

鉛直振動する粒状体薄層の曲げ波とさざ波—固液相転移

東京農工大学・院工・物理 佐野 理 (Osamu Sano)  
 Department of Applied Physics,  
 Tokyo University of Agriculture and Technology

1. はじめに

われわれはこれまで鉛直に振動する粒状体に見られるパターン形成の実験を行ってきた。図 1 (b)は変形しない円形容器に薄く粒状体を敷き詰め加振したときの平面形で、ある振動数  $f$ 、振幅  $a$  での正弦波振動に対して観測された正方形セルである<sup>1)</sup>。

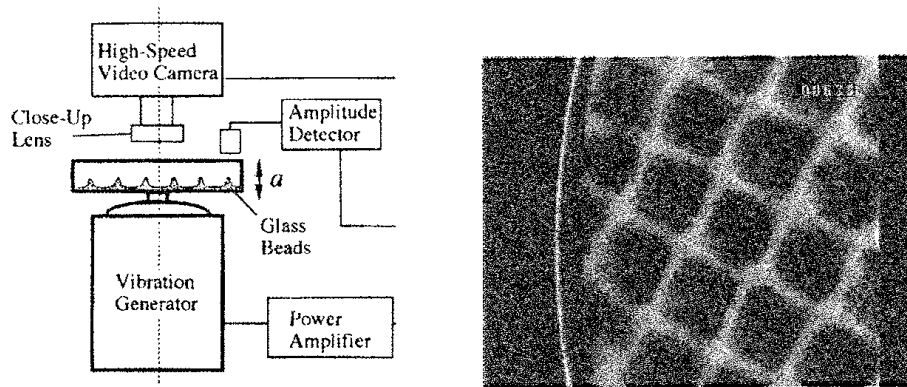


図 1. (a) 実験装置概念図, および (b) 観測されたパターンの例.

図 1(b)の白い部分は粒子が密集して山を形成し、黒い部分は粒子が少なくて容器底が見えている。この時刻から外部振動の 1 周期  $T (=1/f)$  の後には、正方形の中心を辺の交点とした(したがって半波長ずつ平行移動した)正方形セルになる。すなわち、このパターンは外部周期の 2 倍の周期で繰り返されるパラメトリック励振である<sup>2)</sup>。図の左側の円弧状の線は容器の側壁であるが、セルが容器壁の影響をほとんど受けていないことは注目に値する。そもそも円形容器で実験をしているので、セルの方位を決める理由がない。このことは、ひとたび正方形セルが作られるとその方位は安定に保たれるが、加振を止めた後に再び振動を与えるとまた別の方位に正方形セルができて安定に保たれるという実験事実と符合する。正方形セルが作られているときは、辺の向きは容器壁に対して様々な角度で交差しているが、その影響は容器のごく近傍に限られている。砂やガラスビーズのような散逸の大きな系であるから、側壁の影響が内部の領域まで達しないということは合理的ではある。しかし、逆にそのような散逸系でありながら内部全体に亘って一瞬のうちに長周期構造ができる理由は何だろう。

今度は奥行き方向に厚さの薄い縦長の容器内に粒状体を満たして鉛直方向に加振する。この状況は平面パターンで観測されたセルの辺に沿った鉛直断面を見たものにほぼ等しく、同じ振動数、振幅領域でパラメトリックな定在波が観測される。図 2 (a)に定在波(さざ波)の波長  $\lambda$  と層厚  $h$  の関係を示す<sup>3,4)</sup>。いずれも  $g/f^2$  で規格化しているが、注目すべきは波の発生時を除いて  $\lambda$  は  $h$  に依るが粒径  $d$  に依らないことである。

