

## 粉体せん断流における速度相関

九州大学大学院理学研究院 御手洗 菜美子 (Namiko Mitarai), 中西 秀 (Hiizu Nakanishi)  
Department of Physics,  
Kyushu University

### 1 はじめに：粉体流のレオロジー

粉体は、適当な外力の下では流体のように振舞うことが知られているが、そのレオロジーはよくわかっていない。密度が低く、衝突が粒子間相互作用を支配する流れについては、非弾性衝突する剛体球の運動論に基づいた構成方程式が、ある程度定量的に流れを記述できることが知られている [1]。一方、密度が高い流れでは、運動論からのずれが顕著になる。しかし、高密度な流れを定量的に記述できる構成方程式は確立しておらず、せん断応力  $S$  が速度勾配  $\dot{\gamma}$  の二乗に比例するという、バグノルド則 [2] とよばれるスケーリング則が知られているのみである。しかしここ数年、高密度な粉体流についての実験や数値実験 [3, 4, 5, 6] を通じて、レオロジーの定量的研究が盛んになりつつある。

我々は最近、斜面上の高密度な粉体流の、2次元での数値実験と運動論に基づいた構成方程式との定量的比較を行った [3]。比較に用いる運動論には、文献 [7] の、衝突の速度相関や異方性は無視しているが、静的な密度相関は、動径分布関数を用いてある程度取り入れられたものを採用した。その結果、圧力やずり応力はかなり高密度側までよく再現された。しかし、エネルギー散逸率については、高密度側での増加の仕方が、運動論の予想より数値実験の方がおそい傾向があることがわかった。

粉体系は非弾性衝突をするため、粒子間の相対速度が小さくなりやすく、空間的な速度相関が生じる傾向がある。粉体ガスの自由冷却状態 [8] や、熱浴をつけた粉体ガスの定常状態 [9] においては、この速度相関が、エネルギー散逸率を下げることで知られている。斜面流でのエネルギー散逸率の減少も、類似した速度相関の発達が一因である可能性がある。しかし同時に、せん断流があると、流れのない場合より相関が発達しにくいとも予想されるが、せん断流下における速度相関やエネルギー散逸は、特に高密度領域ではよく調べられていない。そこで我々は、重力下の斜面流よりも単純で、精度の高い数値実験が可能で、三次元の非弾性剛体球系のせん断流について、数値実験と運動論を比較して、速度相関と運動論からのずれの関係を明らかにすることを試みた。

## 2 せん断流における運動論とバグノルド則

数値実験結果を示す前に、一様せん断流における運動論に基づく構成方程式と、バグノルド則について簡単にまとめる。

### 2.1 運動論と構成関係式

運動論では、数密度  $n$ 、速度  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{c} \rangle$  に加えて、粉体温度  $T = \frac{m}{3} \langle (\mathbf{c} - \mathbf{u})^2 \rangle$  も、流体変数として取り扱う。ここで、 $m$  は粒子の質量、 $\mathbf{c}$  は個々の粒子の速度であり、 $\langle \dots \rangle$  は平均を表わす。また、空間は3次元とした。流体方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) n = -n \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$mn \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \cdot \Sigma, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2}n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \Sigma : \nabla \mathbf{u} - \Gamma, \quad (3)$$

と表わされる。ここで、 $\Sigma$  はストレステンソル、 $\mathbf{q}$  は熱流、 $\Gamma$  はエネルギー散逸を表わす。構成関係式は、非弾性衝突剛体球の運動論に基づいて導かれる。勾配の一次まで取り入れた計算では、

$$\Sigma = (P - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}) I - 2\mu D, \quad (4)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (5)$$

