数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 122-130

概均質ベクトル空間の p 進局所関数等式と絡作用素

立教大学・理学部 佐藤 文広 (Fumihiro Sato)
Department of Mathematics, Fuculty of Science
Rikkyo University

研究集会では, 概均質ベクトル空間に付随する (実数体上の局所) ゼータ関数の関数等式の gamma 行列が, 一般線型群 GL_m の退化主系列表現の間の同値を与える絡作用素 (intertwining operator) に関連する, ある多項式の冪積分 (一種の c 関数) によって与えられることについて説明した. その内容は, すでに

> 概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式と絡作用素,
> 数理解析研究所講究録 No.**1281**(2002), 167–175.

として報告したものと大体同じであるので, そちらを参照していただくこととし, ここでは, 講演では全く触れなかった p 進体上の局所関数等式について議論する. 保型形式の集会の報告集に $\mathbb{R}$ の場合を書き, 表現論の集会の報告集に $\mathbb{Q}_p$ の場合を書くのは話が逆かもしれないが, 重複を避けるためであり, ご容赦願いたい.

1 p 進局所ゼータ関数

整数 $m \geq n \geq 1$ とし, $\mathbf{H}$ を $\mathbf{GL}_m$ の p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上定義された連結代数的部分群とする. $n = e_1 + \cdots + e_r$ を n の分割とし, この分割に対応する $\mathbf{GL}_n$ の (上三角の) 放物型部分群を $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{e_1,\ldots,e_r}$ で表す. われわれの考える概均質ベクトル空間は

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho, \mathbf{M}_{m,n}), \quad \rho(h,p)v = hvp^{-1}$$

の形のものである. ここで, 次の仮定が満たされているとする:

(Ass. 1) $(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho, \mathbf{M}_{m,n})$ は正則概均質ベクトル空間である．

(Ass. 2) $X(\mathbf{P})$ で $\mathbf{P}$ のすべての有理指標のなす乗法群を表し，X_ρ で相対不変式に対応する $\mathbf{H} \times \mathbf{P}$ の有理指標の群を表す．このとき，

(a) 任意の $\chi \in X_\rho$ は $\mathbf{H}$ 上自明である．

(b) そこで，X_ρ を $X(\mathbf{P})$ の部分群とみなしたとき，指数は有限である．

(Ass. 3) $H = \mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)$, $P = \mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)$, $V = \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{Q}_p)$ とおく．このとき，

(a) V は有限個の $\rho(H \times P)$-軌道に分解する．

(b) $v \in V$ が開軌道に属さないとき，

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{P}))_v = \{ (h,p) \in \mathbf{H} \times \mathbf{P} \mid \rho(h,p)v = v \}$$

上自明でないような $\chi \in X_\rho$ が存在する．

仮定 Ass. 3 は取り除かれることが望ましいが，現在のところ，p 進局所関数等式の証明にはこの仮定を必要としている．[1] 以下では，Ass. 3 は p 進局所関数等式の存在を保証するためだけに用いられる．

双対概均質ベクトル空間を

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho^*, \mathbf{M}_{m,n}), \quad \rho^*(h,p)v^* = {}^t h^{-1} v^{*t} p$$

によって定義する．この双対概均質ベクトル空間も Ass. 1–3 を満足する．以下，基本相対不変式、その他，$(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho, \mathbf{M}_{m,n})$ に対して同様に定義される概念の $(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho^*, \mathbf{M}_{m,n})$ に対する対応物は，その記号に上付きの * をつけて表すことにし一々説明しないが，混乱することはないであろう．

Ω を $(\mathbf{H}\times\mathbf{P}, \rho, \mathbf{M}_{m,n})$ の開軌道とし，$\Omega(\mathbb{Q}_p)$ を $H\times P$-軌道に分解する：

$$\Omega(\mathbb{Q}_p) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Omega_i.$$

$\chi_1, \ldots, \chi_r \in X_\rho$ を $(\mathbf{H}\times\mathbf{P}, \rho, \mathbf{M}_{m,n})$ の既約相対不変多項式に対応する指標とする．$\chi_1, \ldots, \chi_r \in X_\rho$ に 対応する相対不変式 $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Q}_p[\mathbf{M}_{m,n}]$ をとる．$f_1, \ldots, f_r$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ に属す定数倍を除いて一意的である（基本相対