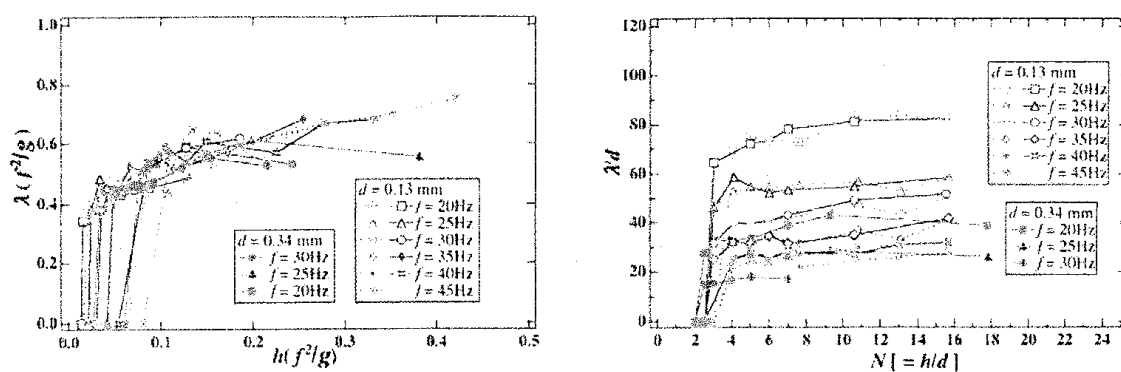


図2. さざ波の(a) 波長と層厚の関係, (b) 波長と層数の関係

この同じデータに対して, 粒径  $d$  を用いて規格化し表示したものが図2(b)である. 波長は粒径や振動数に依存するが, さざ波の発生する条件は層厚  $h$  ではなく, 層数  $N (= h/d)$  によって決定され, 臨界層数は  $N = 3$  程度になっている. それでは, 波長  $\lambda$  の波が発生しているときに, 層厚  $h$  を一定に保ったまま粒径  $d$  を増加させて  $N < 3$  としたらどうなるだろうか. すなわち, 波長の層厚  $h$  依存性というマクロな性格とさざ波の発生が粒子の層数  $N$  で決まるというミクロな性格はどこでつじつまを合わせているのだろうか. また層全体が変形しないで容器とともに上下する“固体”の状態から波動運動にみられる“流体”への遷移はどうなっているのだろうか? これらを明確にするために我々は新たに実験を行った.

## 2. 実験および結果

実験装置はこれまでと同じであり(図1(a)), 今回示す実験データはいずれも鉛球( $d=1.0$  mm または  $2.0$  mm)を用いたものである. まず, マクロな性格をもつ空間パターン, その時間変化, 分散関係, パターン・ダイアグラムなどについての結果を示す.

### 2.1 空間パターン

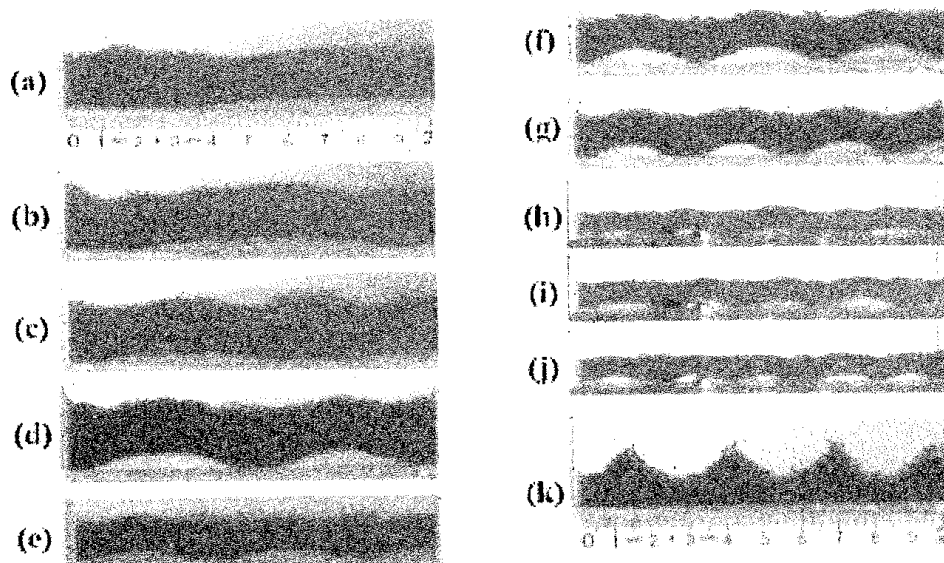


図3. 曲げ波(a)~(j)とさざ波(k)

観測された典型的なパターンを図3に示す<sup>5-7)</sup>. 図3の(a)~(j)は層全体がうねるように撓む“曲げ波(undulation)”で, 外部振動の2倍の周期( $2f$ )で同じパターンを繰り返している. これは Douady ら<sup>8)</sup>, Lan & Rosato<sup>9)</sup>, Goldshtein ら<sup>10)</sup>によって報告されているものと同等である. 層の厚さはほぼ一定で, 振動のどの位相においても層は容器底面から著しく離れることはない. 弾性体の板が撓み振動をしているのに類似している. 容器の側壁が山または谷となるので, アーチの数は半整数または整数になっている. ここでは前者を  $A_n$  型, 後者を  $S_n$  型と名づける. ただし  $n$  はアーチの数である. これに対して, 図3(k)では流体に見られるさざ波と同様の, しかし, 波頂が非常に急峻な定在波が見られる. これも既に多くの報告がある<sup>11-19)</sup>. 容器の側壁が必ずしも波の山や谷に一致するとは限らないし, 層全体が容器底面から離れている時間の割合が大きいことも通常の流体のさざ波とは異なっている. さざ波の周期が  $2f, 4f$  のもの (それぞれ  $f/2$ -ripple,  $f/4$ -ripple などと呼ぶ) が比較的容易に観測される.