$$\Gamma(\nu, T) = m^{-1/2} \sigma^{-4} f_3(\nu) T^{3/2}, \quad (6)$$

$$P(\nu, T) = \sigma^{-3} f_1(\nu) T, \quad (7)$$

$$\mu(\nu, T) = m^{1/2} \sigma^{-2} f_2(\nu) T^{1/2}, \quad (8)$$

$$\kappa(\nu, T) = m^{1/2} \sigma^{-2} f_4(\nu) T^{1/2}, \quad (9)$$

$$\zeta(\nu, T) = m^{1/2} \sigma^{-2} f_5(\nu) T^{1/2}, \quad (10)$$

という形に書かれる<sup>1</sup>。ここで、 $I$  は単位行列で、 $D = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I$  であり、 $\sigma$  は粒子直径である。 $\nu$  は体積占有率で、関数  $f_i(\nu)$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) の関数形は、衝突モデルや近似法に依存する。例として、反発係数  $e_p$  一定の非弾性剛体球に対し、[10] で導かれた  $f_1(\nu) \sim f_3(\nu)$  を、表1に示した。式中にでてくる  $g_0(\nu)$  は動径分布関数の粒子直径だけ離れたところでの値で、粒子配置の静的な相関を取り入れるものである。

特に、エネルギー散逸率  $\Gamma$  については、速度相関が無視できれば、

$$\Gamma = \Gamma(\omega_0, T) = \frac{1 - e_p^2}{2} n \omega_0 T \quad (11)$$

<sup>1</sup>非弾性系では、一般には熱流に密度勾配に比例する項も加わる [10]。しかし、反発係数が1に近い場合、その項は通常温度勾配による熱流に比べて小さい。

$$f_1(\nu) = \frac{6}{\pi} \nu (1 + 4\eta \nu g_0(\nu))$$

$$f_2(\nu) = \frac{5}{16\pi^{1/2}\eta(2-\eta)} \left(1 + \frac{8}{5}\eta\nu g_0(\nu)\right) \left(\frac{1}{g_0(\nu)} + \frac{8}{5}\eta(3\eta-2)\nu\right) + \frac{48}{5\pi^{3/2}}\eta\nu^2 g_0(\nu)$$

$$f_3(\nu) = (1 - e_p^2) \frac{72}{\pi^{3/2}} \nu^2 g_0(\nu)$$

表 1: [10] による構成関係式。  $\eta \equiv (1 + e_p)/2$  である。

と書きなおすことができる。ここで、 $\omega_0$  は衝突頻度である。この式は、相対速度の法線成分が  $v_0$  であるとき、衝突一回あたりのエネルギー散逸は  $\frac{m}{4}(1 - e_p^2)v_0^2$  であり、速度相関が無視できれば  $v_0^2$  の平均は  $2T/m$  と見積もられることを表わす。さらに、速度相関が無視できれば衝突頻度  $\omega_0$  は  $\sqrt{T/m}$  に比例し、(11) は (6) に一致する。

また、静的な密度相関を衝突頻度に取り入れたエンスコック理論を用いると、衝突頻度は

$$\omega_0 = 4\sqrt{\pi}g_0(\nu)n\sigma^2\sqrt{T/m} \quad (12)$$

と与えられ [11]、(11) 式と (12) 式、及び三次元球では  $\nu = \frac{\pi}{6}\sigma^3 n$  であることを用いれば、(6) 式と表 1 の  $f_3(\nu)$  が導出される。

## 2.2 せん断流の運動論による解析

次にせん断流を考える。 $z$  軸に垂直な面に  $x$  方向のせん断をかけ、空間変化は  $z$  方向しかない定常流が実現したとき、流体力学方程式 (2)、(3) は次式を与える：

$$\frac{\partial}{\partial z} P = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} S = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} q_z + S\dot{\gamma} - \Gamma = 0. \quad (15)$$

ここで、速度勾配  $\dot{\gamma} = \partial_z u_x$  であり、 $S = \mu\dot{\gamma}$  はせん断応力である。更に、実現するのが  $\dot{\gamma}$  一定の一様せん断流であれば、温度は一定で  $q_z = 0$  となる。このとき、エネルギー方程式 (15) は粘性発熱とエネルギー散逸の釣合いの式  $S\dot{\gamma} = \Gamma$  になる。これに構成関係式 (8) と (6) を代入して整理すれば

$$T = m\sigma^2 \frac{f_2(\nu)}{f_3(\nu)} \dot{\gamma}^2 \quad (16)$$

がえられ、温度は速度勾配の2乗に比例する。このとき、(16)を用いて、(7)と(8)の応力の温度依存性を消去すれば

$$P = m\sigma^{-1} \frac{f_1(\nu)f_2(\nu)}{f_3(\nu)} \dot{\gamma}^2, \quad (17)$$

$$S = m\sigma^{-1} \sqrt{\frac{f_2(\nu)^3}{f_3(\nu)}} \dot{\gamma}^2 \quad (18)$$