[1] Ass. 3 の除去については行者氏の研究があるが，最終的な結果にまで至っていないようである．

不変式）．$i = 1, \ldots, \nu$ と $s \in X_\rho^{\mathbb{C}} := X_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong X(\mathbf{P}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対し，$s = \sum_i s_i \chi_i$, $s_i \in \mathbb{C}$ と書き，

$$|f(x)|_i^s := \begin{cases} \prod_{i=1}^{\nu} |f_i(x)|^{s_i} & (x \in \Omega_i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義する．ここで絶対値記号は p 進絶対値を意味している．$|f(x)|_i^s$ は $\Re(s_i) \geq 0$ $(1 \geq i \geq r)$ では連続関数として定まるが，一般の $s \in X_\rho^{\mathbb{C}}$ に対しては解析接続によって s に有理型に依存する V 上の超関数として定義されていることに注意しておく．この超関数の $\Phi \in \mathcal{S}(V)$（一般に完全非連結位相空間 X に対し，$\mathcal{S}(X)$ でコンパクト台を持つ局所定数関数の空間を表す）における値

$$\zeta_i(\Phi; s) = \int_V |f(x)|_i^s \, \Phi(x) \, dx$$

が p-進局所ゼータ関数である．

双対概均質ベクトル空間 $(\mathbf{H} \times \mathbf{P}, \rho^*, \mathbf{M}_{m,n})$ についても，開軌道 Ω^* の $\mathbb{Q}_p$-有理点の集合 $\Omega^*(\mathbb{Q}_p)$ を $H \times P$-軌道に分解すると

$$\Omega^*(\mathbb{Q}_p) = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Omega_j^*$$

と同数の軌道に分解される．まったく同様にして $j = 1, \ldots, \nu$ と $s \in X_{\rho^*}^{\mathbb{C}} := X_\rho^{\mathbb{C}}$ に対し，V^* 上の超関数 $|f^*(y)|_j^s$ が定義でき，$\Phi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対し p-進局所ゼータ関数

$$\zeta_j^*(\Phi^*; s) = \int_{V^*} |f^*(y)|_j^s \, \Phi^*(y^*) \, dy$$

を得る．このとき，$\delta(p) = \det p^m$ により $\delta \in X(\mathbf{P})$ を定める．このとき，[3] で（1 変数の場合は [1] で）示された関数等式は

$$\zeta_i(\Phi; s) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s) \zeta_j^*(\hat{\Phi}; s - \delta), \quad \Phi \in \mathcal{S}(V) \tag{1.1}$$

と定式化できる．ここで，$\hat{\Phi}$ は Φ の Fourier 変換，$\gamma_{ij}(s)$ は Φ と無関係な $q^{-s_1}, \ldots, q^{-s_r}$ の有理関数，また，δ は $X_\rho^{\mathbb{C}} = X_{\rho^*}^{\mathbb{C}}$ の元とみなしている．

2 球関数とゼータ関数の関係

$G=GL_m(\mathbb{Q}_p)$ とおく．実数体上の場合と同じく，局所ゼータ関数と $H\backslash G$ 上の一種の球関数との間に関係がつく．$\Phi\in\mathcal{S}(V)$ を固定し，局所ゼータ関数から定まる $H\backslash G$ 上の関数

$$H\backslash G\ni Hg\longmapsto \zeta_i(Hg,\Phi;s):=\int_V |f(gx)|_i^s\,\Phi(x)\,dx$$

を考える．同様にして，双対概均質ベクトル空間から $\Phi^*\in\mathcal{S}(V^*)$ に対し $H\backslash G$ 上の関数

$$H\backslash G\ni Hg\longmapsto \zeta_j^*(Hg,\Phi^*;s):=\int_{V^*}\left|f^*({}^tg^{-1}y)\right|_j^s\,\Phi^*(y)\,dy$$

が考えられる．さて，Ass. 2 (b) より $X_\rho^{\mathbb{C}}$ と $X(\mathbf{P})\otimes\mathbb{C}$ とを同一視できるから，$s\in X_\rho^{\mathbb{C}}$ を $s=\sum_i z_i\det p_i$ (p_i は $p\in P$ の i 番目の対角ブロック）と表現し，$|p|^s=\prod_i|\det p_i|^{z_i}$ と定義する．また，$K_m=\mathbf{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$, $v_0=\binom{E_n}{0}$, $v_0^*=\binom{0}{E_n}$ とおく．このとき，次の補題が証明できる．

