて定理 1.3 の証明の解説をしたい。

2 例

$G_{\mathbb{C}} = SL(3,\mathbb{C}),\ G_{\mathbb{R}} = SU(1,2),$

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\in G_{\mathbb{C}}\right\} = \{x\in G_{\mathbb{C}} \mid xV^0_+ = V^0_+,\ xV^0_- = V^0_-\}$$

とする。ただし、$\mathbb{C}^3$ の標準基底 $e_1,\ e_2,\ e_3$ を用いて $V^0_- = \mathbb{C}e_1,\ V^0_+ = \mathbb{C}e_2\oplus\mathbb{C}e_3$ とする。B を $G_{\mathbb{C}}$ に含まれる上半三角行列のなすボレル部分群とする。このとき full flag manifold $X = G_{\mathbb{C}}/B$ は旗 (ℓ,p)（ℓ は $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間、p は ℓ を含む $\mathbb{C}^3$ の 2 次元部分空間）の集合である。X は次のように 6 つの $K_{\mathbb{C}}$-軌道に分解される。

$$\begin{aligned}
S_{(1)} &= \{(\ell,p)\in X \mid \ell = V^0_-\},\\
S_{(2)} &= \{(\ell,p)\in X \mid p = V^0_+\},\\
S_{(3)} &= \{(\ell,p)\in X \mid \ell\subset V^0_+,\ p\supset V^0_-\},\\
S_{(4)} &= \{(\ell,p)\in X \mid p\supset V^0_-\} - (S_{(1)}\cup S_{(3)}),\\
S_{(5)} &= \{(\ell,p)\in X \mid \ell\subset V^0_+\} - (S_{(2)}\cup S_{(3)}),\\
S_{\mathrm{op}} &= X - (S_{(1)}\cup S_{(2)}\cup S_{(3)}\cup S_{(4)}\cup S_{(5)}).
\end{aligned}$$

軌道構造は次の図で表わされる。（記号の意味については [M5], [MO] 参照）

$$\begin{tikzcd}
S_{(1)} \arrow[dr, "1"'] & & S_{(3)} \arrow[dl, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & S_{(2)} \arrow[dl, "2"] \\
& S_{(4)} \arrow[dr, "2"'] & & S_{(5)} \arrow[dl, "1"] & \\
& & S_{\mathrm{op}} & &
\end{tikzcd}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}, \quad P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

は B を含む $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群であるが、上の図式は例えば

$$S_{(1)}P_1 = S_{(3)}P_1 = S_{(4)}P_1 = S_{(1)} \sqcup S_{(3)} \sqcup S_{(4)}$$

であることを示している。さらに

$$S_{(4)}^{cl} = S_{(1)}P_1$$

であることもわかる。一方、これらに対応する $G_{\mathbb{R}}$-軌道は次の通りである。

$$\begin{aligned}
S'_{(1)} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_-\}, \\
S'_{(2)} &= \{(\ell, p) \in X \mid p - \{0\} \subset C_+\}, \\
S'_{(3)} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_+,\ p \cap C_- \neq \phi\}, \\
S'_{(4)} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0\} - S'_{\mathrm{op}}, \\
S'_{(5)} &= \{(\ell, p) \in X \mid p \text{ は } C_0 \text{ に接する }\} - S'_{\mathrm{op}}, \\
S'_{\mathrm{op}} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0,\ p \text{ は } C_0 \text{ に接する }\}.
\end{aligned}$$

ただし $SU(1,2)$ を定義するエルミート形式 $Q(z,z) = -|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ によって、$\mathbb{C}^3$ を

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^3 &= C_0 \sqcup C_+ \sqcup C_- \\
&= \{Q(z,z) = 0\} \sqcup \{Q(z,z) > 0\} \sqcup \{Q(z,z) < 0\}
\end{aligned}$$

と分割する。

対応 $xK_{\mathbb{C}} \mapsto (V_+, V_-) = (xV_+^0, xV_-^0)$ によって、複素対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ は $V_+ \cap V_- = \{0\}$ を満たす $\mathbb{C}^3$ の 2 次元部分空間 V_+ と 1 次元部分空間 V_- の組の集合と同一視できる。これによって Akhiezer-Gindikin 領域は

$$D/K_{\mathbb{C}} = (C(S_{(1)}) \cap C(S_{(2)}))/K_{\mathbb{C}} = \{(V_+, V_-) \mid V_+ - \{0\} \subset C_+,\ V_- - \{0\} \subset C_-\}$$

と表せる。その境界 $\partial(D/K_{\mathbb{C}})$ は次の 3 つの集合の和集合である。

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ \text{ は } C_0 \text{ に接し、} V_- - \{0\} \subset C_-\}, \\
D_2 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ - \{0\} \subset C_+,\ V_- \subset C_0\}, \\
D_3 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ \text{ は } C_0 \text{ に接し、} V_- \subset C_0\}
\end{aligned}$$