と表わされる。これは、バグノルド則  $S \propto \dot{\gamma}^2$  と同じ形をしている。バグノルド則は、粒子が剛体とみなせて粒子変形の時間が無視でき、かつ外部からの「熱流」の影響をうけない ( $\nabla \cdot \mathbf{q} \ll S\dot{\gamma} \approx \Gamma$ ) 場合<sup>2</sup>、流れを特徴づける時間スケールが  $\dot{\gamma}$  のみであることによることを用いた次元解析でも理解でき [3, 6]、剛体球の一樣せん断流はこの次元解析が成り立つ状況の一つである。

### 3 数値実験結果

#### 3.1 エネルギー散逸率、圧力、せん断応力の密度依存性

数値実験には、直径  $\sigma$ 、質量  $m$ 、一定の反発係数  $e_p$  をもつ3次元剛体球を用い、イベントドリブンシミュレーションを行った。衝突アルゴリズムには、[12]により高速化されたものを用いた。境界条件は、 $x$ と $y$ 方向には周期境界条件とし、 $z$ 方向にはLees-Edwards境界条件を用いて速度勾配  $U/L_z$  のせん断をかけた。ここで、 $U$ は境界の速度、 $L_z$ は $z$ 方向のシステムサイズである。系の大きさは、 $x$ 方向を  $20\sigma$ 、 $y$ 方向を  $10\sigma$ 、 $z$ 方向を  $40\sigma$  に固定し、粒子数をかえた数値実験を行なった。また、反発係数は  $e_p = 0.92$  とした。以下の結果は、長さの単位を  $\sigma$ 、質量の単位を  $m$ 、時間の単位を  $L_z/U$  として示す。

数値実験では、若干の揺らぎがあるもののほぼ密度と温度一定、平均速度は  $\mathbf{u} = ((U/L_z)(z - L_z/2), 0, 0)$  の一樣せん断流が実現した (つまり、速度勾配  $\dot{\gamma} = U/L_z$ )。非弾性系の一樣せん断流は長波長の揺らぎに対して線形不安定であるという解析もいくつかあるが [13]、今回用いたシステムサイズと境界条件では一樣せん断流が安定に実現した。

図1(a)に、体積占有率  $\nu$  に対して、温度をプロットした。ただし、ここでは  $\alpha$  方向の温度を  $T_\alpha = \langle (c_\alpha - u_\alpha)^2 \rangle$  と定義し、 $\alpha = x, y, z$  をそれぞれ示している。温度 (速度揺らぎ) には若干の異方性がみられ、どの密度でも、 $y$  方向の温度が低い傾向があることがわかる。また、 $0.30 < \nu < 0.45$  の領域では密度があがるにつれて温度が下がるが、 $0.45 < \nu$  では温度があがる傾向がある。

図1(b)には、数値実験で得られたエネルギー散逸率  $\Gamma^{(m)}$  を  $\times$  で、(11)式に温度の平均  $T_{av}^{(m)} = (T_x^{(m)} + T_y^{(m)} + T_z^{(m)})/3$  と測定した衝突頻度  $\omega_0^{(m)}$  を代入して

$$\Gamma(\omega_0^{(m)}, T_{av}^{(m)}) = \frac{1 - e_p^2}{2} n \omega_0^{(m)} T_{av}^{(m)} \quad (19)$$

<sup>2</sup>粉体ではエネルギーは保存量でないため、例えば境界から系を駆動しても、熱流の影響は有限の距離で減衰し、バルクでは  $\nabla \cdot \mathbf{q} \ll S\dot{\gamma}$  が実現することが期待される。