補題 1 (1) $g\in G$, $\Phi\in\mathcal{S}(V)$ として，

$$\omega_i(g;s)=\int_{K_m}|f(gkv_0)|_i^s\,dk,\quad \omega(\Phi)(s)=\int_P|p|^s\,\Phi(v_0p^{-1})\,|\det p|^{-m}\,d_lp$$

とおく．ここで，d_lp は P の左不変測度である．このとき，Φ が左 K_m-不変，すなわち，$\Phi(kx)=\Phi(x)$ ($k\in K_m$) を満たすならば，c を d_lp の正規化で定まる定数として

$$\zeta_i(Hg,\Phi;s)=c\,\omega_i(g;s)\omega(\Phi)(s)$$

が成り立つ．

(2) $g\in G$, $\Phi^*\in\mathcal{S}(V^*)$ として，

$$\omega_j^*(g;s)=\int_{K_m}\left|f({}^tg^{-1}kv_0^*)\right|_j^s\,dk,\quad \omega^*(\Phi^*)(s)=\int_P|p|^s\,\Phi(v_0^{*t}p)\,|\det p|^{-m}\,d_lp$$

とおく．このとき，Φ^* が左 K_m-不変，すなわち，$\Phi^*(ky)=\Phi^*(y)$ ($k\in K_m$) を満たすならば，c を (1) と同じ d_lp の正規化で定まる定数として

$$\zeta_J^*(Hg,\Phi^*;s)=c\,\omega_j^*(g;s)\omega^*(\Phi^*)(s)$$

が成り立つ．

この補題に現れた $\omega(\Phi)(s)$, $\omega^*(\Phi^*)(s)$ は次の関数等式を満たす.

定理 2 $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に対して, 関数等式

$$\omega(\Phi)(s) = \gamma_0(s)\omega^*(\hat{\Phi})(s-\delta),$$
$$\gamma_0(s) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{e_i} \frac{1 - p^{-(z_i+e_i+\cdots+e_r+j)}}{1 - p^{z_i+e_1+\cdots+e_i+m-j)}}$$

が成り立つ. ここで, $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ は $|p|^s = \prod_i |\det p_i|^{z_i}$ で定める.

この定理は $(K_m \times P, \rho, V)$ に対する関数等式と見ることができる. しかし, K_m が線型代数群の $\mathbb{Q}_p$-有理点の群ではないので, $(K_m \times P, \rho, V)$ は通常の定義に従えば概均質ベクトル空間とは言えないが, Ass. 3 はこの空間についても成り立っており, 概均質ベクトル空間の p-進局所関数等式の理論はそのまま適用でき, 上の定理の関数等式が得られる. $\gamma_0(s)$ の決定は, Φ が $M_{m,n}(\mathbb{Z}_p)$ の特性関数の場合に関数等式の両辺を計算すればさほどの困難もなく得ることができる.

関数等式 (1.1), 補題 1, 定理 2 を合わせると, 次の ω_i, ω_j^* の間の関数等式が得られる.

定理 3

$$\omega_i(Hg; s) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\gamma_{ij}(s)}{\gamma_0(s)} \cdot |\det g|^{-n} \cdot \omega_j^*(Hg; s-\delta).$$

この定理により, 概均質ベクトル空間の p-進局所関数等式のガンマ行列 $(\gamma_{ij}(s))$ を知るには ω_i, ω_j^* の間の関数等式が計算されればよい. ω_i, ω_j^* は等質空間 $H\backslash G$ 上の球関数というべきものであり, その関数等式は, $H\backslash G$ 上の $\tilde{P}$-相対不変 distribution の絡作用素による像を計算することにより決定できる.

3 絡作用素と関数等式

まず, 準備として $G = \mathbf{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ の Poisson 変換について復習する.

3.1 GL_m の退化主系列表現と Poisson 変換

n の分割 $n = e_1 + \cdots + e_r$ に対し, $e_{r+1} = m - n$ とおいて m の分割 $m = e_1 + \cdots + e_r + e_{r+1}$ を考え, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{e_1,\ldots,e_r,m-n}$ でこの分割に対応する $\mathbf{GL}_m$ の (上三角) 放物型部分群を表す. $\tilde{P} = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbb{Q}_p)$ とおく. また,

$$m_i = e_1 + \cdots + e_i, \quad m_i^* = e_i + \cdots + e_{r+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, r+1)$$

とおく. $p \in \tilde{\mathbf{P}}$ の i 番目の対角ブロックを $p_i \in \mathbf{GL}_{e_i}$ と表す. $\lambda \in X(\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \mathbb{C}$ に対し,

$$I(\lambda) = \left\{ f \in C^\infty(G) \;\middle|\; f(gp) = f(g)\,|p|^{\lambda+\delta_P} \;\; (g \in G,\ p \in \tilde{P}) \right\}$$

