

シーケンシャルセルオートマトンと可積分系

由良文孝 (公立ほこだて未来大学 複雑系科学科) *

Fumitaka Yura

Department of Complex Systems, Future University – Hakodate

概要

シーケンシャルセルオートマトンモデルを提案し、そこにおける可積分と呼ぶにふさわしいルールを考察する。本稿で考察するルールは超離散 Lotka-Volterra 方程式系に従う。その意味では従来の箱玉系と等価であるが、セルオートマトンとしてのモデルとルールは新しいものである。

1 はじめに

多くの自然現象は、時間空間変数、物理量が連続である。現象の理解のためにシミュレーションが行われることが多いが、そのために離散的なモデルの構築が有用な場合がある。セルオートマトン (Cellular Automata; CA) は離散的モデルの代表格であり、これまで精力的に調べられてきた。J. von Neumann や S. Ulam による 50 年代初頭の自己複製理論で CA は提案されたものである。また、もっとも有名な CA モデルは 60 年代後半の J. H. Conway によるライフゲームであろう。その多彩な動きを目にされた方は多いと思う。

CA はまた、並列計算機を念頭において計算機科学の分野では考えられてきた。並列計算機はスケラブルでなくてはならないし、局所的な情報伝達といった制限が妥当であるから、このような観点からも CA モデルは有用である。CA の計算万能性や一斉射撃問題などは比較的初期から考察されている。

シミュレーション手法として注目を集めたのは、格子ガスオートマトン法であろう。時間空間ともに離散化され、ある条件の下で Navier-Stokes 方程式による振る舞いとほぼ一致することが知られている。導かれる離散的なモデルは、離散化、超離散化の手法などを通して、連続的なモデルの性質を何らかの意味で保つことが必要である。可積分系として従属変数まで離散化されたモデルの例に箱玉系が挙げられる。対称性の低い Navier-Stokes 方程式と対称性の高い可積分系の両極端で CA モデルが考察されてきたことは興味深い。

*E-mail : yura@fun.ac.jp

箱玉系はソリトンセルオートマトンと呼ばれてきた。しかしそのルールはいわゆる CA の範疇のものではなく、「フィルター型」CA として区別されるものである。なぜ「フィルター型」でなければならないのかは自明ではない、と思われる。もちろん箱玉系は可解格子模型と関係を持ち背後に量子群が存在するから、あるいは、離散双線形形式に時間と空間がそういう形で入っているから、という説明は可能であるが、そこで本研究では逆に、従来の CA のルールをこの観点から変更し、シーケンシャルセルオートマトンとでも呼ぶべき系を考察する。このモデルが生成する現象の豊富さを図示し、ソリトン系までも含むことを証明することが本稿の目的である。

2 CA とフィルター型 CA, 箱玉系

従来の CA と本稿に関連するフィルター型 CA, 箱玉系の定義を概観する。

2.1 セルオートマトン (Cellular Automaton; CA)

d 次元 CA とは $\langle \mathbb{Z}^d, Q, E, \delta \rangle$ の 4 つ組で表される系である。ここで \mathbb{Z}^d は d 次元の格子, Q は格子上のセルのアルファベット, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ は近傍とよばれる \mathbb{Z}^d の部分集合, $\delta: Q^k \rightarrow Q$ は遷移関数である。 $u_n^t \in Q$ を時刻 t 座標 n のセルの状態とすると、時間発展は $u_n^{t+1} = \delta(u_{n+e_1}^t, u_{n+e_2}^t, \dots, u_{n+e_k}^t)$ で与えられる。たとえば、1次元2値3近傍の CA (図 1) は $\langle \mathbb{Z}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \delta \rangle$ であり、 $\delta: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ は全部で 256 通りのルールを持つ。

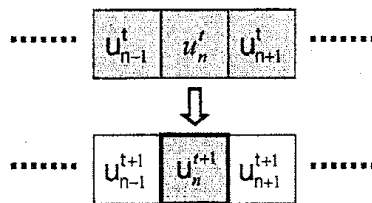


図 1: 1次元3近傍 CA

2.2 Steiglitz らのフィルター型 CA

ここでフィルター型の CA としてよく知られている Steiglitz らのルールを述べておく [1]。時間空間ともに 1次元のモデルであり、 $u_n^t \in \{0, 1\}$ を時刻 t 座標 n のセルの状態とすると、次の時間発展により記述される。

$$u_n^{t+1} := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 0 & (x \text{ が奇数}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで $x := \sum_{i=1}^r u_{n-i}^{t+1} + \sum_{i=0}^r u_{n+i}^t$ である。つまり、時刻 $t+1$ 場所 n の状態が、時刻 t 場所 $n, \dots, n+r$ の状態と時刻 $t+1$ 場所 $n-r, \dots, n-1$ の状態から決まる仕組みになっている。上述の CA とこの点で違いがある。

2.3 箱玉系

箱玉系は1990年に高橋と薩摩によって提案されたものであり、本研究集会は(記念すべき?)15周年にあたる[2, 3]。ここでは様々な拡張には触れず、もっとも基本的なバージョンを説明する。まず同じ玉をいくつかと、その玉を入れる箱を無限個用意して一列に並べる。ただし1つの箱に玉は1つしか入らないものとする。初期状態はこの箱の列にすべての玉を適当に入れたものとして、系の時間発展ルールを次のように与える。時刻 t から時刻 $t+1$ への時間発展は、

- すべての玉を右方のもっとも近い空き箱へ移す。
- ただし時刻 t で玉の入っていた箱は移動先から除く。

とする。どの玉から動かしても結果は変わらないことに注意する。この時間発展例を図2に示す。ここで玉の入っている場所を黒、空き箱を白のセルとした。時

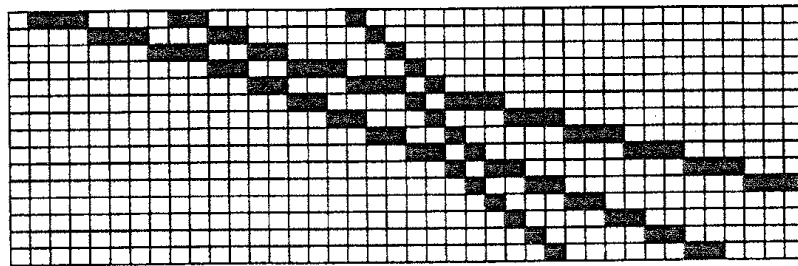


図 2: 箱玉系の時間発展 (時間の向きは上から下)

