

## 砂山形成過程における頂点移動のダイナミクス II

京都大学・人間・環境学研究科 占部 千由 (Chiyori Urabe)  
 Graduate School of Human and Environmental,  
 Kyoto University

## 概要

砂山形成過程のダイナミクスについてシミュレーションを用いて研究を行なった。離散要素法を用い、砂山上空の一点から1粒子ずつ時間間隔  $T$  で自由落下させ供給し続けた。頂点位置の時系列のパワースペクトルを計算すると、パワースペクトルは  $T$  によらず広い周波数領域でべき的になるが、巾の指数は  $T$  に依存する。 $T$  が短いときにはべきの指数は  $-1$  に近付き、 $T$  がある値を越えて大きくなると  $T$  の広い範囲で指数が近似的に  $-1.4$  になるの領域が現れた。2次元の砂山では  $T$  をさらに大きくした場合に指数がさらに小さくなる。 $T$  が小さくパワースペクトルが  $1/f$  的になる場合に着目し、運動エネルギーの時間変化を用いて雪崩を測定するした。雪崩の起きる斜面は時間によって入れ替わり、その入れ替わりを表す2値化した時系列  $K(t)$  のパワースペクトルは頂点の時系列のパワースペクトルと等しい指数をもつ巾関数で近似されることがわかった。3次元の場合には、全粒子の運動量の床と平行な2成分それぞれの平均を極座標表示した時の角度成分  $\theta$  を雪崩の方向を表す変数とした。 $\theta$  の時系列のパワースペクトルも2次元の場合と同様に頂点位置の時系列のパワースペクトルと近似的に等しいことがわかった。2値化された時系列の待ち時間分布が指数  $D$  のべき関数であり、時系列のパワースペクトルもべき関数で表されるとき、パワースペクトルの指数は  $-3-D$  となることが1993年に S. B. Lowen と M. C. Teich により解析的に求められている。パワースペクトルが  $1/f$  の場合には待ち時間分布の巾の指数が  $-2$  になると考えられ、実際に  $K$  の時系列の待ち時間分布を測定すると近似的に  $-2$  となることから理論により待ち時間分布とパワースペクトルの関係が説明されることがわかった。

## 1 はじめに

砂山形成過程は雪崩と粒子の積み上げの相互作用からなり、砂山表面の形状は時々刻々変化し続ける。本研究では砂山の形成過程を特徴づけるものとして頂点の位置に着目した。砂山の概形は頂点とすそのを通る円錐形であり、砂山に供給された粒子は砂山表面に沿って転がるため供給された粒子の堆積するおおよその方向が頂点の位置の情報から予測することができる。また雪崩によって頂点を含む斜面が削れれば、頂点の位置は雪崩と逆方向に移動する。頂点の位置は形状変化と雪崩の両方とそれぞれ常に密接な関係があるため、頂点移動のダイナミクスを考えることは砂山形成過程の理解に貢献できるものがあるのではないかと期待される。

本研究では数値シミュレーションを用いて2次元の砂山と3次元の砂山の形成過程の頂点移動について調べた。砂山形成過程を維持するために、時間間隔  $T$  で一粒ずつ砂山に

粒子を供給し続けた。 $T$ が小さいときは雪崩が続いている途中で粒子を供給するため雪崩の起きている砂山斜面は流動状態を保ちやすく、逆に $T$ が大きいときは雪崩がおわった後で粒子を供給することになるため新たな雪崩が発生しにくく雪崩の発生頻度は低い。頂点の時系列のパワースペクトルを計算すると、 $T$ の大きさによらず巾的になるが、巾の指数は $T$ の大きさに依存することがわかった。 $T$ が小さいときには頂点のパワースペクトルは $1/f$ 的になり特徴的時間が存在しない。 $T$ がやや大きい場合には $T$ の広い範囲で同じ指数が現れ、 $T$ をさらに大きくした場合には指数が更に小さくなる傾向が見られた。

頂点のパワースペクトルが $1/f$ 的になる場合に着目して考えると、常にどこかで雪崩が起きており、その雪崩によって頂点は頻繁に動かされる。雪崩を測るために2次元では砂山を左右半分に分け、それぞれの領域にある粒子の運動エネルギーの総和を計算し、運動エネルギーの大きさをその瞬間での雪崩の大きさとした。左右の領域の運動エネルギー $k_l, k_r$ の時系列を見ると、 $k_l$ あるいは $k_r$ の片方が大きくもう一方はそれに比べて非常に小さくなる傾向があり、 $k_l, k_r$ の大小は時間によって変化する。左斜面で雪崩が起きているとき( $k_l > k_r$ )を左モード、右斜面の場合( $k_r > k_l$ )を右モードと呼び、左モードの時を $-1$ 、右モードの時を $+1$ として運動エネルギー $k_l$ と $k_r$ の時系列から2値化した時系列 $K$ を作り、 $K$ のパワースペクトルを計算すると、頂点のパワースペクトルと同様の指数 $-1$ の巾関数となることがわかった。 $K$ の時系列と頂点の時系列が相関があり、パワースペクトルが巾的であり巾の指数が一致することより、頂点移動がモードのswitchingで置き換えることができた。3次元の砂山の場合には雪崩を測定するために粒子の運動量の平均を調べ、砂山底面と平行な2成分を極座標表示したときの角度成分を調べた結果2次元の場合と同様に頂点の時系列との間でパワースペクトルの巾の指数が一致することがわかった。