$S_0 = S_{(1)}$, $S_1 = S_{(4)}$, $S_2 = S_{\rm op}$, $S_1^{cl} = S_0P_1$, $S_2^{cl} = S_1^{cl}P_2$ について、$xK_{\mathbb{C}} \in D_1$, D_2 のときに、定理1.3の $I_0(x) = xS_{(1)} \cap S'_{\rm op}P_2P_1$, $I_1(x) = xS_{(4)}^{cl} \cap S'_{\rm op}P_2$, $I_2(x) = xS_{\rm op}^{cl} \cap S'_{\rm op} = S'_{\rm op}$ を調べてみよう。$xK_{\mathbb{C}} \in D_1$ のとき、$V_+ = xV_+^0$ と C_0 は1次元部分空間で接するので、

$$\begin{aligned} I_0(x) &= xS_{(1)} \cap S'_{(1)} = xS_{(1)} \cong P^1(\mathbb{C}) \\ I_1(x) &= (xS_{(3)} \cap S'_{(4)}) \sqcup (xS_{(4)} \cap S'_{(4)}) \\ &\cong \{\mathrm{pt}\} \sqcup \mathbb{R}^3 \\ I_2(x) &= (xS_{(2)} \cap S'_{\rm op}) \sqcup (xS_{\rm op} \cap S'_{\rm op}) \\ &\cong \{\mathrm{pt}\} \sqcup \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

である。また、$xK_{\mathbb{C}} \in D_2$ のときは、$V_- = xV_-^0$ は C_0 に含まれるので、

$$\begin{aligned} I_0(x) &= (xS_{(1)} \cap S'_{\rm op}) \sqcup (xS_{(1)} \cap S'_{(4)}) \\ &\cong \{\mathrm{pt}\} \sqcup \mathbb{C} \\ I_1(x) &= (xS_{(1)} \cap S'_{\rm op}) \sqcup (xS_{(1)} \cap S'_{(4)}) \sqcup (xS_{(4)} \cap S'_{(4)}) \\ &\cong \{\mathrm{pt}\} \sqcup \mathbb{C} \sqcup \mathbb{R}^3 \\ I_2(x) &= (xS_{(1)} \cap S'_{\rm op}) \sqcup (xS_{\rm op} \cap S'_{\rm op}) \\ &\cong \{\mathrm{pt}\} \sqcup \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

であることがわかる。$I_j(x)$ $(j = 0, 1, 2)$ はすべて連結であり、$x \in D_1$ かつ $j = 0$ のときを除き、$xS_j \cap S'_j$ はノンコンパクトまたは空集合であることがわかる。従って、$j = 1$, 2 のとき $D_1 \sqcup D_2$ は $C(S_j)$ と交わらないので、$D_1 \sqcup D_2$ が $\partial(D/K_{\mathbb{C}})$ において dense であることを用いて、$C(S_j)_0 \subset D$ が示せる。すなわち

$$C(S_{(4)})_0 \subset D \quad \text{および} \quad C(S_{\rm op})_0 \subset D$$

が示された。$j = 0$ のときは $C(S_{(1)}) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xV_-^0 - \{0\} \subset C_-\}$ なので、$D_1 \subset C(S_{(1)})$ であることに注意する。

3 準備

B_0 を $G_{\mathbb{C}}$ の1つのボレル部分群とするとき、full flag manifold $G_{\mathbb{C}}/B_0$ は次の写像によって、$G_{\mathbb{C}}$ のすべてのボレル部分群の集合 $\mathcal{F}$ と同一視される。

$$G_{\mathbb{C}}/B_0 \ni gB_0 \mapsto B = gB_0g^{-1} \in \mathcal{F}$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に対する Cartan involution を $\theta : Y + Z \mapsto Y - Z$ $(Y \in \mathfrak{k},\ Z \in \mathfrak{m})$ とする。次の定理が基本的である。

定理 3.1 ([A], [M1], [R]) $\mathcal{F}$ の任意の $G_{\mathbb{R}}$-共役類は次の形のボレル部分群を含む。

$$B = B(\mathfrak{j}, \Sigma^+) = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Sigma^+ \sqcup \{0\}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}, \alpha)\right)$$

ただし、$\mathfrak{j}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の θ-不変なカルタン部分環、Σ^+ はルート系 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ の正のルート系、$\alpha \in \Sigma \sqcup \{0\}$ に対し、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}, \alpha)$ はルート空間

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X \text{ for all } Y \in \mathfrak{j}\}$$

とする。

Σ のルートは通常、次のように分類される。

(i) $\theta(\alpha) = \alpha$ かつ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}, \alpha) \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ のとき、α はコンパクトルートと呼ばれる。