## 2.2 分散関係

さざ波の分散関係については既に詳しく調べられており,  $\lambda/h \propto (f^*)^\alpha$  としたときの  $\alpha$  の値は -1.32(文献 19)や -1.47(文献 3)のようにフラクタルな指数になっているようであるが, まだ決着はついていない. ここで,  $f^* = f\sqrt{h/g}$  である. また, 波長と層厚(層数)に対する依存性は図2に示した通りである. 他方, 曲げ波については容器の水平サイズ  $L$  を反映した固有モードになっている.

## 2.3 パターン・ダイヤグラム

平面パターンの分類は  $f^*$ - $\Gamma$ ダイヤグラムで整理されることが多い<sup>16-21)</sup>. さざ波についても同様で, 粒径  $d$  によらず  $h$  でスケーリングされる<sup>6)</sup>. これに対して, 曲げ波の場合にはこの方法によるスケーリングは不適切である. また, 履歴効果が大きいのでバラツキも大きい.

つぎにマイクロな性質に着目する.

## 2.4 衝突のタイミング

図4は容器壁と粒状体層との関係を示したものである. 観測点はさざ波では山のピークの位置, 曲げ波ではアーチの頂点の位置を, それぞれ代表点に選んでいる.

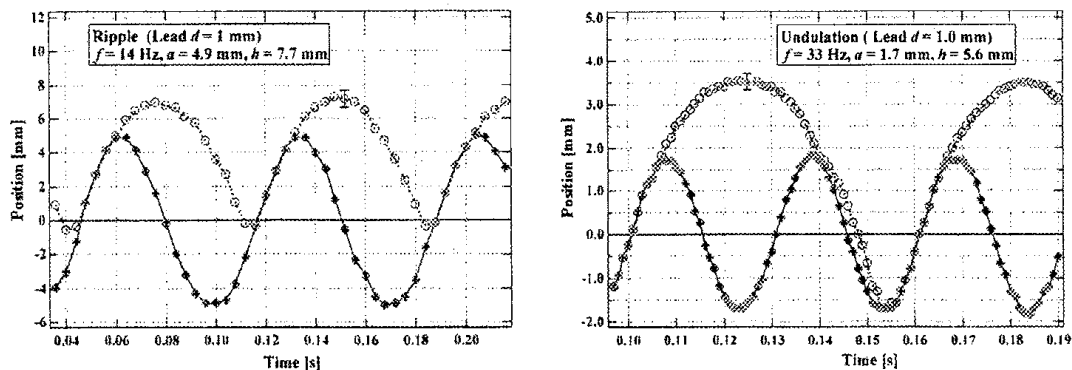


図4. 容器壁と粒状体層との関係. (a) さざ波と(b) 曲げ波.