$K$ のような2値化された時系列のパワースペクトルについては既存の研究がある。ある2値化された時系列の同じ値が継続する時間(待ち時間)がそれぞれ独立であり、待ち時間分布とパワースペクトルが巾的になる場合には、待ち時間分布の巾の指数 $D$ とパワースペクトルの巾の指数 $\alpha$ の間に $\alpha + D = -3$  ( $-3 < D < -1$ )という関係が解析的に導き出される[1]。実際にシミュレーションにより $K$ の待ち時間分布を計算すると巾的になり巾の指数は近似的に $-2$ となったことから、モードの切り替わりの待ち時間が指数 $-2$ の巾関数で表されることが原因で時系列のパワースペクトルが $1/f$ 的になることがわかった。

## 2 設定

粒子の運動をシミュレーションするために離散要素法 (DEM) を用いた [2]。粒子は粘着性がなく、面 (体積) 密度は一定の円盤または球であるとする。接触中の粒子間には弾性力、粘性力、クーロン摩擦が、接触していない場合は重力のみが働くとする。弾性力を表すために粒子間に線形バネがあると仮定した。最大粒径と最大粒子質量を $d$ と $m$ とし、粒径分布は $(0.8d, d)$ で一様分布させる。2次元の場合はクーロン摩擦係数 $\mu = 0.5$ とし、

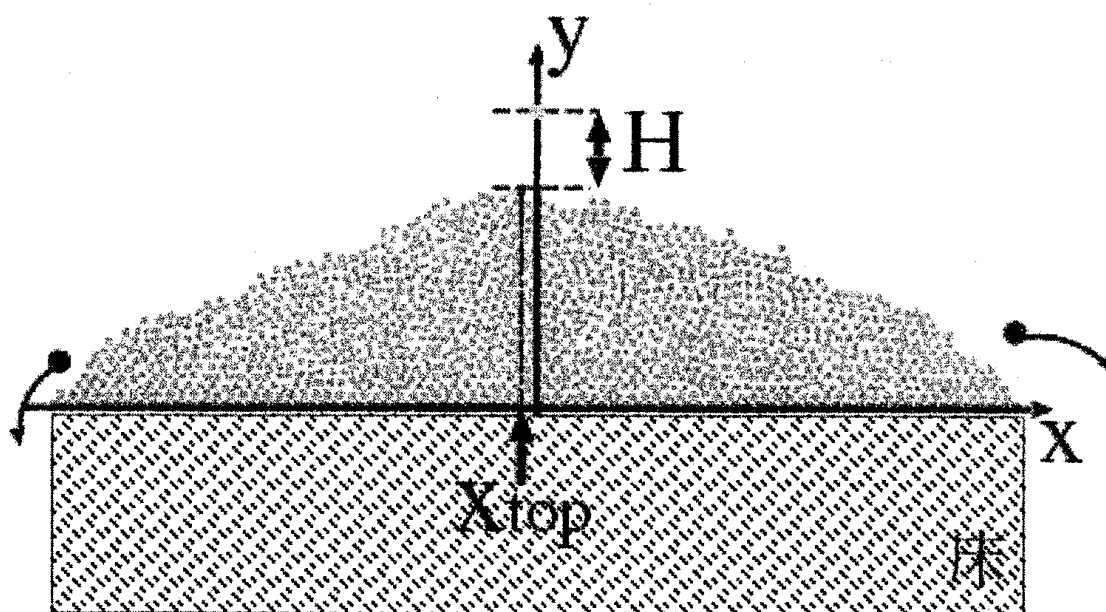


図 1: シミュレーションによる砂山。床平面と平行に  $x$  軸、鉛直方向に  $y$  軸をとり、原点は床の中心とする。 $x_{top}$  は頂点位置の  $x$  成分とする。 $y$  軸上の頂点からの高さ  $H$  の位置から粒子を供給する。

