数理解析研究所講究録 1469 巻 2006 年 96-100

理論の単純性について
– n-simplicity に関する考察 –

坪井明人 (Akito Tsuboi)
筑波大学数理物質科学研究科 (University of Tsukuba, Graduate School of Pure and Applied Sciences)

n-単純性は単純理論をさらに分類するために Kolesnikov によって与えられた概念である．特に 1-単純性は通常の単純性に一致する．Independence Theorem は2つのタイプ $p_a(x)$, $p_b(x)$ に関する融合性であるが，x と同時に a, b も変数と考えることにより，$\{a,b\}$, $\{a,x\}$, $\{b,x\}$ というという3点中の2点に関する条件を同時に満足する a,b,x の存在を主張する定理と考えられる．この意味で Independence Theorem は 1-単純性のもとで，3-融合性が成立することを主張する．そこで一般に n-単純性のもとに $n+2$-融合性が成立すると考えることは自然な予想である．しかし Kim は $n=3$ ですでに反例が存在することを示した．本講究録においては，一般の奇数の n において，n 単純だが，$n+2$ 融合性が成立しない例を与える．

1 二つの簡単な例

R を2変数（対称，非反射的）述語記号とする．R-構造はグラフと考えられる．

Definition 1 *1.* $K_0 \subset \mathcal{K}$ は3角形を排除する有限グラフ全体．

2. $K_1 \subset \mathcal{K}$ は，任意の3点に対して，それらの間に存在する辺の数が偶数個となる有限グラフの全体とする．

Fact 2 *1.* K_i $i=0,1)$ はともに AP（グラフの融合性）を持つ．

2. したがって，K_i はジェネリック構造 M_i を持つ．

Proposition 3 (*Hrushovski* の例) M_0 は単純ではない．

Proof: このことを二通りの見方で示そう．1. Let $I=(a_ib_i)_{i\in\omega}\subset M_0$ を $R(a_i,b_j)\wedge\neg R(a_i,b_i)\wedge\neg R(a_i,a_j)\wedge\neg R(b_i,b_j)$ 1 $i\neq j$ なる一様列とする．また $\varphi(x,y,z)$ を $R(x,y)\wedge R(x,z)$ なる論理式とする．このとき，$\{\varphi(x,a_i,b_i):i\in\omega\}$ is 2-inconsistent となる．したがって T は単純ではない．

2. $\mathcal{M}\succ M_0$ を big model としよう．$a,b\in\mathcal{M}$ を $R(a,b)$ なる2点とする．さらに a,b は M_0 の点とは R で繋がっていないとする．

$$p_a(x)=\{R(x,a)\}\cup\{\neg R(x,d):d\in M_0\},$$

$$p_b(x) = \{R(x,b)\} \cup \{\neg R(x,d) : d \in M_0\}.$$

このとき $p_a|M_0 = p_b|M_0$ である．しかし，p_a と p_b の共通の拡大は存在しない．(存在すれば3角形ができてしまう.)

Remark 4 M_1 について考える. M_1 は単純である．実際安定である．$\mathcal{M} \succ M_1$ を big model とする．

1. $a, b \in \mathcal{M}$ を $R(a,b)$ なる2点とする．さらに $d_a, d_b \in \mathcal{M}$ を $R(d_a, a)$, $R(d_b, b)$ なる点とする．M を空でない集合とする．$\mathrm{tp}(d_a/aM)$ と $\mathrm{tp}(d_b/bM)$ は融合できない．したがって，一見すると Independence Theorem が成立しないように見え，単純でないように思える．しかし，実は $\mathrm{tp}(d_a/M) \neq \mathrm{tp}(d_b/M)$ である．$e \in M$ を任意に選び，3点集合 a, b, e を考える．$R(a,b)$ なので，K_1 の条件により，$R(a,e)$ かつ $\neg R(b,e)$ としてよい．d_a, a, e を考えると $\neg R(d_a, e)$ を得る．一方 d_b, b, e を考えると $R(d_b, e)$ を得る. したがって，$\mathrm{tp}(d_a/e) \neq \mathrm{tp}(d_b/e)$ である．
2. $E(x,y)$ を $\neg R(x,y)$ とする. E はちょうど二つのクラス (それぞれ無限) を持つ同値関係である．グラフ $M_1 = (|M_1|, R)$ は $(|M_1|, E)$ と bi-definable である. よって安定である．また弱い意味でも仮想元の消去を許さない．