さざ波では粒状体の層は容器の上昇速度がほぼ最大るときに衝突し、曲げ波では速度が負ないしは0付近で衝突していることが分かる。

## 2.5 粒子の軌跡

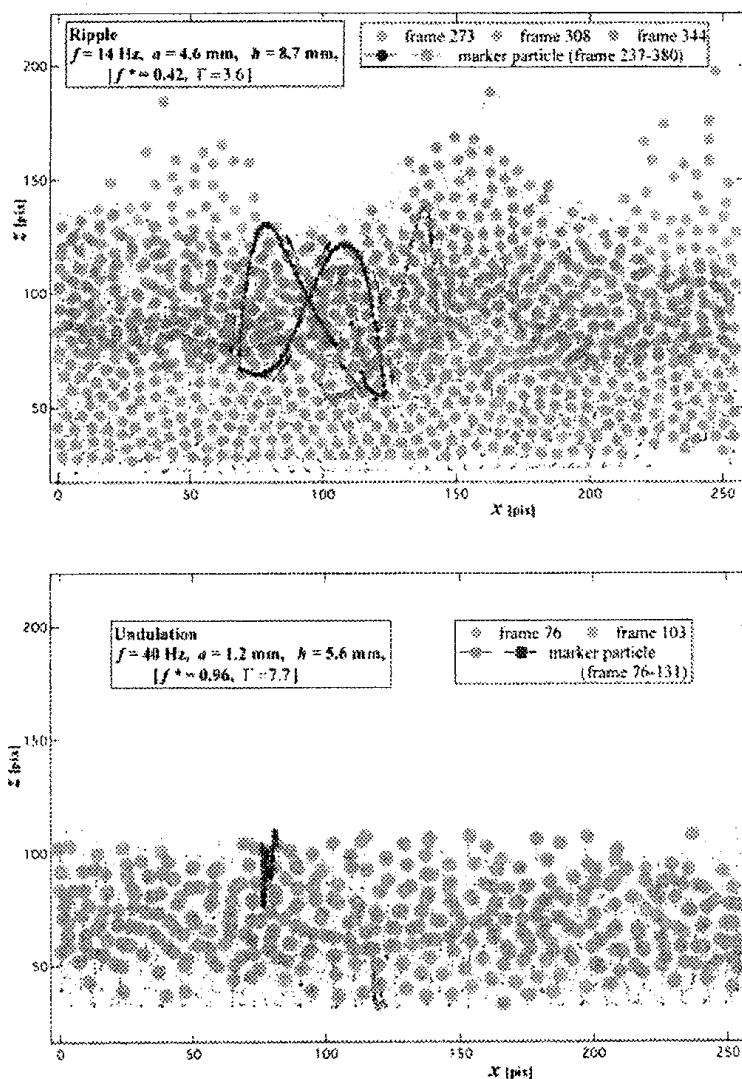


図5に(a)さざ波と(b)曲げ波のそれぞれの場合についての粒子の軌跡を示す<sup>22)</sup>。

いずれも、着目した粒子が容器に相対的にどのような動きをしているかを、振動パターンの1周期にわたって示したものである。さざ波では粒子は8の字を描くように大きな動きをするのに対して、曲げ波ではほぼ同じ水平位置で上下するだけである。前者の動きは“流体的”であり、後者の動きは“弾性的”である。

図5. 粒子の軌跡。  
(a)さざ波と(b)曲げ波

## 2.6 衝突時における粒子配置の変化

粒状体の層が容器底面に衝突したときにどのような粒子の動きが見られるかをさらに詳しく調べたものが図6である<sup>6,7)</sup>。この図は曲げ波の例であるが、容器に対する粒子の相対位置を高速ビデオカメラにより1ms間隔で撮影したものを6コマずつ重ね合わせたものである。粒子の輪郭がはっきりと見えるものは5msにわたってほとんど動いていないことを示している。粒子はほぼ最密充填状態にあるが、(a)では粒子層が下に凸になった部分がほぼ最密充填状態で落下しており、粒子間の中心を結ぶ線分の一つは鉛直方向に向いている。(b)では、容器底面に衝突した粒子から順に底面に沿って一列に並び始めている。ここでも最密充填に近い状態が保たれているが、粒子中心を結んでできる配向の変化が起こっている。これを模式的に示したものが図6(d)(e)である。このとき粒子の排除体積効果によって水平

方向には最大で $\Delta \equiv 2/\sqrt{3} \approx 1.1547\dots$  倍の膨張(ダイラタンシー)が生じる. すなわち, 最小で  $N_{\min} = N_0 \equiv 1/(2/\sqrt{3}-1) \approx 6.464$  個当たり 1 個分のスペースが足りなくなっている. これを解決するために, (c)のように層全体がアーチ状に湾曲し, 密度波が層に沿って伝播する.

水平方向の膨張を解決するためのもう 1 つの方法は,  $N_0$  個ごとに 1 個の粒子が粒状体の上の層に飛び出すことであり, これを核にして ripple が成長する. 衝突に際して最下層の粒子がすべて底面上に一直列に並ぶには, かなり大きな撃力を必要とするし, 現実には粒子間の摩擦力により粒子の並びはジグザグになるので,  $N_{\min}$  は  $N_0$  の数倍(実際, 図 3(k)の例では波長は  $25d$  程度であるから  $N_0$  の 4 倍程度)となっている.