間を経てもソリトンのなふるまいを保つことが見て取れる。また、無限個の保存量を持つことが知られている[5]。この箱玉系の時間発展は次式で表され、フィルター型 CA の一種である。

$$u_n^{t+1} := \min \left\{ 1 - u_n^t, \sum_{i=-\infty}^{n-1} (u_i^t - u_i^{t+1}) \right\} \quad (1)$$

$$S_n^t := \sum_{j=-\infty}^n u_j^t, V_n^t := S_{n+1}^t - S_n^{t+1} \text{ とおくことにより、}$$

$$V_{n+1}^{t+1} - V_n^t = \max(0, V_n^{t+1} - 1) - \max(0, V_{n+1}^t - 1) \quad (2)$$

さらに, $U_{n-t}^n := V_n^t$ によって,

$$U_n^{t+1} - U_n^t = \max(0, U_{n-1}^t - 1) - \max(0, U_{n+1}^{t+1} - 1) \quad (3)$$

と超離散 Lotka-Volterra 方程式が得られることが知られている。

箱玉系の一般化は [12, 13] によい解説があるので参照されたい。また, 周期的箱玉系の定義については講究録 [7] や [8] を見られたい。

3 シーケンシャル CA の定義と時間発展例

本章では, シーケンシャル CA の定義を与え, その時間発展例を図示する。また, 格子模型の一種とみなせることを示す。

3.1 定義と格子模型

前章でフィルター型 CA について述べたが, 時刻 $t+1$ での状態が時刻 t での状態に依存するというものであった (ただし explicit に与えられている)。この制約を残しつつ, 従来の CA の本質である「ルールの局所性」を考慮し, 次のモデルを提案する。

1次元シーケンシャル CA とは $\langle N, Q, k, \delta \rangle$ の4つ組であらわされる系である。ここで N はセルの数, Q はセルのアルファベット, k は局所遷移に関する近傍サイズ, $\delta: Q^{\otimes k} \rightarrow Q^{\otimes k}$ は遷移関数とする。さらに特別な元として静止状態 $0 (\in Q)$ が

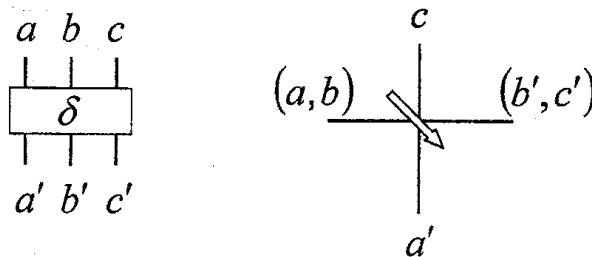


図 3: 局所遷移関数 δ と格子模型の対応 (図は $k = 3$ の場合)

存在し, $\delta: 0^{\otimes k} \mapsto 0^{\otimes k}$ を満たすものとする。空間に何も無いところからパターンが現れるのを防ぐために, この静止状態を導入する (有限系では本質的な制約ではない)。さらに演算子 Δ を次のように与える。

$$\Delta := \Delta^{(N-k)} \Delta^{(N-k-1)} \dots \Delta^{(2)} \Delta^{(1)} \Delta^{(0)} \quad (4)$$

$$\Delta^{(i)} := \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_i \otimes \delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{N-k-i} \quad (5)$$

ここで 1 は $Q \rightarrow Q$ の恒等演算子である。

この定義は格子模型の定義とほぼ同じである。全系の時間発展 $Q^{\otimes N} \rightarrow Q^{\otimes N}$ で、入力の左端の $Q^{\otimes k-1}$ と出力の右端の $Q^{\otimes k-1}$ を部分トレースすれば、よく知られた転送行列そのものである。しかし本稿では、部分トレースを取らずに次のスパイラルな境界条件をとることにする:

時刻 t でそれぞれ、状態空間に $u^{(t)} \in Q^{\otimes N-k+1}$, 補助空間に $a^{(t)} \in Q^{\otimes k-1}$ が与えられたとき,

$$\Delta : a^{(t)} \otimes u^{(t)} \mapsto u^{(t+1)} \otimes a^{(t+1)} \quad \text{for all } t \quad (6)$$

によって $u^{(t+1)}$ と $a^{(t+1)}$ を定めて、状態の時間発展を $u^{(t)} \mapsto u^{(t+1)}$ と定義する (図4).

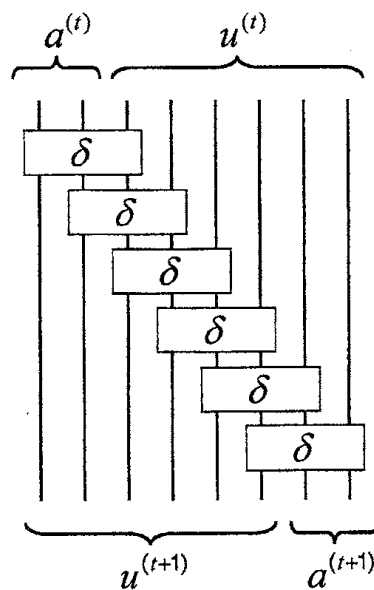


図4: Δ による時間発展の例 ($N = 8, k = 3$)

このシーケンシャルCAが従来の1次元CAを模倣できることは明らかである。従来のCAの遷移関数を δ_{CA} としたとき,

$$\delta : (i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) \mapsto (\delta_{CA}(i_0, i_1, \dots, i_{k-1}), i_1, \dots, i_{k-1})$$

と定義すればよい (境界条件と座標のシフトは除く)。このことから、ここで定義したシーケンシャルCAも計算万能である。

3.2 時間発展の例

具体的なルールを明示するために、以下次のような記法を用いることにする。与えられた局所遷移関数が $Q^{\otimes k} \rightarrow Q^{\otimes k}$ のとき基底に対して

$$\begin{aligned} \delta & : Q^{\otimes k} \rightarrow Q^{\otimes k} \\ & : (i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) \mapsto (j_0, j_1, \dots, j_{k-1}) \end{aligned}$$

であるとき、ルール $(x_0, x_1, \dots, x_{q^k-1})$ を割り当てる。ここで、

$$x_m := \sum_{l=0}^{k-1} j_l q^{k-l-1}, \quad m := \sum_{l=0}^{k-1} i_l q^{k-l-1}, \quad q := |Q|$$

である。例えば、 $Q = \{0, 1\}, k = 2$ としたとき、

$$\begin{aligned} \delta : Q^{\otimes 2} &\rightarrow Q^{\otimes 2} \\ &: (0, 0) \mapsto (0, 0), (0, 1) \mapsto (1, 0), (1, 0) \mapsto (0, 1), (1, 1) \mapsto (1, 1) \end{aligned} \quad (7)$$

ならば、ルール $(0, 2, 1, 3)$ といった具合に、要は、遷移関数の出力を順に q 進数で読むことにする。この式 (7) による時間発展の具体例を図 5 に示す。

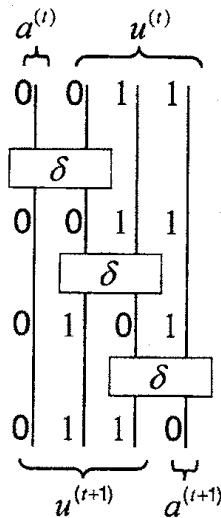


図 5: 式 (7) による時間発展の例。 $N = 4$, ルール 0213, $a^{(t)} = 0, u^{(t)} = (0, 1, 1)$.