接線方向・法線方向のバネ係数はそれぞれ  $k_t = 2.0 \times 10^3 [g/d]$ ,  $k_n = 1.0 \times 10^4 [g/d]$  とし、接線方向・法線方向の粘性係数は  $\eta_n = 1.0 \times 10^2 [\sqrt{g/d}]$ ,  $\eta_t = 0.0 [\sqrt{g/d}]$  とし、3次元の場合は  $\mu = 0.2$ ,  $k_t = 2.5 \times 10^2 [g/d]$ ,  $k_n = 1.0 \times 10^4 [g/d]$ ,  $\eta_n = \sqrt{2\pi k_n/3} [\sqrt{g/d}]$ ,  $\eta_t = \eta_n/2.0$  とする。これらの値を適用するとどちらの場合も跳ね返り係数は約 0.2 となる。シミュレーションを行う上での時間刻  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3} [\sqrt{d/g}]$  とする。

頂点の位置は砂山を構成する粒子の中で粒子の重心がもっとも高い位置にあるものとする(図 1)。2次元の場合は砂山を支える床は粒径  $d$  の粒子 80 個を水平に並べたものとし、床は固定し  $x$  軸は床に沿ってとり  $y$  軸を鉛直方向上向きとし原点を床の中心とする。3次元の場合は床は直径  $30d$  の固定された円で、床平面を  $x-y$  平面とし鉛直方向上向きに  $z$  軸をとり、原点は 2次元の場合と同様に床の中心とする。

砂山形成過程における頂点のゆらぎについて調べるため、粒子を時間間隔  $T$  で砂山に供給し続ける。供給される粒子は床の中心の真上から自由落下させる。2次元の場合は図 1 のように常に頂点からの高さ  $H$  で粒子を放つが、3次元の場合は実験でも同じ設定で行いやすいように  $H$  は床からの高さとする。また、床を覆うようになるまで成長させた砂山を初期状態として使う。簡単のため 3次元の砂山では内部の粒子を固定した。床は有限で、床からこぼれ落ちた粒子は計算から除外するため、砂山の大きさはほとんど変化しない。

初期の砂山の上に粒子を供給し続け、頂点の時系列が定常状態に落ち着いたあとの時系列を取り出し、そのパワースペクトル  $S(f)$  を計算する。パワースペクトルを計算するために、時系列を時間間隔  $T^{(s)}$  で  $M$  等分し、 $m$  番目の時系列のパワースペクトル  $S_m(f_j)$  を

$$S_m(f_j) \equiv \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x_{top,n}^{(m)} e^{-\frac{2\pi i n}{N} j} \right|^2 \quad (1)$$

と定義する。但し、 $x_{top,n}^{(m)} = x_{top}((m + \frac{n}{N})T^{(s)})$ ,  $f_j = \frac{j}{T^{(s)}}$ 。  $S_m$  の平均、

$$S(f_j) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} S_m(f_j) \quad (2)$$

をパワースペクトル  $S(f)$  とする。

### 3 2次元の砂山における結果

$H$  は  $20d \leq H \leq 110d$  で変化させる。 $T$  が小さいとき頂点は頻繁に動くが、時間間隔  $T$  が長いと供給された粒子の衝突によって引き起こされた運動が次の供給までに減衰してしまうため頂点は  $T$  に比べて十分長い間ほぼ同じ場所に留まる傾向がある。図2にこれらの時系列のパワースペクトル  $S(f)$  を示した。 $S(f)$  は (1)(2) を用い、 $T^{(s)} = N = 10^4$ ,  $M = 10$  として計算した。図2より  $S(f)$  は巾的に振る舞い、その巾の指数は  $T$  に依存することがわかった。 $T = 2\sqrt{d/g}$  で  $S(f)$  は  $1/f$  的になり、 $T = 80\sqrt{d/g}$  では  $S(f)$  の巾の指数は  $-1$  よりも小さくなる。

$S(f)$  の巾の指数  $\alpha$  と  $T$ ,  $H$  との関係調べた。 $5/T^{(s)} \leq f \leq 1/(2T)$  の範囲で  $S(f)$  の両対数プロットから最小二乗法を用いて  $\alpha$  を計算した。 $\alpha$  は  $H$  の値の変化にそれほど敏感でないが (図3(b)),  $T$  には強く依存することがわかった (図3(a))。特に  $T \leq 10\sqrt{d/g}$  では  $T$  が小さくなるにしたがって  $\alpha$  が急激に  $-1$  に近づく。

今後、主に  $\alpha \cong -1$  が現れる  $T$  が小さい場合に焦点をしぼる。砂山を中心の領域  $-d \leq x \leq d$  を除いて、 $x = 0$  を中心として左右2つの部分に別け、それぞれの部分に含まれる粒子の運動エネルギーの総和  $K_l(t)$ ,  $K_r(t)$  を計算した。