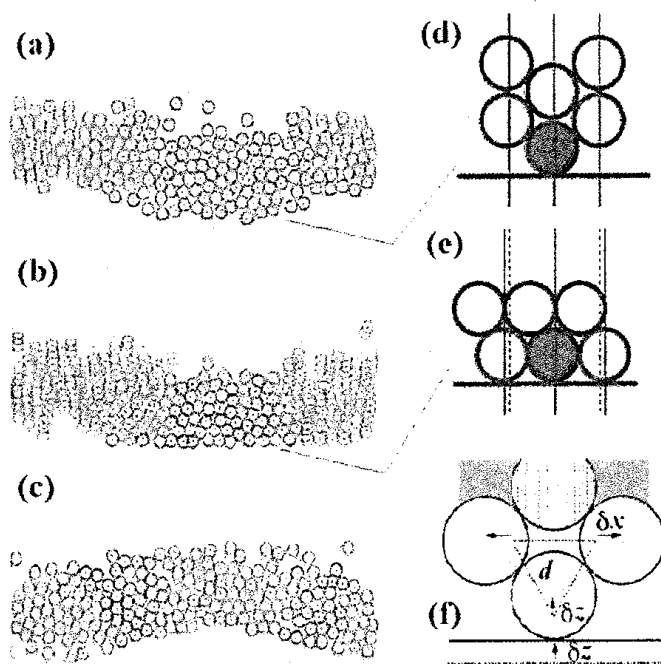


図 6. 容器底面への衝突時における粒子配置の変化と水平方向の膨張

### 3. 議論

#### 3.1 水平方向の膨張と曲げ波 vs. さざ波

われわれの実験で明らかになったことは, 粒子の局所的な配置組み換えが原因となって生じる水平方向のダイラタンシーを解決するために, 粒子の一部が層表面に飛び出して流体的なさざ波を作るか, あるいは粒子配置はほぼ平衡位置にあるが全体が弾性的に湾曲して曲げ波を作るということである(図 7 参照). ところで, このようなダイラタンシーが起こる最小の層数はどの程度であろうか? これはもちろん粒子の密度や形, 摩擦係数, 反発係数などいくつかの物理量に依存すると思われるが, 非常に大雑把な言い方をすれば 3 層程度——容器底面に衝突する層, それに隣接して割込みをかける層, それらが自由に上方に飛び去らないように押さえている層——と考えてよい(図 8 参照)<sup>6)</sup>. この臨界層数以下では粒状体は質点系力学, それ以上では連続体力学の世界になる, というのが我々の現在描いているイメージである. 図 1 (b)の例も, 実は層数が 5~10 で観測されたものであった. 容器側壁はパターンに影響しないと述べたが, それなら長距離秩序構造の原因は内部に求めなければならない. それが容器底面への粒状体の一様衝突による一様な応力増加と考えれば説明がつく.

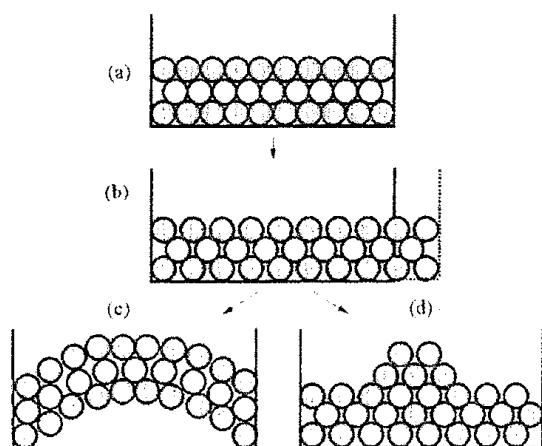


図7. 水平方向の膨張による変形(a)(b),  
(c) 曲げ波, (d) さざ波の模式図

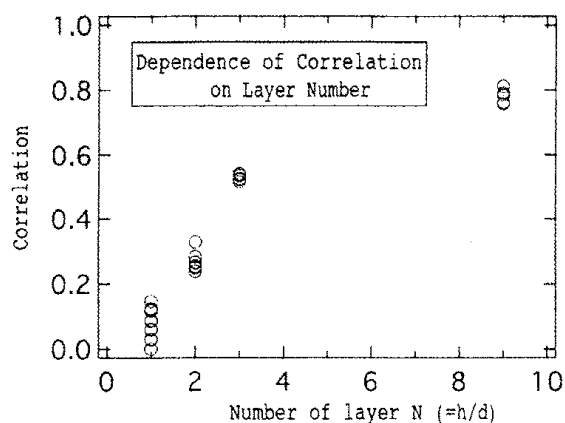


図8. パターン相関の層数依存性

### 3.2 衝突の位相と曲げ波 vs. さざ波<sup>22)</sup>

さざ波が発生するためには、水平方向の膨張に加えて最上層部の粒子(まで)が流動状態にあることが必要である。ここで“まで”と言ったのには多少の注釈が必要である。われわれが扱っているようなほとんど密に詰まった固い粒状体では、隣接粒子間で非常に短時間の間に衝突が繰り返され運動量が輸送される。したがって、ほとんど粒子の相対運動がないような粒状体領域でも、一端に運動量を与えられると他端の粒子が運動することが起こる。どの程度の層数までこの運動量が減衰しないかがさざ波の発生の判定条件となる。

そこで簡単なモデルとして、粒子が鉛直方向に等間隔で並び速度  $V_0$  で落下しているものを考える。容器底面が速度  $W$  で上昇し、下から順に多重衝突するものとする。