図 6 に $a^{(t=0)} := 0^{\otimes k-1}$ の境界条件を与え、適当な $u^{(0)}$ からの時間発展を図示した。図 4 で $u^{(t)}$ に対して $u^{(t+1)}$ が左へ $(k-1)$ セルずれることに対応して菱形領域で図示してある。図 6(a) は、恒等写像の場合である。この恒等写像の場合にパターンが不変となるように、本稿では菱形の領域を用いて図示している。図 6(c), (d), (e) は、パターンが速度 1 でシフトしている。(c) と (d) は $01 \leftrightarrow 10$ のルール (10 進数で $1 \leftrightarrow 2$) によってパターンがシフトしているのに対し、(e) はもう少し複雑な仕組みである (各自確かめられたい)。さて、図 6(b), (f) は複雑な振る舞いを示している。この 2 つのルールに対して、 $a^{(t)} = 0$ の境界条件の下で時間発展を考えると以下のようなになる。

$$\text{図 6(b)} : u_n^{(t+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i^{(t)} \pmod{2} \quad (8)$$

$$\text{図 6(f)} : u_n^{(t+1)} = u_n^{(t)} + u_{n+1}^{(t)} \pmod{2} \quad (9)$$

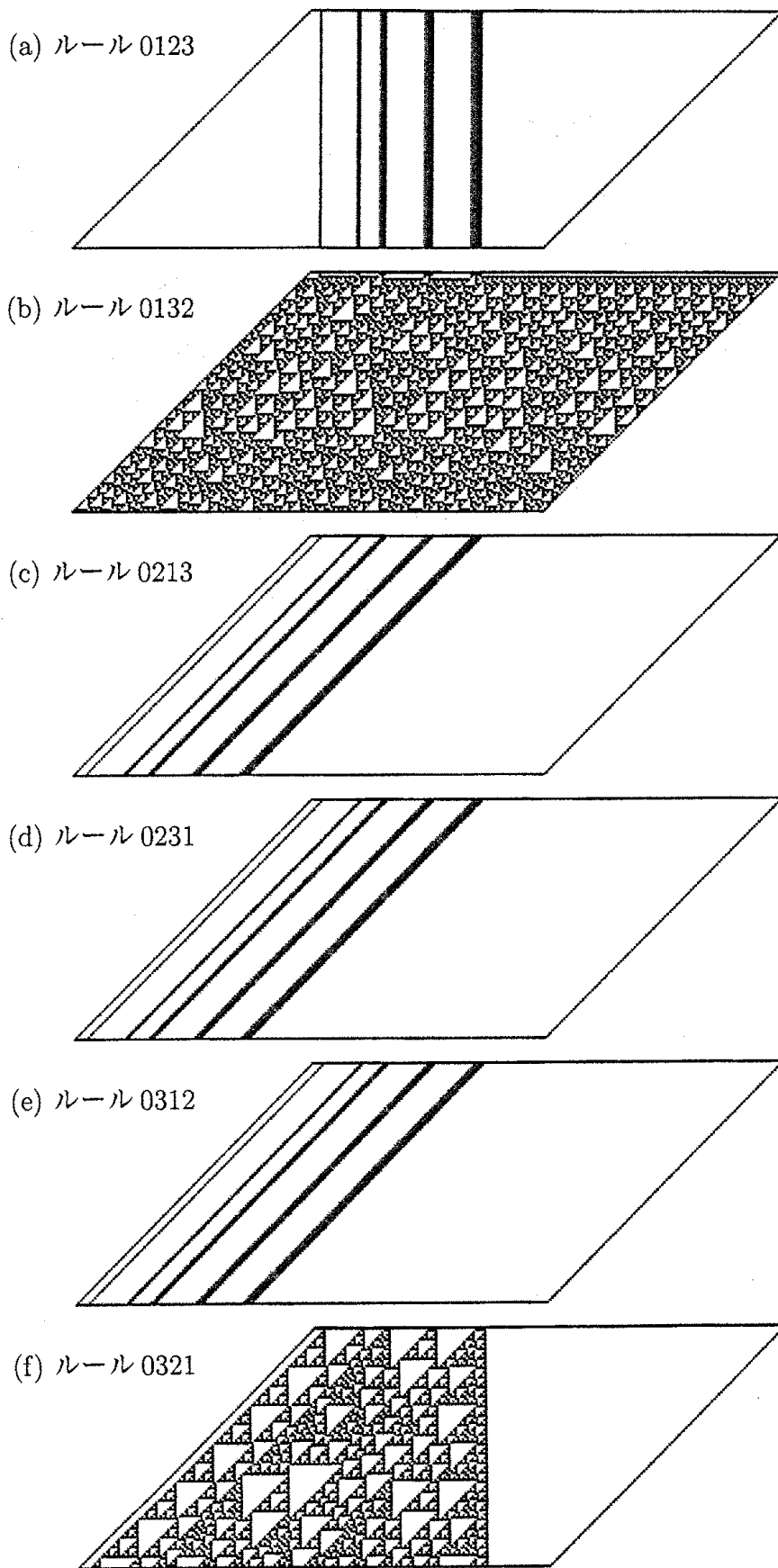


図 6: $N = 200, Q = \{0, 1\}, k = 2$, 時間 100 ステップ, $a^{(0)} = 0$. 境界を示すため、外周に菱形を描いてある。

このことから、特にルール 0321 は S. Wolfram の CA におけるルール 90 と同等であることがわかる (Pascal の三角形, Sierpinski ガスケット)。

ところで図 6 に示した 6 つの例は、局所遷移関数 δ がすべて可逆な例である。つまり、(0123) の 4 文字の置換となっている例のみを挙げている ($0 \rightarrow 0$ は固定した)。そのためにこれら 6 つの例では、全系の時間発展 Δ は可逆なものとなっている。このシーケンシャル CA のひとつの特長に、可逆ルールを豊富に得られることや可逆な時間発展で図 6(b)(f) のようなパターンを生成できることが挙げられる。もちろん補助空間のほうの $a^{(t)}$ の状態まで含めた上での可逆性である。本稿では以降、可逆ルールのみを扱う。シーケンシャル CA では q 値 k 近傍の場合、ルール数は q^k の q^k 乗という膨大な数になる。可逆ルールの場合 $(q^k)!$ となる。ルールに静止状態 $0 \rightarrow 0$ の制限をつけても、 $(q^k - 1)!$ 個もの豊富な可逆ルールが簡単に得られる。この点が従来の CA と大きく異なる点であり [9]、量子力学の枠組みへの拡張に適していると考えられる。