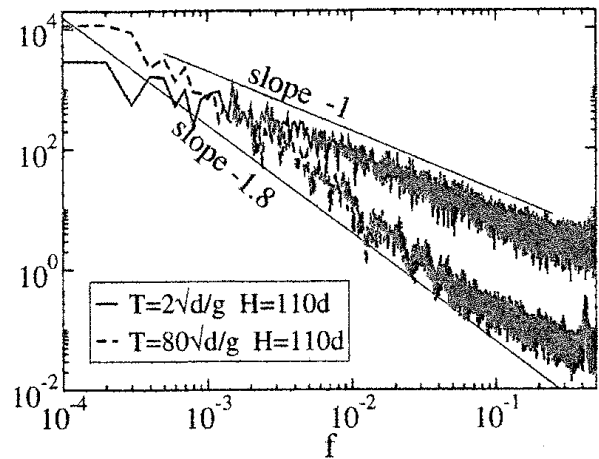


図2:  $x_{top}$  の時系列のパワースペクトルの両対数プロット。 $H = 110d$ ,  $T = 2\sqrt{d/g}$ (実線) と  $T = 80\sqrt{d/g}$ (点線)。

シミュレーションの観測から雪崩は砂山上の2つの斜面で同時に起きることは希であり、雪崩が砂山の右 ( $x > 0$ ) の斜面あるいは左の斜面 ( $x < 0$ ) で起きている状態をそれぞれ右モード、左モードと呼ぶことにする。2つのモードの切り替わりを調べるために、以下のように2値化した時系列を定義する。

$$K(t) = \begin{cases} +1 & K_l(t) < K_r(t) \text{ のとき} \\ -1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3)$$

$K(t)$  の符号は時刻  $t$  で主にどちらの斜面で雪崩が起きているかを示す。 $T = 2\sqrt{d/g}$ ,  $H = 20d$  のときの  $K(t)$  と  $x_{top}(t)$  の時系列のパワースペクトルを図4に示した。 $K(t)$  のパワースペクトルは長いタイムスケールで  $1/f$  的であり、 $x_{top}(t)$  のパワースペクトルと巾の指数が一致する。また、任意の  $x_{top}(t)$  に対する  $K(t) = -1$  の条件付確率を調べると、その確率は  $x_{top}(t)$  が増加するに従い増す。このことからそれぞれのモードにおいて  $x_{top}(t)$  は主に雪崩が起きている斜面とは反対方向に動く傾向があることがわかる。つまり  $x_{top}$  のゆらぎは2つのモード間の切り替わりとほぼ一致している。

#### 4 3次元の砂山における結果

頂点の座標を  $(x_{top}, y_{top}, z_{top})$  とし、テーブル表面と平行な成分は  $(x_{top}, y_{top})$  とする。形成過程における“雪崩と逆方向への頂点移動”も“積み上がりによる頂点が移動”もどちらの場合でも水平方向の動きで考えられることから  $(x_{top}, y_{top})$  に着目する。テーブルの形が円形であり粒子を供給する位置はテーブルの中央上空であるため、 $(x_{top}, y_{top})$  を極座標表示する。

$$r \equiv \sqrt{x_{top}^2 + y_{top}^2}, \quad \phi \equiv \arctan \frac{y_{top}}{x_{top}} \quad (0 \leq \phi < 2\pi)$$

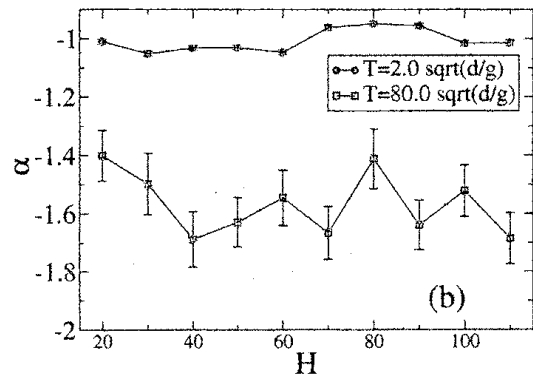
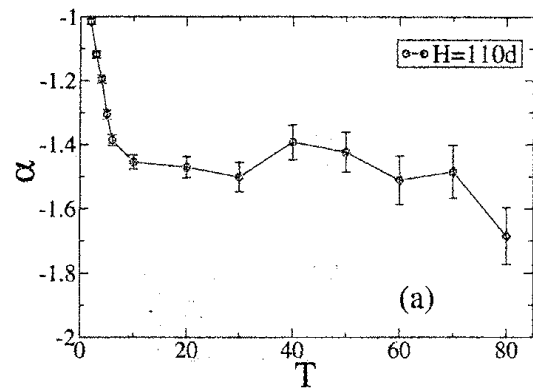


図 3: (a)  $\alpha$  の  $T$  に対する依存性。(b)  $\alpha$  の  $H$  に対する依存性。エラーバーの長さは標準偏差。