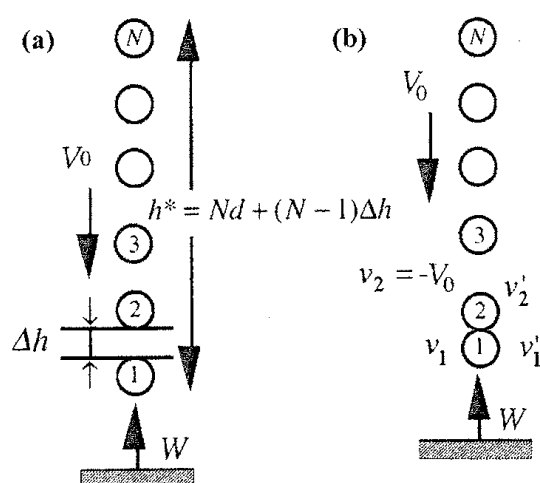


図9. 粒子の多重衝突

粒子 $k$ の速度は

$$v'_k = -V_0 + 2 \left( \frac{1+e}{2} \right)^k (V_0 + W) \quad (1)$$

したがって、粒子 $n^*$ で上昇速度が0になるとすると

$$n^* = \frac{\log[2(1+\tilde{W})]}{\log[2/(1+e)]} \quad (2)$$

$$\text{ただし } \tilde{W} = \frac{W}{V_0} \quad (3)$$

とおいた。

判定条件(2)によれば、層数  $N$  が  $n^*$  以上であれば粒状体の表層が自由に動けないので曲げ波に、それ以下であればさざ波が観測されることになる。我々の実験結果をプロットしたものが図10である。鉛球の集合体の跳ね返り係数  $e$  をどの値に選ぶべきか任意性が残され

ているが、仮に 0.7~0.8 に選ぶとすると、上の判定条件は実験誤差の範囲内ではほぼ満たされている。

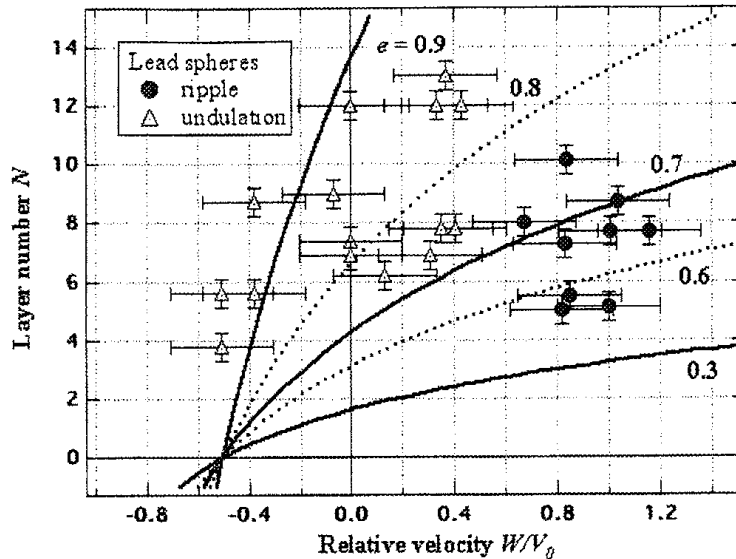


図 10. さざ波と曲げ波の出現と衝突時の相対速度と層数

3.3 水平方向の膨張と座屈および曲げ波<sup>7)</sup>

粒子が容器底面と衝突して“割り込み”を起こしたときにどのようなことが起こり得るか考察しよう。図 6 (f) のように最下層の粒子が底面に押されて  $\delta z \ll d$  だけ第 2 の層に割り込み、第 3 以上の層は動かないとすると、第 2 の層の水平方向の変位  $\delta x$  は  $\delta x \approx \sqrt{3}\delta z$ 、これによる水平方向の膨張の割合は  $\frac{\Delta L}{L} \approx 2\sqrt{3} \frac{\delta z}{d}$  であるから、水平方向には応力  $f_H$  :

$$f_H = E^* \frac{\Delta L}{L} \approx 2\sqrt{3} E^* \frac{\delta z}{d} \tag{4}$$

が働く。ただし、 $E^*$  は粒状体層の実効的なヤング率である。この応力により長さ  $L$ 、高さ  $h$ 、奥行き方向長さ  $W$  の粒状体の板が曲率半径  $R$  の曲げを生じたとすると

$$-\frac{E^* I}{R} = F \sin \theta \quad \text{あるいは} \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\alpha^2 \sin \theta \quad (\text{ただし} \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{E^* I}}) \tag{5a, b, c}$$

が成り立つ。ここで、 $F = f_H W h$  は断面に働く力、 $I (\equiv W h^3 / 12)$  は曲げに対する断面の幾何学的慣性モーメント、 $s$  は層に沿って測った長さ、 $\theta$  は位置  $s$  において層の接線方向が水平面となす角度である。この方程式を解くと

$$\alpha s = \pm \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \equiv F(\varphi, k) \tag{6}$$