(ii) $\theta(\alpha) = \alpha$ かつ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}, \alpha) \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ のとき、α はノンコンパクトルートと呼ばれる。

(iii) $\theta(\alpha) = -\alpha$ のとき、α は実ルートと呼ばれる。

(iv) $\theta(\alpha) \neq \pm\alpha$ のとき、α は複素ルートと呼ばれる。

[V] Lemma 5.1 あるいは [M3] Lemma 3 の方法により、$P_\alpha/B \cong P^1(\mathbb{C})$ は次のように $P_\alpha \cap G_{\mathbb{R}}$-軌道に分解される。

補題 3.2 (i) α がコンパクトのとき、$P_\alpha = (P_\alpha \cap G_{\mathbb{R}})B$

(ii) α がノンコンパクトまたは実のとき、$P_\alpha/B \cong P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ は上半平面、下半平面および $P^1(\mathbb{R})$ と同相な 3 つの $(P_\alpha \cap G_{\mathbb{R}})_0$-軌道に分解される。($P_\alpha \cap G_{\mathbb{R}}$-軌道分解としては開軌道が 1 つになる場合もある。)

(iii) α が複素のとき、P_α/B は 1 点とその補集合に $P_\alpha \cap G_{\mathbb{R}}$-軌道分解される。

注意 3.3 一方、P_α/B 上の $P_\alpha \cap K_{\mathbb{C}}$-軌道については次のようになる ([V] Lemma 5.1)。

(i) α がコンパクトのとき、$P_\alpha = (P_\alpha \cap K_{\mathbb{C}})B$

(ii) α がノンコンパクトまたは実のとき、$P_\alpha/B \cong P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ は 2 点およびその補集合の 3 つの $(P_\alpha \cap K_{\mathbb{C}})_0$-軌道に分解される。($P_\alpha \cap K_{\mathbb{C}}$-軌道分解としては閉軌道が 1 つになる場合もある。)

(iii) α が複素のとき、P_α/B は 1 点とその補集合に $P_\alpha \cap K_{\mathbb{C}}$-軌道分解される。

定理 3.1 と補題 3.2 により、

系 3.4 $G_{\mathbb{C}}$ の任意の元 g に対し、gP_α/B の $(gP_\alpha g^{-1} \cap G_{\mathbb{R}})_0$-不変閉部分集合は常に連結である。

4 定理1.3の証明

補題 4.1 (i) S_k は $S_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}}$ の相対閉部分集合。
(ii) S'_k は $S'_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}}$ の相対閉部分集合。

証明 閉包関係に関する duality ([M3]) により、(i) だけを証明すればよい。S_k の境界に含まれる任意の $K_{\mathbb{C}}$-軌道を T とするとき、$\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}T > \ell - k$ であるので、[V] Lemma 5.1 (c.f. [GM1] Lemma 9.1) により、$S_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}}$ は T を含まない。よって S_k は $S_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}}$ の相対閉部分集合である。 □

定理 1.3 の証明 (i) m に関する帰納法で証明する。$I_{m-1}(x)$ が連結とすると、

$$\begin{aligned}
I_{m-1}(x)P_{\alpha_m} &= (xS^{cl}_{m-1}\cap S'_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_m})P_{\alpha_m}\\
&= xS^{cl}_{m}\cap S'_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_m}\\
&= (xS^{cl}_{m}\cap S'_{\mathrm{op}}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{m+1}})P_{\alpha_m}\\
&= I_m(x)P_{\alpha_m}
\end{aligned}$$

は連結である。$I_m(x)$ の空でない閉部分集合 A_1 および A_2 によって $I_m(x) = A_1 \sqcup A_2$ と書けるとしよう。B は連結なので、A_1, A_2 は右 B-不変である。$A_1P_{\alpha_m}$ および $A_2P_{\alpha_m}$ は $I_m(x)P_{\alpha_m}$ の閉部分集合であって、

$$A_1P_{\alpha_m}\cup A_2P_{\alpha_m} = I_m(x)P_{\alpha_m}$$

が連結であるので $A_1P_{\alpha_m}\cap A_2P_{\alpha_m}$ は空集合ではない。$A_1P_{\alpha_m}\cap A_2P_{\alpha_m}$ の元 g を取ると、$gP_{\alpha_m}\cap I_m(x)$ は

$$gP_{\alpha_m}\cap I_m(x) = (gP_{\alpha_m}\cap A_1)\sqcup(gP_{\alpha_m}\cap A_2)$$

と 2 つの空でない閉部分集合 $gP_{\alpha_m}\cap A_1$ および $gP_{\alpha_m}\cap A_2$ の disjoint union で表わせる。$(gP_{\alpha_m}\cap A_1)/B$ および $(gP_{\alpha_m}\cap A_2)/B$ は gP_{α_m}/B の $(gP_{\alpha_m}g^{-1}\cap G_{\mathbb{R}})_0$-不変閉部分集合であるので、系 3.4 に矛盾する。以上により、$I_m(x)$ が連結であることが示された。