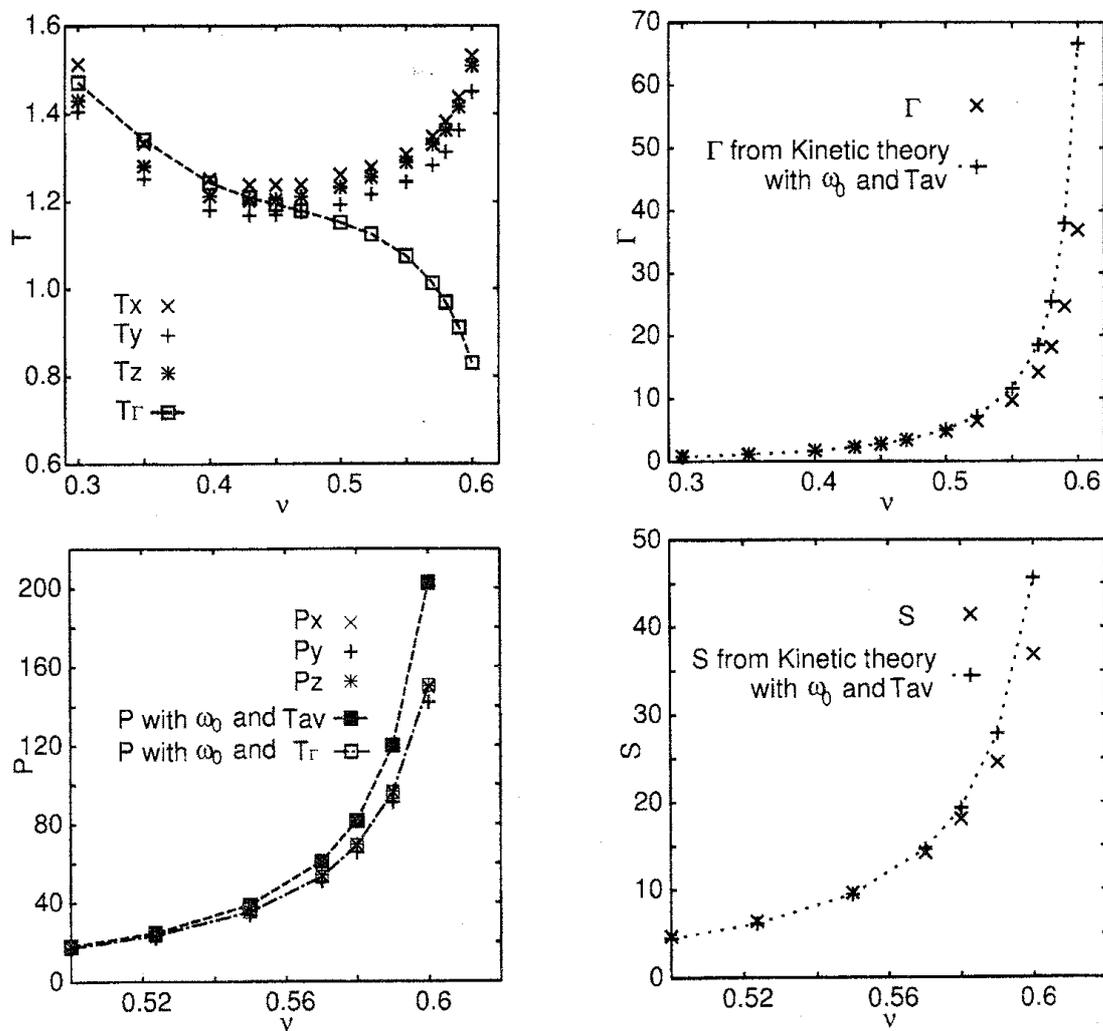


図 1: (a) 温度の体積占有率依存性。  $T_x$  は  $\times$ 、  $T_y$  は  $+$ 、  $T_z$  は  $*$  で示した。また、  $\square$  は (21) で定義される  $T_r^{(m)}$  である。(b) エネルギー散逸率  $\Gamma$  の体積占有率依存性。  $\times$  は数値実験で直接はかったもので、  $+$  は (19) 式による見積もり。(c) 圧力  $P$  の体積占有率依存性。測定値の  $x, y, z$  成分を各々  $\times, +, *$  で示した。また、  $\blacksquare$  は衝突頻度と平均温度を用いて運動論から求めた値で、  $\square$  は衝突頻度と  $T_r^{(m)}$  を用いて運動論から求めた値である。(d) せん断応力  $S$  の体積占有率依存性。  $\times$  が測定値、  $+$  は衝突頻度と平均温度を用いて運動論から求めた値。