したがって、位置  $x$  における粒状体層の変位  $z$  は

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[ E(\text{am}(\alpha s), k) - \frac{1}{2} \alpha s \right]$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left[ Z(\text{am}(\alpha s), k) + \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) \alpha s \right]$$
(7)

$$z = \frac{2k}{\alpha} [1 - \text{cn}(\alpha s)] \quad (8)$$

となる。ここで、 $F(\varphi, k)$ 、 $E(\varphi, k)$  はそれぞれ第 1 種および第 2 種の楕円積分、 $Z(\varphi, k)$  はヤコビのゼータ関数、 $\text{cn}(\alpha s)$  はヤコビの楕円関数である。いくつかのモードの例を図 1 1 に示す。

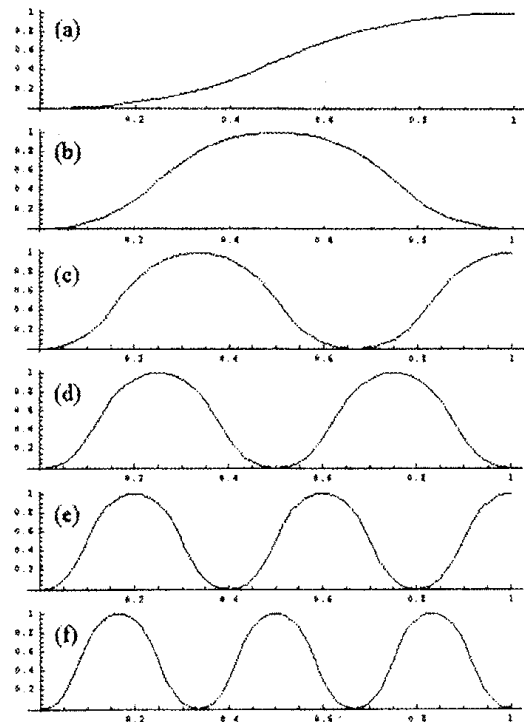


図 1 1. 曲げ波のモード：

(a)  $A_1$ , (b)  $S_1$ , (c)  $A_2$ , (d)  $S_2$ , (e)  $A_3$ , (f)  $S_3$

容器の鉛直方向の加振の加速度が小さいと、粒子最下層の割り込みも小さいので、粒状体の層は直線的な形を保ったまま上下する。しかし、加振がある臨界値に達すると座屈が生じて層は曲がるはずである。以下では、そのときの挙動を調べてみよう。まず、最低次  $M^* = 1$  のモード（これをオイラー荷重という）は

$$F_c = E^* I \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (9)$$

である。この臨界荷重より少し大きな力に対しては  $k \ll 1$  であって

$$k \approx \sqrt{\frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\alpha L}{\pi} \right)} \propto \sqrt{\frac{F - F_c}{F_c}} \quad (10)$$

と表され、高次のモード（波数）は

$$M^* = \frac{\alpha L}{2(2E - K)} = \frac{\alpha L}{\pi} \left( 1 + \frac{3}{4} k^2 + \dots \right) \approx \frac{2L}{\pi h} \sqrt{6\sqrt{3} \frac{\delta z}{d}} \quad (11)$$

となる。

最下層の粒子が上の層に割り込む長さ  $\delta z/d$  の大きさと、粒状体の層のアスペクト比  $L/h$  によりモードが決定される。層が薄い方が曲がりやすいので高次のモードが作られるのは直感的にもうなずける。これに対して割り込み長さ  $\delta z$  の見積もりは自明ではない。ここでは



一つの考え方として、粒子が容器から供給された運動エネルギーを割り込みに伴う摩擦力の仕事で費やしたと仮定する。すなわち、

$$\frac{1}{2}mV^2 = C\mu mg\delta z. \quad (12)$$

ただし、 $\mu$ は摩擦係数、 $C$ は任意定数である。これから $\delta z$ が求まるので曲げ波のモードは

$$\frac{L}{\lambda} \propto M^* \propto \frac{L}{h} \frac{fa}{\sqrt{\mu gd}} \quad (13)$$