次に、 $k = 3$ の場合の例をいくつか示した (図 7~9)。興味深いパターンが見て取れるが、シーケンシャルなルールに拠るところが大きいと思われる。個別の詳細は不明なところが多い。さてこれら図 7~9 の中で、(c) と (h) はソリトン系である。(h) については別の機会に触れることにして、本稿では (c) に着目し次章でその性質を調べる。

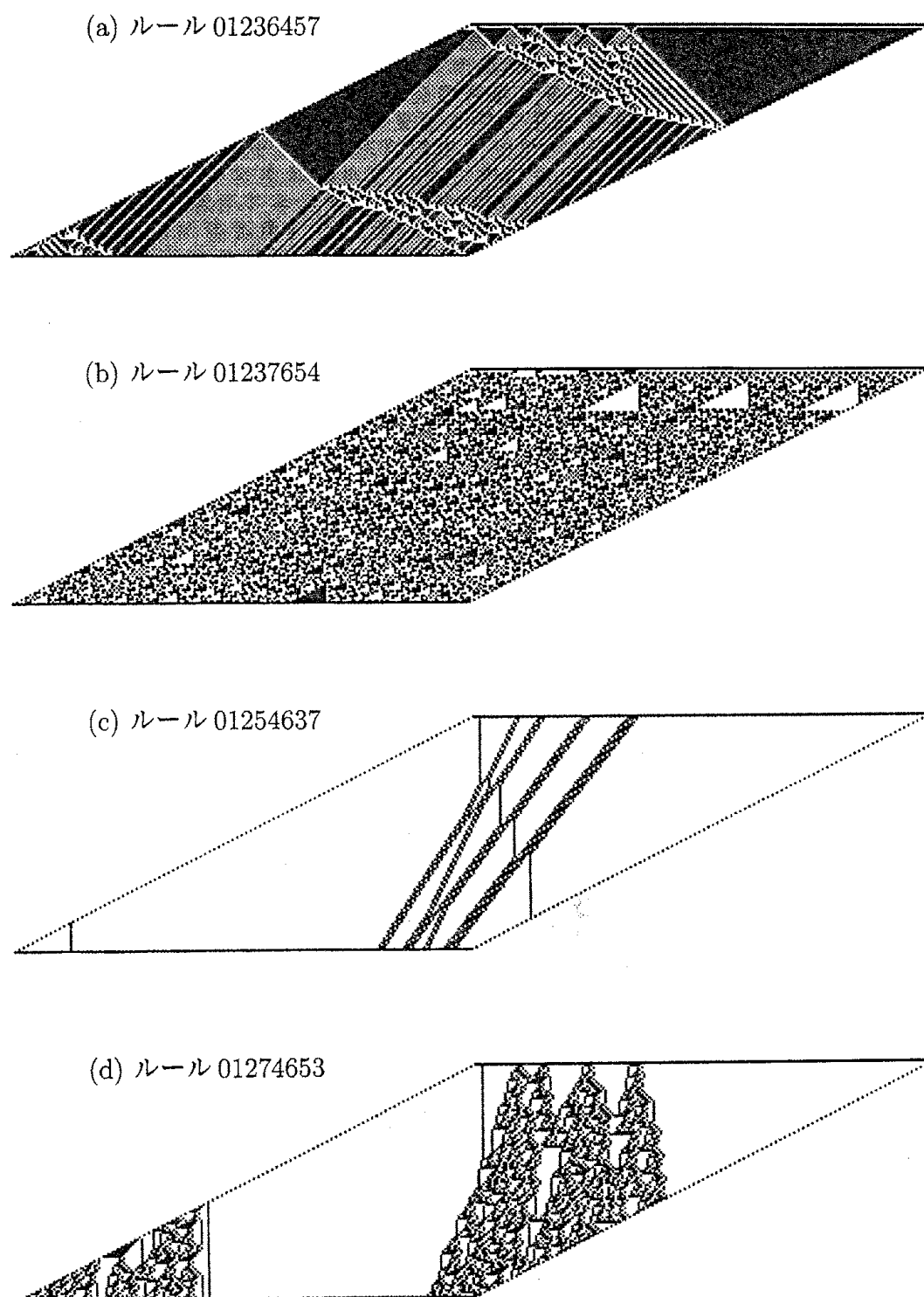
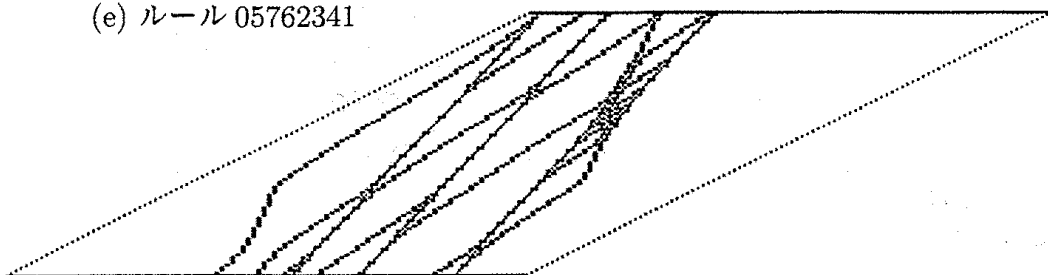
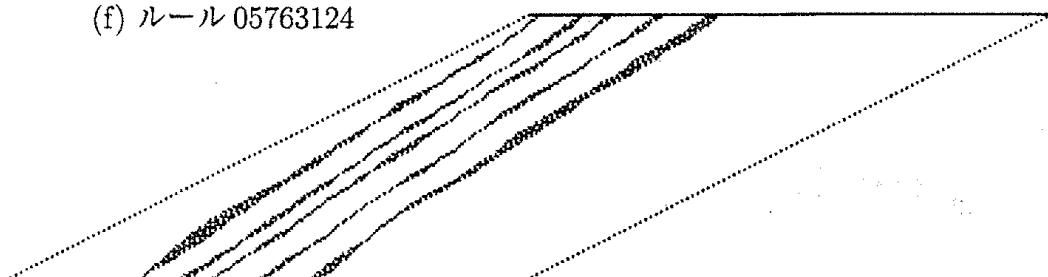


図 7: $N = 200$, $Q = \{0, 1\}$, $k = 3$, 時間 100 ステップ, $a^{(0)} = (0, 0)$. 境界を示すため, 外周に菱形を描いてある.