とおく. ここで, $\delta_P = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{m_i - m_i^*}{2} \cdot \det p_i \in X(\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \mathbb{C}$ で,

$$|p|^{\lambda+\delta_P} = \prod_{i=1}^{r+1} |\det p_i|^{\lambda_i + (m_i - m_i^*)/2}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \cdot \det p_i$$

である. また, 完全非連結位相空間 X に対し $C^\infty(X)$ で局所定数関数の空間を表す. $I(\lambda)$ は放物型部分群のとり方に依存しているが, そのことを明示したいときには $I(\tilde{P};\lambda)$ のように書く. $\mathcal{S}(G)$ から $I(\lambda)$ への射影 pr_λ が

$$\mathrm{pr}_\lambda : \mathcal{S}(G) \longrightarrow I(\lambda), \quad \mathrm{pr}_\lambda(\phi)(g) = \int_{\tilde{P}} \phi(gp)\,|p|^{-(\lambda+\delta_P)}\, d_l p$$

で与えられる.

$\mathcal{D}(G) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(G), \mathbb{C})$ を G 上の distribution の空間という. $T \in \mathcal{D}(G)$, $p \in \tilde{P}$ に対し, distribution T^p を

$$\langle T^p, \phi \rangle := \langle T, \phi^{p^{-1}} \rangle, \quad \phi^{p^{-1}}(x) = \phi(xp^{-1})$$

によって定義する.

$$\mathcal{D}(G)_\lambda = \left\{ T \in \mathcal{D}(G) \;\middle|\; T^p = |p|^{\lambda+\delta_P}\, T \right\}$$

とおく. 射影 $\mathrm{pr}_{-\lambda} : \mathcal{S}(G) \to I(-\lambda)$ の随伴写像 $(\mathrm{pr}_{-\lambda})^* : I(-\lambda)^* \to \mathcal{S}(G)^* = \mathcal{D}(G)$ は同型

$$(\mathrm{pr}_{-\lambda})^* : I(-\lambda)^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(G)_\lambda$$

を引き起こす. 一方, $K = K_m$ と略記することにし, $C(G/K)$ で G 上の右 K-不変関数の空間を表すと, 自然な同型 $\mathcal{S}(G/K)^* \cong C(G/K)$ が存在

する．したがって，$\mathcal{D}(G)_\lambda$ に属す distribution を $\mathcal{S}(G/K)$ に制限することにより，

$$\mathcal{P}_\lambda : I(-\lambda)^* \cong \mathcal{D}(G)_\lambda \longrightarrow C(G/K)$$

なる写像が得られる．これを Poisson 変換という．$I(\lambda) \subset I(-\lambda)^*$ とみなせるが，このとき，$\phi \in I(\lambda)$ に対し，その Poisson 変換像は

$$\mathcal{P}_\lambda(\phi)(g) = \int_K \phi(gk)\, dk$$

で与えられる．

$\mathcal{H}(G,K)$ で G 上のコンパクト台を持つ両側 K-不変関数が合成積についてなす環（Hecke 環）を表す．このとき，$C(G/K)$ は

$$\phi * f(g) = \int_G \phi(gx^{-1}) f(x)\, dx \quad (\phi \in C(G/K),\ f \in \mathcal{H}(G,K))$$

により，右 $\mathcal{H}(G,K)$-加群の構造を持つ．そこで，

$$\mathcal{A}_\lambda(G/K) = \{\phi \in C(G/K) \mid \phi * f = \omega_\lambda(f)\phi \ (f \in \mathcal{H}(G,K))\},$$
$$\omega_\lambda(f) = \int_{\tilde{P}} f(p)\, |p|^{\lambda+\delta_P}\, d_r p$$

とおくと，$\mathcal{P}_\lambda$ の像は $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ に含まれ，$\mathcal{H}(G,K)$-準同型

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{D}(G)_\lambda \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda(G/K)$$

が得られる．パラメータ λ が一般の場合には，$\mathcal{P}_\lambda$ は単射となる。

準備の最後として Poisson 変換と絡作用素の交換関係を与える．G の Weyl 群の元 $w = \begin{pmatrix} 0 & E_{m-n} \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ を考える．${}^w\tilde{\mathbf{P}}$ を，Levi 部分群が $\tilde{\mathbf{P}}$ の Levi 部分群の w による共役となっているような，G の放物型部分群とする．具体的には ${}^w\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_{e_{r+1},e_1,\ldots,e_r}$ である．w は $X(\tilde{\mathbf{P}})\otimes\mathbb{C}$ から $X({}^w\tilde{\mathbf{P}})\otimes\mathbb{C}$ への自然な写像を引き起こす．この写像による λ の像も $w\lambda$ と記す．