(ii) S_0/B はコンパクト、S'_0/B は開集合であるので、

$$\begin{aligned}
C(S_0) &= \{x\in G_{\mathbb{C}} \mid (xS_0\cap S'_0)/B \text{ は空でないコンパクト集合}\}\\
&= \{x\in G_{\mathbb{C}} \mid xS_0\subset S'_0\}
\end{aligned}$$

である。従って $C(S_0)_0$ は [WW] で定義された (S'_0 の) cycle space に他ならない。$D\subset C(S_0)_0$ ([GM1], [M6] など) であるので、

$$x\in D \Longrightarrow xS_0\subset S'_0$$

である。

従って、$x \in D^{cl}$ のとき、

$$xS_0 \subset {S'_0}^{cl} \subset S'_{\rm op}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_1}$$

となるので、$I_0(x) = xS_0 \cap S'_{\rm op}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_1} = xS_0$ は連結である。(i) により

$$I_k(x) = xS^{cl} \cap S'_{\rm op}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}} \text{ は連結である。} \tag{4.1}$$

S は S^{cl} の相対開部分集合であるので、補題 4.1 (ii) により

$$xS \cap S'_k \text{ は } I_k(x) = xS^{cl} \cap S'_{\rm op}P_{\alpha_\ell}\cdots P_{\alpha_{k+1}} \text{ の相対開部分集合である。} \tag{4.2}$$

一方、$x \in C(S)$ とすると、定義により $xS \cap S'$ は $G_{\mathbb{C}}$ の空でない閉部分集合である。S'_k は S' において相対閉なので、

$$xS \cap S'_k \text{ は } G_{\mathbb{C}} \text{ の閉部分集合である。} \tag{4.3}$$

また、$xS \cap S' = (xS \cap S'_k)P$ だから

$$xS \cap S'_k \text{ は空集合ではない。} \tag{4.4}$$

従って、$x \in D^{cl} \cap C(S)$ のとき、(4.1), (4.2), (4.3), (4.4) により $I_k(x) = xS \cap S'_k$ が成り立つ。 $\square$

References

[A] K. Aomoto, On some double coset decompositions of complex semi-simple Lie groups, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 1–44.

[AG] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin, On Stein extensions of real symmetric spaces, Math. Ann., **286** (1990), 1–12.

[B] L. Barchini, Stein extensions of real symmetric spaces and the geometry of the flag manifold, Math. Ann., **326** (2003), 331–346.

[FH] G. Fels and A. Huckleberry, Characterization of cycle domains via Kobayashi hyperbolicity, Bull. Soc. Math. France, **133** (2005), 121–144.

[GM1] S. Gindikin and T. Matsuki, Stein extensions of Riemannian symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds, Transform. Groups, **8** (2003), 333–376.

[GM2] S. Gindikin and T. Matsuki, A remark on Schubert cells and the duality of orbits on flag manifolds, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 157–165.

[H] A. Huckleberry, On certain domains in cycle spaces of flag manifolds, Math. Ann., **323** (2002), 797–810.

[M1] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 331–357.

[M2] T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups, Hiroshima Math. J., **12** (1982), 307–320.

[M3] T. Matsuki, Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, Adv. Stud. Pure Math., **14** (1988), 541–559.

[M4] T. Matsuki, Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits, Hiroshima Math. J., **18** (1988), 59–67.

[M5] T. Matsuki, Schubert cell と旗多様体上の軌道対応, 数理解析研究所講究録, **1294** (2002), 35–43.

[M6] T. Matsuki, Stein extensions of Riemann symmetric spaces and some generalization, J. Lie Theory, **13** (2003), 563–570.

[M7] T. Matsuki, Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds, preprint (RT/0309314)

[M8] T. Matsuki, Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds II, preprint (RT/0309469)

[M9] T. Matsuki, Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds III, preprint (RT/0410302)

[MO] T. Matsuki and T. Oshima, Embeddings of discrete series into principal series, In *The Orbit Method in Representation Theory*, 147–175, Birkhäuser, 1990.

[R] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, Canad. J. Math., **31** (1979), 157–180.

[V] D. A. Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups III, Invent. Math., **71** (1983), 381–417.

[WW] R. O. Wells and J. A. Wolf, Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains, Ann. of Math., **105** (1977), 397–448.

[WZ1] J. A. Wolf and R. Zierau, Linear cycle spaces in flag domains, Math. Ann., **316** (2000), 529–545.

[WZ2] J. A. Wolf and R. Zierau, A note on the linear cycle spaces for groups of Hermitian type, J. Lie Theory, **13** (2003), 189–191.