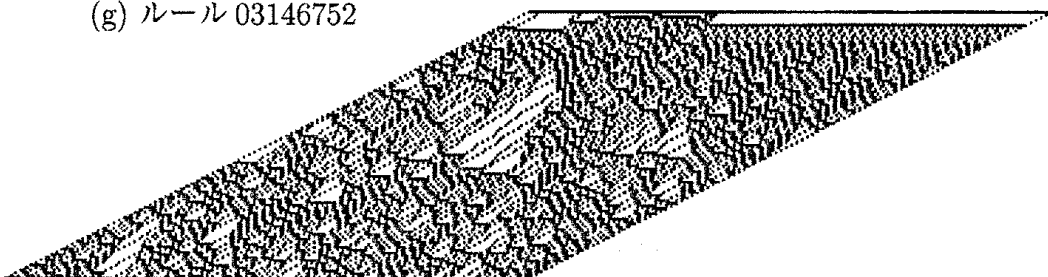
(e) ルール 05762341



(f) ルール 05763124



(g) ルール 03146752



(h) ルール 03254617

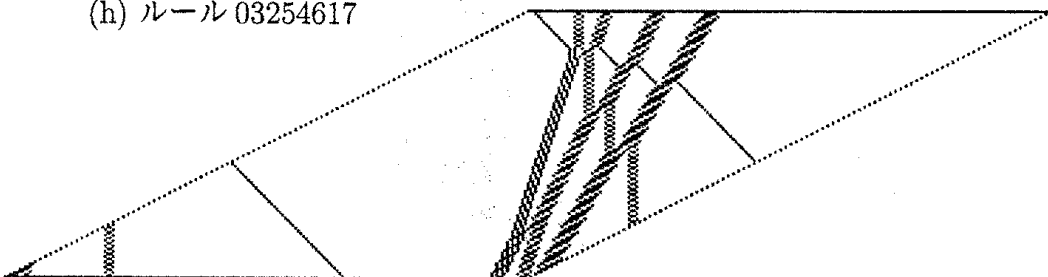
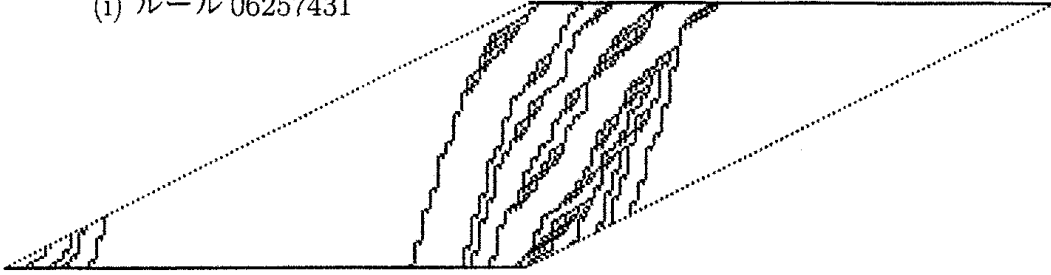
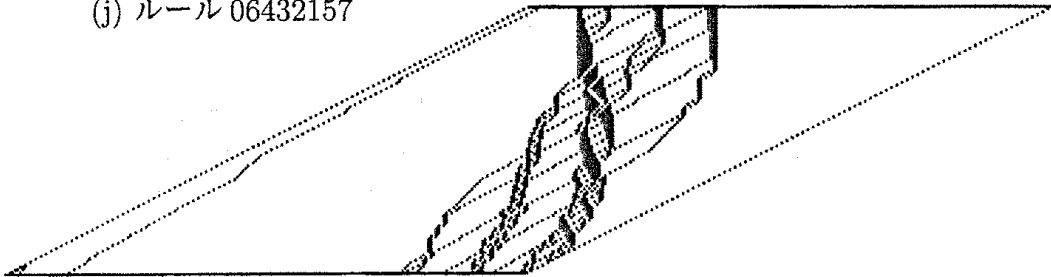


図 8: 図 7 の続き

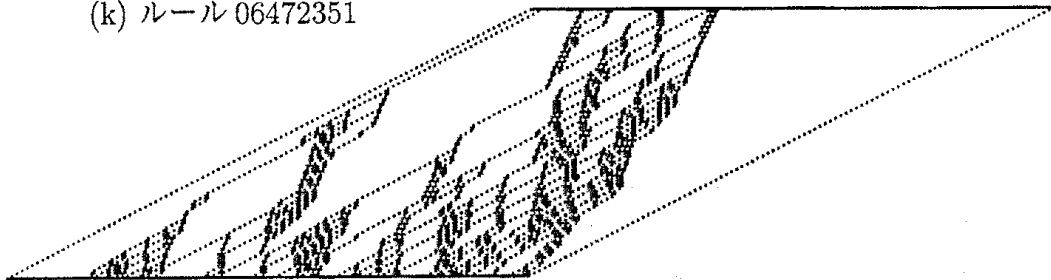
(i) ルール 06257431



(j) ルール 06432157



(k) ルール 06472351



(l) ルール 06752143

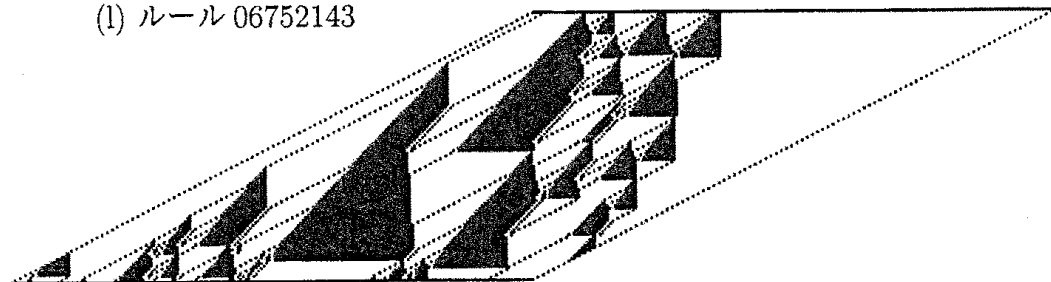


図 9: 図 7,8 の続き

4 シーケンシャルCAにおけるソリトン系

前章で見た図 7(c) の時間発展が確かに可積分 CA と呼ぶにふさわしいものであることを、式 (3) へ帰着することによって示すのが本章の目的である。本章以降、シーケンシャル CA の両端には十分に 0 が並んでいるものとする。これは無限系の 1 次元箱玉系と同様の境界条件を課すものである。つまり前章で定義した補助空間の状態が $a^{(t)} = (0, 0)$ を満たすと仮定したとき、 $a^{(t+1)} = (0, 0)$ となるような十分大きな系を考える (箱玉系の運搬車で例えると、空の運搬車を左から入れると右から空の運搬車が出てくる、とする)。