と見積もったエネルギー散逸率を+で示した(上付き添字(m)は、測定した値であることを明示するためにつけた。また、区別をあきらかにするため後者のデータは線をつないだ)。低密度領域では両者はよく一致するが、密度があがるにつれて、(19)式の見積もりが過剰になっており、 $\nu = 0.6$ では、実測値の1.8倍近くになっている。

さらに、圧力 $P$ を数値実験で測定した結果と、運動論( $f_1(\nu)$ には表1を用いた)との比較を図1(c)に示した。圧力には異方性があったため、測定値の $x, y, z$ 成分を各々 $\times, +, *$ で示した。また、運動論の構成関係式にでてくる温度には、平均温度 $T_{av}^{(m)}$ を用いた。更に、 $f_1(\nu)$ には $g_0(\nu)$ の値が必要であるが、 $g_0(\nu)$ は(12)式から

$$g_0(\nu)_{T_{av}^{(m)}, \omega_0^{(m)}} = \frac{\omega_0^{(m)}}{4\sqrt{\pi}n\sqrt{T_{av}^{(m)}}} \quad (20)$$

と評価した。これらの値をいれた運動論の結果は■で示した。図1(c)には、高密度領域しか示していないが、低密度側では運動論と数値実験がよくあい、 $\nu \gtrsim 0.5$ の高密度側で運動論が過剰評価する傾向が見られる。

図1(d)には、ずり応力 $S$ について測定値( $\times$ )と、表1の $f_2(\nu)$ と $T_{av}^{(m)}$ 、及び(20)の $g_0(\nu)$ を用いた運動論の結果(+ )とを示した。やはり高密度側ほど運動論で過剰評価されるが、図1(b),(c),(d)を比較すると、ずれの程度は、エネルギー散逸率が一番大きく、圧力、せん断応力の順で小さくなっている。

### 3.2 衝突時の相対速度と平均温度のずれ

散逸のずれが、速度が非弾性衝突により局所的にそろうという点に起因するならば、その影響はまず、衝突頻度の実測値と運動論による表式のずれ、および衝突時の相対速度の減少となってあらわれるだろう。しかし(19)式では、衝突頻度は実測値 $\omega_0^{(m)}$ を用いているため、図1(b)でのずれの最大の部分は衝突時の相対速度と $\sqrt{2T_{av}^{(m)}}$ とのずれから来ていると予想される。一方で、衝突時の相対速度の減少は、応力にも影響を与えるだろう。そこで我々は、散逸率の測定値と衝突頻度から、衝突時の相対速度を評価する「温度」 $T_{\Gamma}^{(m)}$

$$T_{\Gamma}^{(m)} \equiv \frac{2}{(1 - e_p^2)n\omega_0^{(m)}}\Gamma^{(m)} \quad (21)$$

を定義して、応力の運動論による見積もりに、 $T_{av}^{(m)}$ のかわりに $T_{\Gamma}^{(m)}$ を用いた場合、どの程度改善されるかを検討した。

図1(a)には、 $T_{\Gamma}^{(m)}$ がプロットしてある(□)が、 $\nu > 0.45$ でも、 $T_{\Gamma}^{(m)}$ は密度に対して減少していることがわかる。図1(c)には、圧力の構成方程式の温度に $T_{\Gamma}^{(m)}$ を、動径分布関数に

$$g_0(\nu)_{T_{\Gamma}^{(m)}, \omega_0^{(m)}} = \frac{\omega_0^{(m)}}{4\sqrt{\pi}n\sqrt{T_{\Gamma}^{(m)}}} \quad (22)$$

を代入して見積もった圧力をプロット (□) した。その結果は、特に  $P_x$ 、 $P_z$  について非常によく一致しており、高密度側での圧力のずれが、衝突時の相対速度の、平均温度からのずれによるものと理解できることが期待される。一方、せん断応力  $S$  については、平均温度を用いた評価とほとんど違いがみられなかったため、図には示さなかった。