2 General Case

n を偶数として，R を n 変数述語記号とする．考える R-構造は対称で，

$$R(a_1, ..., a_n) \Rightarrow a_i \neq a_j \ (i \neq j)$$

なる条件を満たすとする．R-構造 A に対して，$n(A)$ は R を満たす A の n 点部分集合全体の個数 $(mod\ 2)$ をあらわす．

Definition 5 条件 (*) は R-structure A に対する次の条件とする：

(*) $(n+1)$-点部分集合 $A_0 \subset A$ は常に $n(A_0) = 0$ を満たす．

Lemma 6 *(Main lemma)* A を $n+2$ 点からなる R-構造とする．A が条件 (*) を満たさなければ, 少なくとも二つの n-点部分集合 $A_0, A_1 \subset A$ で $n(A_i) \neq 0$ $(i = 0, 1)$ となる．

Proof: A_i $(i = 1, ..., n+2)$ を A の $(n+1)$-点部分集合全体とする．このとき

$$\sum_{i=1,..,n+1} n(A_i) = 2 * n(A).$$

したがって，A_i が $n(A_i) = 1$ となれば, 少なくとももう一つ $n(A_i) = 1$ となる集合が存在する．

K を条件 $(*)$ を満たす有限 R-構造全体のクラスとする.

Lemma 7 K は AP を持つ.

Proof: $Aa, Ab \in K$ とする. $B = Aab$ とおく, ただし $R^B = R^{Aa} \cup R^{Ab}$.
A の大きさ $|A|$ に関する帰納法で, (R^B を増やすことにより) B は K の元に拡張できることを示す. $A = \{a_1, ..., a_m, a_{m+1}\}$ とする. 帰納法の仮定により, $B_0 = \{a_1, ..., a_m, a, b\} = B \setminus \{a_{m+1}\}$ は K に属する (すなわち $(*)$ を持つ) と仮定してよい. 各 $X_0 \subset \{a_1, ..., a_{m-1}\}$, $|X_0| = n-3$ に対して, $R(X_0 \cup \{a_{m+1}, a, b\})$ であるか否かを $n(X_0 \cup \{a_m, a_{m+1}, a, b\}) = 0$ が成立するように決定できる. B が性質 $(*)$ を持つことを示そう. そうでないとする. このとき, $(n+1)$-element subset $Y \subset B$ で $n(Y) = 1$ となるものが存在する. Y は Aa にも含まれないし, Ab にも含まれない. また Y が B_0 に含まれないことも帰納法の仮定によりわかる. さらに, われわれの構成法により, Y が点 a_m を含むこともない. したがって, Y は $Y_0 \cup \{a_{m+1}, a, b\}$, $Y_0 \subset \{a_1, ..., a_{m-1}\}$, $|Y_0| = n-2$ の形をしていなければならない. $Y^* = Y \cup \{a_m\}$ を考える. $n(Y) = 1$ なので Y^* は性質 $(*)$ を持たない. したがって, Main Lemma により, $(n+1)$ 点集合 $Y' \subset Y$, $Y' \neq Y$ で $n(Y') = 1$ となるものがある. しかしこれは不可能である.

T_n を K-ジェネリック構造の理論とする. T_n は $SU = 1$ なる理論となる. $\mathcal{M}$ を T_n の big model として, この中で議論する.

Lemma 8 T_n $(n \geq 4)$ は *weak elimination of imaginaries* を持つ.

Proof: 簡単のために $n = 4$ とする.

Claim A $X = ABCD$ を以下の条件を満たす R-構造とする:

- $ABC, ABD, ACD \in K$,
- A, B, C, D は互いに *disjoint*.