4.1 順序機械

図 3 に見たように、シーケンシャル CA の状態遷移関数は格子模型に対応する。ところでルール 01254637 の時間発展は決定論的である。そこで図 3 の局所遷移 δ を、図 10 のような決定性順序機械の遷移とみなすことが出来る。この遷移図は、機

$$(a, b) \xrightarrow{c/a'} (b', c')$$

図 10: 順序機械としての遷移

械の制御部が (a, b) の状態にあるとき入力 c を読みこむと、制御部の状態が (b', c') へ遷移して a' を出力するという、入出力を伴った機械と解釈することが出来る。これは順序機械と呼ばれている。シーケンシャル CA の遷移関数に対応するラベル付の有向グラフを用いて、CA の時間発展を考えてみる。ルール 01254637 で、例えば $3 \rightarrow 5$ の書き換えは 2 進数で $011 \rightarrow 101$ だから、有向グラフの辺として書き直すと、 $(0, 1) \xrightarrow{1/1} (0, 1)$ の遷移に対応する (図 11 中の右下のループ)。これを繰り返して図 11 を得る。ここで $(1, 1)$ の頂点を描いていないのは、 $(0, 0)$ の頂点から非

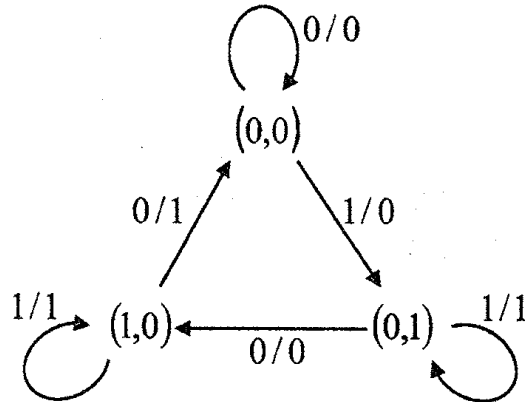


図 11: ルール 01254637 に対応する順序機械の状態遷移図

連結だからである。

順序機械の遷移とみなすことの利点は、補助空間の状態がオートマトンの状態に対応しオートマトン的な解釈ができる点と、対称性が見えることである。さて、 $(0,0)$ から $(0,0)$ の状態遷移に伴う入出力を考えると、図 11 から 2 通りの場合が考えられ、これらの任意回の繰り返しとなることがわかる。

1. 入力 "0", 出力 "0"
2. 入力 " $1^{n+1}01^m0$ ", 出力 " 01^n01^{m+1} "

ここで、 $n, m \geq 0$ とし、文字列 " $\underbrace{11\dots1}_n$ " を 1^n と略記した。任意の入力列 (シーケンシャル CA の状態) がこれら 2 通りの入力の繰り返しへ一意に分解される。アルファベット Σ からなる長さ 0 以上の文字列の集合を $\Sigma^* := \bigcup_{j=0}^{\infty} \Sigma^j$ として * 演算を定義する (Kleene 閉包)。

命題 1

アルファベット Σ を $\{0,1\}$, $X := \{0\} \cup \{1^{n+1}01^m0\}_{n,m \geq 0}$ を文字列の集合とする。このとき 00 で終わる任意の文字列 $s00 (s \in \Sigma^*)$ に対して X^* の元が一意に対応する。

本章の最初にシーケンシャル CA の両端には十分に 0 が並んでいるとしたため、いつも右端に十分な数の 0 が並んだ境界条件で考えているからシーケンシャル CA の状態 $u^{(t)}$ は $x_1x_2 \cdots x_n (x_i \in X)$ と一意に分解できる。さらに「整数アルファベット」1 文字または 2 文字からなる $Y := \{0\} \cup \{(n+1, m)\}_{n,m \geq 0} \subset \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^2$ と、 X から Y への変換

$$\begin{aligned} \mu &: X \rightarrow Y \\ &: 0 \mapsto 0 \quad (\in \mathbb{Z}) \\ &: 1^{n+1}01^m0 \mapsto (n+1, m) \quad (\in \mathbb{Z}^2) \end{aligned}$$

を定義して、 X^* 上に

$$\mu(x_1x_2 \cdots x_n) = \mu(x_1)\mu(x_2 \cdots x_n)$$

によって拡張することにする。ただし「整数からなる文字列」の積は、文字列の連結とする。

例

シーケンシャル CA の状態 ($\in \Sigma^*$) が

... 0011101010001101100 ...

であったとすると、

... 0011101010001101100 ...

と下線部のように X^* へ分解する. 各々の下線部に対し, 作用 μ を用いて Y^* へ
 $\dots \underline{0031100220} \dots$
 を割り当てる. 最終的に整数アルファベットの文字列 (Z^*)
 $\dots 0031100220 \dots$
 を得る.

言葉で説明すると要は, "0"と"0"に挟まれた"1"のかたまりを探して, その長さ (0以上) に変換するだけである. 上の命題からも明らかのように, Σ^* と X^* と Y^* の元は今考えている境界条件の制約のもとで1対1で変換できる.

命題 2

次の格子上の作用を考える (図 12).

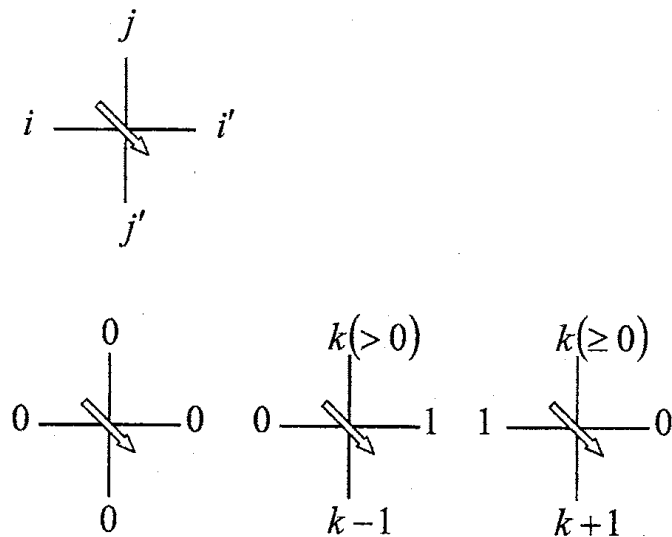


図 12: 作用 T と, ボルツマンウェイトが 0 でない要素

$$\begin{aligned}
 T &: \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1\} \\
 &: (i, j) \mapsto (j', i') := (\max(2i + j - 1, 0), \min(1 - i, j)) \quad (10)
 \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 T &: (0, 0) \mapsto (0, 0) \\
 (T \otimes 1)(1 \otimes T) &: (0, n + 1, m) \mapsto (n, m + 1, 0)
 \end{aligned}$$

を満たし, 順序機械の $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$ 遷移における入出力と 1 対 1 に対応する. ただし全系で 1 セル分シフトする. ここで, T と $(T \otimes 1)(1 \otimes T)$ は共に $\{0, 1\} \times Y \rightarrow Y \times \{0, 1\}$ とみなせる (図 13).