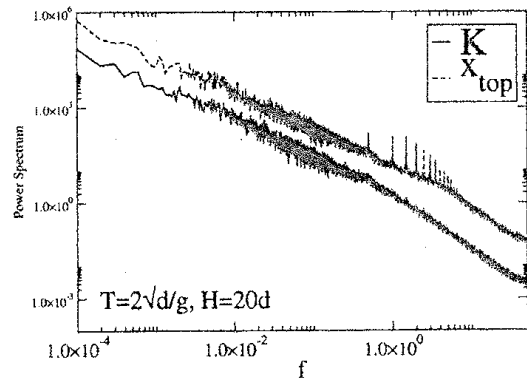


図 4:  $K(t)$  と  $x_{top}(t)$  時系列のパワースペクトル。 $T = 2\sqrt{d/g}$ ,  $H = 20d$

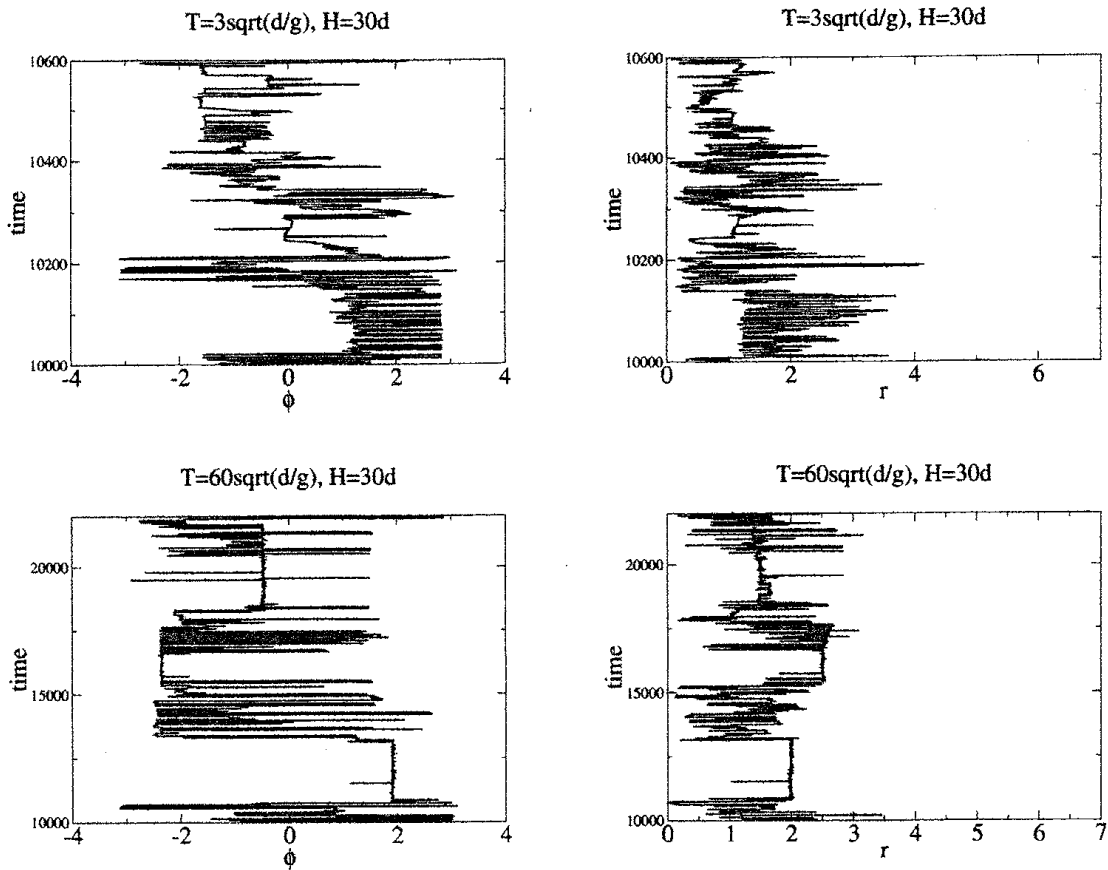


図 5:  $\phi$ (右) と  $r$ (左) の時系列。縦軸が時間であり、 $200T$  の間のデータを表示した。 $T = 3\sqrt{d/g}$  の場合(上) と  $T = 60\sqrt{d/g}$  の場合(下) について示す。

$\phi$  と  $r$  の時間変化を図 5 に示す。図 5 はそれぞれ 200 粒子が供給される間の時間の範囲で  $\phi, r$  の時系列を表したものであり、 $T = 3\sqrt{d/g}$  の場合(上) と  $T = 60\sqrt{d/g}$  の場合(下) では時間の長さが 20 倍違い、 $T = 60\sqrt{d/g}$  の  $\phi$  の図では時間にしておおよそ  $3000\sqrt{d/g}$  程度の間頂点と同じ位置にあることがわかる。長時間頂点と同じ位置に留まるということはほとんど雪崩が起きていないことを示す。

次に  $T = 3\sqrt{d/g}$  のときと  $T = 60\sqrt{d/g}$  のときの  $\phi$  の時系列からパワースペクトル  $S_\phi(f)$  を計算すると、どちらの場合も  $S_\phi(f)$  は広い範囲で巾的になるが、巾の指数は異なる(図 6)。  $T$  が小さいときには  $S_\phi(f)$  は  $1/f$  的になり、  $T$  が大きい場合には巾の指数は  $-1$  より小さくなる。