このとき R-構造 $Y \in K$ で次を満足するものがある:

- Y の領域は $ABCD$,
- $Y|ABC = X|ABC$, $Y|ABD = X|ABD$, $Y|ACD = X|ACD$.

最初に $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{d\}$ の場合を考える. $A = \{a\} \cup \{a_i\}_{i \leq m}$ とする. 集合としての Y は $ABCD$ である. R^Y を以下のように定義する. 4 点集合 $F \subset Y$ に対して,

1. $F \subset ABD$, $F \subset ABD$, $F \subset ACD$ の場合は $Y \models R(F)$ if and only if $X \models R(F)$.
2. $F = \{a_i, b, c, d\}$ の形のときは, $Y \models R(F) \iff n(Fa) = 1$ in X. (したがって $n(Fa) = 0$ in Y.)

このように定義した Y が K に属することを証明する．もしそうでなければ，Y は5点集合 F' で $n(F')=1$ となるものを持つ．構成法（性質1，2）から，F' は $F'=\{a_i,a_j,b,c,d\}$ の形である．6点集合 $F'a$ を考えよう．$F'a$ は K に属さないので，main lemma によれば，5点集合 $F''\subset F'a$ で $n(F'')=1$, $F''\neq F'$ となるものが存在する．このとき $F''=\{a,a_i,b,c,d\}$ または $F''=\{a,a_j,b,c,d\}$ でなければならないが，いずれにしても性質2に矛盾する．後は，$|B|+|C|+|D|$ に関する帰納法で証明できる．(Claim A の証明終わり)

Claim B $\mathcal{M}$ の中で議論する．$\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と $\psi(\bar{x},\bar{b})$ が同じ集合 $A\subset\mathcal{M}^n$ を定義していたとする．このとき A はパラメータ $\bar{a}\cap\bar{b}$ だけを用いて定義可能である．

Proof: $\aleph_0$-範疇性とＱＥにより，$\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と $\psi(\bar{x},\bar{b})$ は限量記号なしで，なおかつ完全なタイプ $p(\bar{x})\in S(\bar{a}\cap\bar{b})$ を生成しているとしてよい．. $p(\bar{x})$ が $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と同値になることを示そう．そうでないとする．このとき，限量記号なし論理式 $\varphi'(\bar{x},\bar{a})$ で

$$\varphi'(\bar{x},\bar{a})\vdash p(\bar{x})\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\}$$

となるものが存在する．$\bar{d}\in\mathcal{M}$ が $\varphi'(\bar{x},\bar{a})$ を満たしているとする．領域 $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$ を持つ R-構造 F で $F\models\varphi'(\bar{d},\bar{a})\wedge\psi(\bar{d},\bar{b})$ となるものがある．問題は F は K_n に属さない可能性があることである．しかし claim A を使うと，次のような $F'\in K_n$ を F から作ることができる．$F|\bar{a}\bar{d}=F'|\bar{a}\bar{d}$, $F|\bar{b}\bar{d}=F'|\bar{b}\bar{d}$, $F|\bar{a}\bar{b}=F'|\bar{a}\bar{b}$. ジェネリック性から，$\bar{a}\bar{b}\bar{d}'\subset\mathcal{M}$ を $\bar{a}\bar{b}\bar{d}'\cong_{\bar{a}\bar{b}}F'$ となるようにとれる．$\mathcal{M}$ において $\neg\varphi(\bar{d}',\bar{a})\wedge\psi(\bar{d}',\bar{b})$ となる．これは φ と ψ の同値性に反する．したがって $p(\bar{x})$ は $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と同値でなければならない．(End of Claim B)

$\bar{a}_E$ を仮想元とする．ただし，$E(\bar{x},\bar{y})$ は $\emptyset$-definable 同値関係である．$\bar{a}_0,\bar{b}_0,\bar{b}_1$ を

- $E(\bar{b}_i\bar{a}_0,\bar{a})$ $(i=0,1)$
- $\bar{a}_0\in\mathrm{acl}(\bar{a}_E)$ and $\bar{b}_1\cap\bar{b}_2=\emptyset$.