$\lambda \in X(\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \mathbb{C}$ は一般の元として，絡作用素 $A(w^{-1}) : I({}^w\tilde{P}; -w\lambda) \to I(\tilde{P}; -\lambda)$ を考える．$\mathbf{1}_{-\lambda}$, $\mathbf{1}_{-w\lambda}$ でそれぞれ $I({}^w\tilde{P}; -\lambda)$, $I(\tilde{P}; -w\lambda)$ の K-不変元で単位元で 1 の値をとるものを表し，c-関数 $c(w^{-1}; -w\lambda)$ を

$$A(w^{-1})\mathbf{1}_{-\lambda} = c(w^{-1}; -w\lambda)\mathbf{1}_{-w\lambda}$$

によって定める．このとき，

$$\mathcal{P}_{w\lambda} \circ A(w^{-1})^* = c(w^{-1}; -w\lambda)\mathcal{P}_{w\lambda} \tag{3.2}$$

が成り立つ.

注: Poisson 変換については, $\tilde{\mathbf{P}}$ が極小放物型部分群のときに [2] で詳しく調べられた. 極小でない場合の研究も興味がある.

3.2 関数等式

$s \in X_\rho^{\mathbb{C}} = X(\mathbf{P}) \otimes \mathbb{C}$ に対し,

$$\Psi_{\lambda,i}(g) = |f(gv_0)|_i^s, \quad \Psi^*_{w\lambda,j}(g) = \left|f^*({}^t g^{-1} v_0^*)\right|_j^{s-\delta}$$

とおく. ただし, λ は, $p \in \tilde{P}$ に対し p' で p のサイズ n の首座行列式を表したとき

$$|p'|^{-s} = |p|^{\lambda+\delta_P}$$

を満たす $X(\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \mathbb{C}$ の元である. これらの関数は s に関して解析接続され G 上の distribution を与えるが, 特に,

$$\Psi_{\lambda,i}(g) \in \mathcal{D}(G; \tilde{P})_\lambda, \quad \Psi^*_{w\lambda,j}(g) \in \mathcal{D}(G; {}^w\tilde{P})_{w\lambda}$$

であることが分かる. さらに球関数 ω_i, ω_j^* の定義より,

$$\omega_i(g;s) = \mathcal{P}_\lambda(\Psi_{\lambda,i}), \quad \omega_j^*(g; s-\delta) = \mathcal{P}_{w\lambda}(\Psi^*_{w\lambda,j})$$

である. この事実と関数等式 (3), 交換関係 (3.2) を合わせ, さらに, Poisson 変換の一般の λ に対する単射性を考慮すれば, 次の結果を得る.

定理 4

$$A(w^{-1})^*(\Psi_{\lambda,i}) = \frac{c(w^{-1}; -w\lambda)}{\gamma_0(s)} \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s) \Psi^*_{w\lambda,j}.$$

この定理は, 概均質ベクトル空間の p-進局所関数等式のガンマ行列も一種の c-関数とみなされることを示している. 絡作用素の積分表示を用いると, $c(w^{-1}; -w\lambda)\gamma_{ij}(s)/\gamma_0(s)$ を多項式の p-進ノルムの複素べき積分で表す式が得られるが, 絡作用素も非積分関数となる distribution $\Psi_{\lambda,i}$ もともにパラメータに関する解析接続を通じて定義され, しかも, 絡作用素の積分の収束域と $\Psi_{\lambda,i}$ が連続関数となるパラメータの領域とが disjoint なことも普通であり, その取り扱いは必ずしもやさしくはない.

参考文献

[1] J.-I. Igusa: Some results on p-adic complex powers, *Amer. J. Math.* **106**(1984), 1013–1032.

[2] S. Kato: On eigenspaces of the Hecke algebra with respect to a good maximal compact subgroup of a p-adic reductive group, *Math. Ann.* **257**(1981), 1-7.

[3] F. Sato: On functional equations of zeta distributions, *Adv. Studies in pure Math.* **15**(1989), 465–508.

[4] F. Sato: Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators, *Proceedings of Japan-German Seminar*, September 2001.