$T$  とパワースペクトル  $S_\phi(f)$  の巾の指数  $\alpha_\phi$  の関係を調べる。  $f = 1/T$  で粒子の供給の影響でパワースペクトルにピークや段差が生じるため、  $f = 1/T$  を避け範囲  $1.0 \times 10^{-3} \leq f \leq 1/(2T)$  で  $S_\phi(f)$  を両対数表示したグラフにたいして最小自乗法を用いて指数  $\alpha_\phi$  をフィットすると、  $T$  に対して図 7 のように変化する。  $T < 10\sqrt{d/g}$  では  $\alpha_\phi$  は  $T$  が小さくなるにつれて急激に  $-1$  に近づき、  $T > 10\sqrt{d/g}$  の範囲では  $\alpha_\phi \cong -1.3$  の領域が現れる。  $T$  を変化させても  $\alpha_\phi$  がほぼ同じ値をとる plateau 領域は 2 次元の砂山でも現れ、  $T$  が小

さいときに急激に  $\alpha_\phi$  が  $-1$  に近づくことも 2 次元の場合で現れた特徴と同じである。2 次元の場合はパワースペクトルが近似的に  $1/f$  となる時、左右の斜面の雪崩の切り替わりの時系列も  $1/f$  的になったことより、3 次元の砂山でも雪崩の方向の時系列を測定する。時刻  $t$  での運動量の  $x$  成分、 $y$  成分の平均を  $(p_x, p_y)$  とし、 $\phi$  を定義したように雪崩の方向  $\theta$  を

$$\theta = \arctan \frac{p_y}{p_x} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とする。 $\theta$  の時系列のパワースペクトルを計算すると図 8 のように、頂点のパワースペクトルとよく一致することがわかった。

3 次元の砂山でも 2 次元の場合と同様に頂点移動と雪崩の方向の切り替わりが密接に関係していると考えられる。また、3 次元の場合では砂山内部の粒子を固定しシミュレーションを行ったが、それでも 2 次元の場合と同様の結果が得られたため、本研究で現れたような頂点の時系列の性質が粒子の供給の時間間隔  $T$  によって変化するという現象については理論やシミュレーションでは 2 次元の砂山の表面流を考えることにより解明できると考えられ、次元によらず現れる現象であることより実験でも観測が可能であると予想される。

## 5 議論

(3) で定義された  $K(t)$  のような 2 値化された時系列について、時系列の待ち時間が巾分布に従い、それぞれの区間が独立であれば、そのパワースペクトルも巾関数で表されることが解析的に知られている [1, 3]。ここで待ち時間  $\tau$  を二値化された時系列の隣り合う切り替わりの間の時間間隔として定義する。 $\tau$  の確率分布密度  $p(\tau)$  を次式のような  $\tau = a, b$  でカットオフのある巾関数とする。

$$p(\tau) = \begin{cases} c\tau^D & a < \tau < b \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (4)$$

但し、 $a, b$  は定数で  $a \ll b$ 。  $c$  は規格化定数。  $1/b \ll f \ll 1/a$  の範囲で二値化された時系列のパワースペクトル  $S_b(f)$  は

$$S_b(f) \sim f^{-(D+3)}, \quad (-3 < D < -1) \quad (5)$$

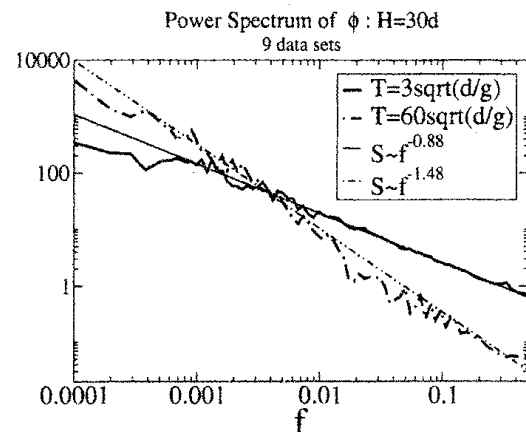


図 6:  $\phi$  の時系列のパワースペクトル。  
( $H = 30d, T = 3\sqrt{d/g}, 60\sqrt{d/g}$ )