となる。我々の実験結果を式(13)と比較したものが図12である。低いモードではバラツキも見られるが、全体としてはよい一致をみることができる。

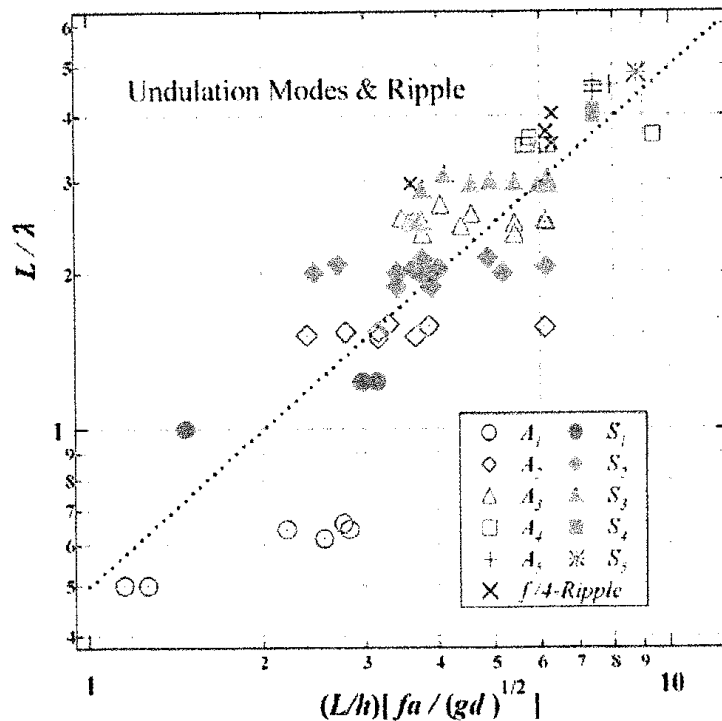


図12. 曲げ波のモードマップ

#### 4. おわりに

粒状体が外部からの加振により固体（ないしは弾性体）から流体の挙動に相転移する過程を眺めてきた。運動量やエネルギーの供給には、振動数、振幅、位相などが、またそれらの散逸には跳ね返り係数、摩擦係数、層数などが直接関係している。系が固体的であれば変形は大域的で曲げ波、流体的であれば局所的なさざ波という特徴的なパターンが観測される。曲げ波は容器サイズなどの境界条件の影響を強く受けるが、さざ波は影響を受けない。いずれのパターンも粒子の配置変化と排除体積にともなう膨張により引き起こされるが、それが大域的効果として現れるか局所的となるかは、履歴にも依存する。その奥には静止摩擦と動摩擦という未解決の問題が見え隠れしているように思われる。

## 参考文献

- [1] O.Sano, A.Ugawa and K.Suzuki : *Forma* **14** (1999) 321.
- [2] M.Faraday : *Phil. Trans. R. Soc. London* **52** (1831) 299.
- [3] A.Ugawa and O.Sano : *J.Phys.Soc.Jpn.* **71** (2002) 2815.
- [4] 佐野 理 : 日本物理学会誌 BUTSURI **60** (2005) 440.
- [5] A.Ugawa and O.Sano : *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** (2003) 1390.
- [6] K.Kanai, A.Ugawa and O.Sano : *J. Phys. Soc. Jpn.* **74** (2005) 1457.
- [7] O.Sano : *Phys. Rev. E* **72** (2005) 051302.
- [8] S.Douady, S.Fauve and C.Laroche: *Europhys. Lett.* **8** (1989) 621.
- [9] Y.Lan and A.D.Rosato: *Phys. Fluids* **9** (1997) 3615.
- [10] A.Goldshtein, M.Shapiro, L.Moldavsky and M.Fichman : *J. Fluid Mech.* **287** (1995) 349.
- [11] E.Clement, L.Vanel, J.Rajchenbach and J.Duran : *Phys. Rev. E* **53** (1996) 2972.
- [12] S.Luding, E.Clement, J.Rajchenbach and J.Duran : *Europhys. Lett.* **36** (1996) 247.
- [13] K.M.Aoki and T.Akiyama : *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4166.
- [14] T.H.Metcalf, J.B.Knight and H.Jaeger : *Physica A* **236** (1997) 202.
- [15] E.Clement and L.Labous : *Phys. Rev. E* **62** (2000) 8314.
- [16] F.Melo, P.Umbanhower and H.L.Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 172.
- [17] F.Melo, P.Umbanhower and H.L.Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3838.
- [18] P.Umbanhower, F.Melo and H.L.Swinney : *Nature* **382** (1996) 793.
- [19] P.Umbanhower and H.L.Swinney : *Physica A* **288** (2000) 344.
- [20] C.Bizon, M.D.Shattuck, J.B.Swift, W.D.McCormick and H.L.Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 57.
- [21] Sung Joon Moon, M.D.Shattuck, C.Bizon, Daniel I.Goldman, J.B.Swift and H.L.Swinney : *Phys. Rev. E* **65** (2002) 011301.
- [22] O.Sano : submitted to *Fluid Dyn. Res.*