となるように選ぶ．このとき claim B により，$E(\bar{x},\bar{a})$ は $\bar{a}_0$ 上の論理式と同値になる．したがって $\bar{a}_E\in\mathrm{dcl}(\bar{a}_0)$ かつ $\bar{a}_0\in\mathrm{acl}(\bar{a}_E)$ を得る．

Proposition 9 （*Kim* の議論の一般化）T_n は *Kolesnikov* の意味で $(n-1)$-*simple* である．

Proof: $I=\langle a_i^0...a_i^k:i<\omega\rangle$ を C 上の一様列とする．また $J=\langle a_i^0...a_i^k:i<n-1\rangle$ を BC 上の一様列とする．$B'\cong_{JC}B$ をとり I を $B'C$ 上の一様列とする．$\mathcal{M}$ の中になくてよければ B' を I が $B'C$-一様列にすることは可能である．したがって $\mathcal{M}$ のジェネリック性を考えれば，この ICB' が性質 $(*)$ を持つことを示せば十分である．

そうでないとして，$(n+1)$ 点集合 $A=\{a_0,...,a_{n-1},e\}\subset ICB'$ を $n(A)=1$ であるように選ぶ．A が反例になっていないことを示そう．Kim のノートのように，$e\in B'$ で $a_i=a_i^{k(i)}$ $(i=0,...,n-1)$ と仮定してよい．$m=|\{k(i):i=0,...,n-1\}|$ とおく．m に関する帰納法を使う．

Case $m=1$. $k(i)$ たちの共通の値は0としてよい．$n(\{a_0^0,...,a_{n-1}^0\})=1$ とすれば，一様性から $n(\{a_0^0,...,a_n^0\})=n+1=1 \mod 2$ となって I 自身が K_n に属

さないことになってしまう．したがって，$n(\{a_0^0, ..., a_{n-1}^0\}) = 0$ でなければならない．よって，例えば $R(a_0^0, ..., a_{n-2}^0, e)$ となるが，J の e 上の一様性により，

$R(X, e)$ が任意の $(n-1)$-点集合 $X \subset \{0, ..., n-1\}$ で成立．したがって，$n(\{a_0, ..., a_{n-1}, e\}) = n = 0 \mod 2$. 矛盾．

Case $m = m_0 + 1$. 他の場合も同様なので，$|\{k(i) : i = 0, ..., n-2\}| = m_0$ で $k(n-1) \notin \{k(i) : i = 0, ..., n-2\}$ と仮定する．$(n+2)$ 点集合 $A^* = A \cup \{a_{n-1}^{k(n-2)}\}$ を考える．$n(A) = 1$ なので A^* は $(*)$ を満たさない．Main lemma により，$(n+1)$ 点集合 $A' \subset A^*$ で $n(A') = 1, A \neq A'$ がとなるものが存在する．$a_{n-1}^{k(n-2)}$ は A' の元である．$a_{n-1}^{k(n-1)}$ も A' に属していれば，A' は $\{a_{i_0}^{k(i_0)}, ..., a_{i_{n-3}}^{k(i_{n-3})}, a_{n-1}^{k(n-2)}, a_{n-1}^{k(n-1)}, e\}$ の形でなければならない．したがって，一様性により，$\{a_0^{k(i_0)}, ..., a_{n-3}^{k(i_{n-3})}, a_{n-2}^{k(n-2)}, a_{n-2}^{k(n-1)}, e\} \subset JCB'$ も反例でなければならない．$JCB' \cong JCB \subset \mathcal{M}$ なのでこれは不可能である．したがって A' は $\{a_0^{k(0)}, ..., a_{n-2}^{k(n-2)}, a_{n-1}^{k(n-2)}, e\}$ の形である．この A' に対して，m-value は $m-1$ である．よって A' はは反例になりえない（帰納法の仮定）．

次もすぐにわかる：

Proposition 10 T_n は $n+1$-融合性を持たない．

References

[1] Alexei Kolesnikov, 'n-simple theories', Annals of Pura and Applied Logic..

[2] Byunghan Kim, Alexei Kolesnikov and Akito Tsuboi, Generalized type-amalgamation and n-simplicity, draft.