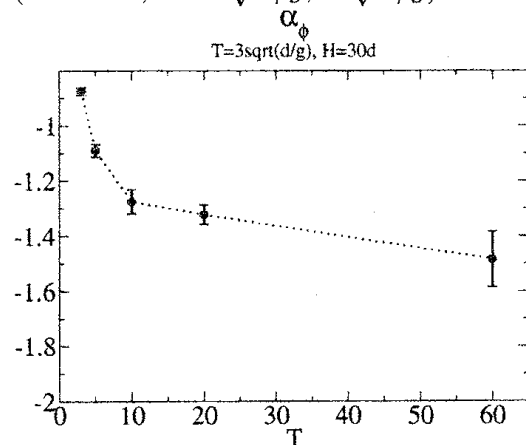


図 7:  $\alpha_\phi$  と  $T(H = 30d)$ 。

となる。 $T$ が小さい場合、シミュレーションでは $K(t)$ のパワースペクトルの中の指数は近似的に $-1$ であるため、 $p(\tau)$ は指数 $D \cong -2$ の中関数となることが予想される。しかしながら $K(t)$ の待ち時間は短いノイズによって寸断されるために、 $\tau \cong 100\sqrt{d/g}$ より長い待ち時間間隔はほとんど現れない。それゆえに時間幅 $60\sqrt{d/g}$ の median filter を利用し、粗視化された時系列の待ち時間分布 $p(\tau')$ を計算した。 $p(\tau')$ は図9のように近似的に巾則に従い、その指数は $-2$ であることがわかった。

頂点のパワースペクトルの中の指数 $\alpha \cong -1.4$ の plateau 領域は図3, 図7で $T$ の広い範囲で現れる。しかしながら、 $T$ が大きくなるにつれて雪崩のモードの切り替わりは $K(t)$ によって定義しにくくなる。頂点のゆらぎは粉体流の密度ゆらぎとなんらかの関係がある可能性がある。流体でみたされた鉛直パイプ内での粉体流の実験では密度の時間のパワースペクトルについて $-1, -4/3, -3/2$ が報告されており[4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]、交通流、ASEPでは $-1.4, -3/2$ が報告されている[12, 13, 14]。これらの指数は $-1.4$ に近い。

$T$ が十分大きくなるにつれて $\alpha$ は $-2$ に近付くと思われる。頂点は $T$ に比べて十分長い時間ほぼ同じ場所に留まり、頂点移動は雪崩の瞬間的な力によって引き起こされる。このとき頂点はランダムウォークのように動き、そのパワースペクトルは Lorentzian 的で $f^{-2}$ の減衰が現れると予想される。

## 6 まとめ

砂山形成過程は雪崩と供給された粒子の積み上げによって成り立ち、雪崩の発生の仕方は粒子の供給量によって大きく変化する。本研究では砂山頂点の移動を通して、形成過程を考えた。頂点の位置は雪崩によって雪崩と逆の方向に移動し、また粒子が雪崩を経験せずに積み上がることによって供給位置に引き寄せられるという性質をもつことから、頂点の位置のダイナミクスは形成過程と密接に結びついている。本研究ではシミュレーションにより2次元と3次元の砂山の頂点移動について調べた。