作用 T がおこなっていることは正の数を左から順に探して, その場所で 1 を引き, 右隣に 1 を足すという操作である. そのため, 負の整数が現れることはない.

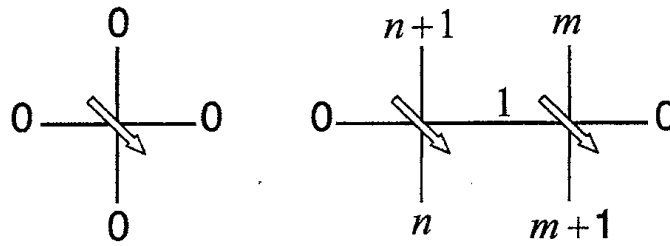


図 13: 順序機械の入出力に対応する作用

ここで演算子 T を

$$T := T^{(N-k)} T^{(N-k-1)} \dots T^{(2)} T^{(1)} T^{(0)} \tag{11}$$

$$T^{(i)} := \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_i \otimes T \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{N-k-i} \tag{12}$$

と与える. 1 は $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の恒等演算子である.

命題 3

$T \circ \mu \simeq \mu \circ \Delta$ であり可逆である. ただし 1 セル分シフトする.

さらに μ と T に似た, 次の ν と S を定義する.

$$\begin{aligned} \nu &: Y \rightarrow Y \\ &: 0 \mapsto 0 \\ &: (n+1, m) \rightarrow (n+1, m+1) \end{aligned}$$

を定義して, μ と同様 Y^* へ

$$\nu(x_1 x_2 \dots x_n) = \nu(x_1) \nu(x_2 \dots x_n)$$

と拡張することにする.

例

上述の例

$$\dots \underline{0031100220} \dots$$

に対し, ν の作用により

$$\dots \underline{0032110230} \dots$$

と変換する.

作用 ν がおこなっていることは正の数を左から順に探して, その右隣に 1 を足すという操作である.

命題 4

次の格子上的作用を考える (図 14).

$$\begin{aligned}
 S &: \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1\} \\
 &: (i, j) \mapsto (j', i') := (i + j, \min(1 - i, j))
 \end{aligned} \tag{13}$$

このとき,

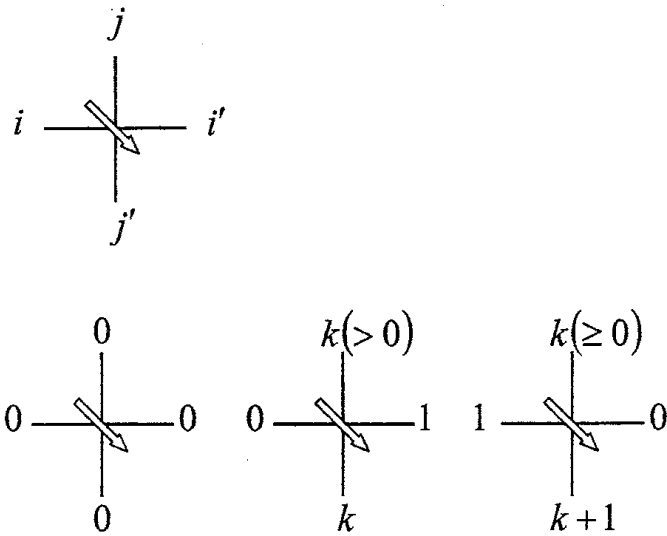


図 14: 作用 S と, ボルツマンウェイトが 0 でない要素

$$\begin{aligned}
 S &: (0, 0) \mapsto (0, 0) \\
 (S \otimes 1)(1 \otimes S) &: (0, n + 1, m) \mapsto (n + 1, m + 1, 0)
 \end{aligned}$$

を満たし, 上で定義した ν とおなじ作用を引き起こす. ここで, S と $(S \otimes 1)(1 \otimes S)$ は $\{0, 1\} \times Y \rightarrow Y \times \{0, 1\}$ とみなせる (図 15).

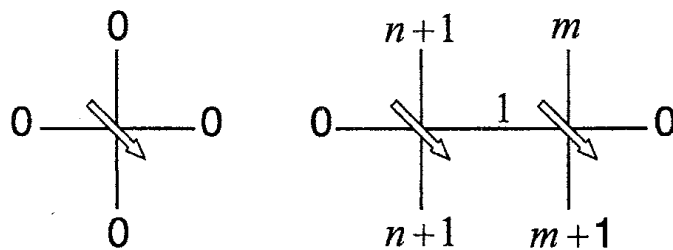


図 15: 作用 ν に対応する格子の部分

ここで演算子 S を

$$S := S^{(N-k)} S^{(N-k-1)} \dots S^{(2)} S^{(1)} S^{(0)} \tag{14}$$

$$S^{(i)} := \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_i \otimes S \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{N-k-i} \quad (15)$$

と与える. 1 は $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の恒等演算子である.

定理

$udLV \circ S \simeq S \circ T$ である. ここで $udLV$ は式 (3) である.

証明

$x, y, x', y' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^*$ とする. $y := Sx$ と, x を時間発展させた $x' := Tx$ をさらに変換した $y' := Sx'$ に対して, $y \mapsto y'$ が超離散 LV(式 (3)) を満たすことを示す.

状態 x の空間座標に応じた変数を $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ などと置く. また, $y := Sx, y' := Sx', x' := Tx$ それぞれに対して, 図 16 のように補助空間の値を定義する. 演算子 T と S で補助空間の変数の値が等しいことに注意する (図 12, 14 参照).

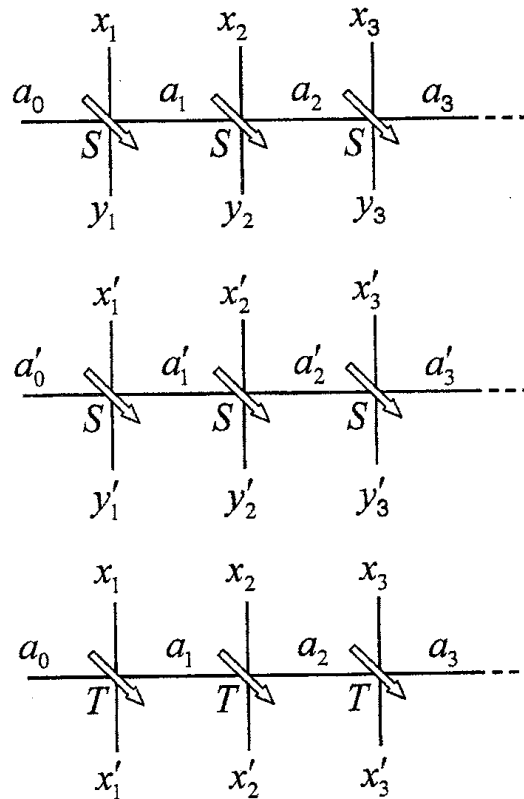


図 16: 図中のように a_i, a'_i を定義する.