構成関係式の温度に  $T_T$  を用いると、圧力  $P$  の見積もりが改善されるのに、せん断応力  $S$  の見積もりに変化がみられないことは、構成関係式の高密度側の振舞いをみると理解できる。応力には、ストリーミング項と衝突項があるが、衝突項は  $g_0(\nu)$  に比例して (表1参照)、高密度側で非常に大きくなるので、高密度側の応力はほとんど衝突項だけで済む。更に、(12) 式を使って、 $g_0(\nu)$  を消去すれば、高密度側では

$$P \propto n\omega_0\sqrt{T}, \quad (23)$$

$$S \propto n\omega_0\dot{\gamma} \quad (24)$$

と振舞うことがわかる。 $T_T$  と衝突頻度  $\omega_0$  を用いて応力を評価すると、 $P$  は  $\sqrt{T}$  が下がるため小さくなるのに対し、 $S$  は  $\omega_0$  の寄与しかしないため変化しないのである。さらに、(23) と (24) を、(11) と比較すると、エネルギー散逸は温度への依存性が圧力よりも強く、相対速度を平均温度による見積りからずらすような速度相関の影響が、もつとも強くでることがわかる。

## 4 まとめと議論

三次元非弾性剛体球系の一様せん断流の数値実験を行ない、運動論による構成方程式と比較した。運動論の構成方程式に、測定した平均温度と衝突頻度をいれてエネルギー散逸率を見積もると、高密度領域で実測値より高い値が得られた。圧力、せん断応力についても、ずれの程度は小さいものの同様の傾向が得られた。

散逸率の減少が速度相関に起因するならば、衝突時の相対速度は平均の温度  $T_{av}$  よりも小さくなることが期待される。そこで、測定した散逸率  $\Gamma$  と衝突頻度  $\omega_0$  を用いて衝突時の相対速度を評価する「温度」 $T_T$  をもとめ、それを運動論の構成方程式にいれて圧力とせん断応力を評価しなおした。その結果、圧力は非常によく再現された。一方、運動論でのせん断応力の温度依存性は衝突頻度を通じてのみ入っており、 $T_T$  による改善はできなかった。

今後は、 $T_T$  と  $T_{av}$  の違いが、速度相関に起因することを直接的に明らかにすることを目指す。また、せん断応力の不一致については、衝突の異方性などが寄与しているのではないかと考えているが、その点についても調べて行きたい。

この研究は、科学研究費補助金（若手B：17740262、基盤C：16540344）の援助を受けて行われました。

## 参考文献

- [1] J. T. Jenkins and S. B. Savage, *J. Fluid Mech.* **130**, 187 (1983); C. S. Campbell, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 57 (1990); H. Xu, M. Louge, and A. Reeves, *Continuum Mech. Thermodyn.* **15**, 321 (2003).
- [2] R. A. Bagnold, *Proc. R. Soc. London A* **225**, 49 (1954).
- [3] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 128001 (2005).
- [4] O. Pouliquen, *Phys. Fluids* **11**, 542 (1999).
- [5] L. E. Silbert *et al.*, *Phys. Rev. E* **64**, 051302 (2002); L. E. Silbert, G. S. Grest, S. J. Plimpton, and D. Levine, *Phys. Fluids* **14**, 2637 (2002).
- [6] GDR MiDi, *Euro. Phys. J. E* **14**, 341 (2004); F. Crus *et al.*, *Phys. Rev. E* **72**, 021309 (2005).
- [7] J. T. Jenkins and M. W. Richman, *Phys. Fluids* **28** (1985) 3485.
- [8] R. Kawahara and H. Nakanishi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 68 (2004).
- [9] C. Bizon, M.D. Shattuck, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **60**, 4340 (1999).
- [10] C.K.K. Lun, S.E. Savage, D.J. Jeffrey, and N. Chepurnyi, *J. Fluid Mech.* **223**, 223 (1984).
- [11] S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gasses*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1970)
- [12] M. Isobe, *Int. J. Mod. Phys. C* **10**, 1281 (1999).
- [13] S.B. Savage, *J. Fluid Mech.* **241**, 109 (1992); 齊藤国靖、早川尚男、研究集会「複雑流体の数理とその応用」、京都大学数理解析研究所 (2005).