砂山上空の1点から時間間隔 $T$ で1粒子ずつ落とすことによって粒子の供給を行うこ

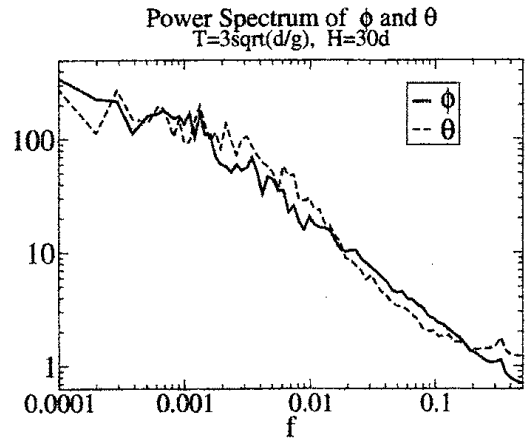


図8:  $\phi$ と $\theta$ の時系列のパワースペクトル。 $(H = 30d, T = 3\sqrt{d/g})$

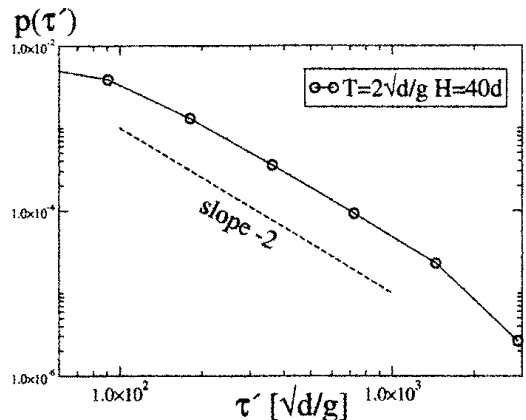


図9:  $H = 110d$ で $T = 2\sqrt{d/g}$ のときの $K(t)$ の待ち時間分布。



ととした。 $T$ が小さいときには供給量が大きいため常に砂山斜面のどこかで粒子が雪崩している状態を実現し、逆に $T$ が大ききときには粒子供給がほとんどないため表面は長い間固体的状態を保ち、雪崩は間欠的に発生する。頂点の時系列を測定しパワースペクトルを計算すると、 $T$ によらず広い波数領域で巾的になり、巾の指数は $T$ によって変化することがわかった。 $T$ が非常に小さいときにはパワースペクトルは $1/f$ 的になり、 $T$ がやや大きくなると巾の指数は減少し、 $T$ がある値を越えて大きくなると $T$ の広い範囲で近似的に同じ指数をもつ巾に従い、2次元では $T$ をさらに大きくすると指数が更に減少する。 $T$ の変化に対する頂点の時系列の性質の変化は粒子の供給量によって砂山形成過程の様相が変わることと対応していると考えられる。また、 $T$ が小さいとき系の運動エネルギーや運動量を用いて雪崩を計測し、雪崩の方向の時系列を生成すると、そのパワースペクトルは頂点の時系列のパワースペクトルとよく一致し $1/f$ 的になることがわかった。2次元では頂点からすその下る2つの斜面しかないため、雪崩の方向の時系列は2値化された時系列 $K$ で書き表すことができ、2値化された時系列について時系列のパワースペクトルが巾則に従い時系列の待ち時間分布も指数 $D$ の巾関数で表されるときパワースペクトルの巾の指数は $-D-3$ と表されることが解析的に求められており、これよりパワースペクトルの指数が $-1$ のときに待ち時間分布の指数が $-2$ であることが予想される。実際に $K$ の待ち時間分布を測定すると、近似的に指数 $-2$ の巾が現ることがわかった。このことより、 $K(t)$ の時系列のパワースペクトルが $1/f$ 的になることは待ち時間分布が指数 $-2$ の巾関数であることから説明された。

## 参考文献

- [1] S. B. Lowen and M. C. Teich. Fractal renewal process generate  $1/f$  noise. *Phys. Rev. E*, Vol. 47, p. 992, 1993.
- [2] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, Vol. 29, pp. 47–65, 1979.
- [3] Nobuko Fuchikami and Shunya Ishioka. Statistics of level crossing intervals. In Zoltán Gingl, José M. Sancho, Lutz Schimansky-Geier, and Janos Kertesz, editors, *Proceeding of Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics II*, Vol. 5471 of *Proc. SPIE*, pp. 29–37. SPIE, 2004.
- [4] Shin Horikawa, Akio Nakahara, Tomoo Nakayama, and Mitsugu Matsushita. Self-organized critical density waves of granular material flowing through a pipe. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 64, pp. 1870–1873, 1995.
- [5] Shin Horikawa, Takeshi Isoda, Tomoo Nakayama, Akio Nakahara, and Mitsugu Matsushita. Self-organized critical density wave of granular particles flowing through a pipe. *Physica A*, Vol. 233, pp. 699–708, 1996.

- [6] Akio Nakahara and Takeshi Isoda.  $1/f^\alpha$  density fluctuation at the slugging transition point of granular flows through a pipe. *Phys. Rev. E*, Vol. 55, pp. 4264–4273, 1997.
- [7] Osamu Moriyama, Naoya Kuroiwa, Mitsugu Matsushita, and Hisao Hayakawa.  $4/3$  law of granular particles flowing through a vertical pipe. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 2833–2836, 1998.
- [8] O. Moriyama, N. Kuroiwa, T. Isoda, T. Arai, S. Tateda, Y. Yamazaki, and M Matsushita. Dynamics and structure of granular flow through a vertical pipe. In M. Fukui, Y. Sugiyama, M. Schreckenberg, and D. E. Wolf, editors, *TRAFFIC AND GRANULAR FLOW '01*, pp. 437–448. Springer, 2001.
- [9] Yoshihiro Yamazaki, Sayako Tateda, Atsushi Awazu, Taichi Arai, Osamu Moriyama, and Mitsugu Matsushita. Dynamics of granular flow through a vertical pipe under the control of inflow rate. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 71, pp. 2859–2862, 2002.
- [10] Osamu Moriyama, Naoya Kuroiwa, Sayako Tateda, Taishi Arai, Atsushi Awazu, Yoshihiro Yamazaki, and Mitsugu Matsushita. Transition to density waves of granular particles flowing through a vertical pipe. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, Vol. 150, pp. 136–146, 2003.
- [11] Atsushi Awazu. Dynamics of granular particles flowing through a vertical glass pipe. Master's thesis, Chuo University, 2005.
- [12] Toshimitsu Musha and Hideyo Higuchi. The  $1/f$  fluctuation of a traffic current on an expressway. *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 15, p. 1271, 1976.
- [13] Toshimitsu Musha and Hideyo Higuchi. Traffic current fluctuation and the burgers equation. *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 17, pp. 811–816, 1978.
- [14] Shinji Takesue, Tetsuya Mitsudo, and Hisao Hayakawa. Power-law behavior in the power spectrum induced by brownian motion of a domain wall. *Phys. Rev. E*, Vol. 68, p. 015103(R), 2003.