また境界条件として, 十分遠方では "0" としてあるので, $a_0 = a'_0 = 0$ と置いてよい. これらの格子模型上で, 定義式 (13) より,

$$y_{i+1} = x_{i+1} + a_i$$

$$y'_{i+1} = x'_{i+1} + a'_i$$

が、定義式 (10) より、

$$x'_{i+1} = x_{i+1} + a_i - a_{i+1}$$

成り立つ。ここで次の命題に注意する。

命題 5

$$\min(y_i, 1) = \min(a_{i-1}, 1) + \min(a_i, 1) = a_{i-1} + a_i$$

証明

$$\begin{aligned} \min(y_i, 1) &= \min(x_i + a_{i-1}, 1) \\ &= a_{i-1} + \min(x_i, 1 - a_{i-1}) \\ &= a_{i-1} + a_i \\ &= (1 - \max(1 - a_{i-1}, 0)) + (1 - \max(1 - a_i, 0)) \\ &= \min(a_{i-1}, 1) + \min(a_i, 1) \end{aligned}$$

ここで $a_j \in \{0, 1\}$ であることを用いた。 □

題意の証明に入る。

$$\begin{aligned} y'_{i+1} + \max(y'_i - 1, 0) &= y'_{i+1} + y'_i + \max(-1, -y'_i) \\ &= y'_{i+1} + y'_i - \min(1, y'_i) \\ &= y'_{i+1} + y'_i - a'_{i-1} - a'_i \\ &= x'_{i+1} + x'_i \\ &= (x_{i+1} + a_i - a_{i+1}) + (x_i + a_{i-1} - a_i) \\ &= y_{i+1} + y_i - a_{i+1} - a_i \\ &= y_{i+1} + y_i - \min(y_{i+1}, 1) \\ &= y_i + \max(y_{i+1} - 1, 0) \end{aligned}$$

故に

$$y'_{i+1} + \max(y'_i - 1, 0) = y_i + \max(y_{i+1} - 1, 0)$$

となり、 $y_i^t = y_i, y_i^{t+1} = y'_i, U_{t-i}^t := y_i^t$ によって式 (3) が成立する。 □

命題 3 とともに、次が成り立つ。

系

$$udLV \circ (S \circ \mu) \simeq (S \circ \mu) \circ \Delta$$

udLV 方程式は初期値によって負の値を解に持つことがあるが、この場合ソリトンの振る舞いを示さない。これに対して Δ による時間発展は $\{0, 1\}^*$ できちんと定義されていて、いつでもソリトンを成している。

4.2 玉の種類に対する拡張

箱玉系の拡張のひとつに、複数種の玉への拡張がある(色つき箱玉)。この箱玉系の詳細は省くが、この場合にも対応するシーケンシャル CA が存在する。玉の種類を M 種としたとき、近傍サイズ $k = M + 2$ とし、遷移関数 δ への入力に "1" が 2 個あるときのみ右ローテートシフトするルールをとればよい。これまで調べてきたルール 01254637 は $M = 1$ に対応し、 $\delta: 011 \mapsto 101 \mapsto 110 \mapsto 011$ と "1" が 2 個あるときのみ右シフトしたものとなっている。

一般の M の場合、格子模型で T と S を以下のように変更する。

$$\begin{aligned} T &: \{0, \dots, M\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, \dots, M\} \\ &: (i, j) \mapsto (j', i') := (j - \delta_{i,0} + \delta_{i',0}, i - 1 + \delta_{i,0}(M + 1 - M\delta_{j,0})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &: \{0, \dots, M\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, \dots, M\} \\ &: (i, j) \mapsto (j', i') := (j + \min(i, 1), i - 1 + \delta_{i,0}(M + 1 - M\delta_{j,0})) \end{aligned}$$

この定義によって、 $M = 1$ の場合と同様の手順を用い、超離散ハングリー-Lotka-Volterra 方程式

$$y'_{i+M} + \sum_{l=0}^{M-1} \max(y'_{i+l} - 1, 0) = y_i + \sum_{l=1}^M \max(y_{i+l} - 1, 0)$$

を満たすことが証明できる。また、対応する順序機械の状態遷移図は $M + 2$ 角形になる。箱の容量の一般化も autonomous な場合には実現可能である。

5 今後の展望

これまでシーケンシャル CA のルールとして、テンソル積の基底の変換のみを用いてきた。このルールを量子力学の上へ拡張するのは容易である。 $Q^{\otimes N}$ を複素線形空間とし、状態遷移関数 $Q^{\otimes k} \rightarrow Q^{\otimes k}$ をユニタリ作用素とすればよい(本稿で図示したカオス的なものからソリトンまで、置換ルールを特別な場合として含む)。講演時にはこのモデルを用いた量子交通流の話題にも触れた [11]。それ以外にもこ

のモデルを用いた様々な発展, たとえば量子情報処理やマルチパーティ間のエンタングルメントへの応用などが可能かもしれない。

可積分系としては, 色つき箱玉系の色の自由度が分離すること [10] と本稿で述べたシーケンシャル CA の対応や, 可解格子模型との関係, A 型以外への拡張, Toda 型 CA の実現などが今後の課題として挙げられる。

参考文献

- [1] K. Park, K. Steiglitz and W. P. Thurston, *Physica D* **19**, 423 (1986).
- [2] D. Takahashi and J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514(1990).
- [3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247(1996).
- [4] T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys. A.* **33**, 607(2000).
- [5] M. Torii, D. Takahashi and J. Satsuma, *Physica D* **92**, 209 (1996).
- [6] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys. A.* **30**, 733(1997).
- [7] 由良文孝, 京都大学数理解析研究所講究録 1221 「離散可積分系の研究の進展—超離散化・量子化—」(2001).
- [8] F. Yura and T. Tokihiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 3787(2002).
- [9] A. Nobe and F. Yura, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 5789(2004).
- [10] T. Takagi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1961(2005).
- [11] 山田崇氏との共同研究. 山田崇, 東京大学大学院情報理工学系研究科 平成 16 年度修士論文.
- [12] 中村佳正編, 「可積分系の応用数理」, 裳華房 (2000).
- [13] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).