

Asymptotic stability for linear differential system with delay in diagonal terms

大阪府立大学工学部 原 惟行 (Tadayuki Hara)
 Department of Mathematical Sciences,
 Osaka Prefecture University, Japan

1 Introduction

タイムラグをもつスカラー線形微分方程式

$$x'(t) = -ax(t - \tau) \tag{1}$$

where $a \in \mathbf{R}, \tau > 0$

の零解の一樣漸近安定性 ([UAS]) に対しては,

定理 A. 方程式 (1) の零解が [UAS] $\iff 0 < a\tau < \pi/2$.

が成立することがよく知られている.

タイムラグをもつ2次元線形微分方程式系

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t - \tau) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix} \tag{2}$$

where $\rho \in \mathbf{R}, \tau > 0, |\theta| < \pi/2$

の零解の一樣漸近安定性に対しては,

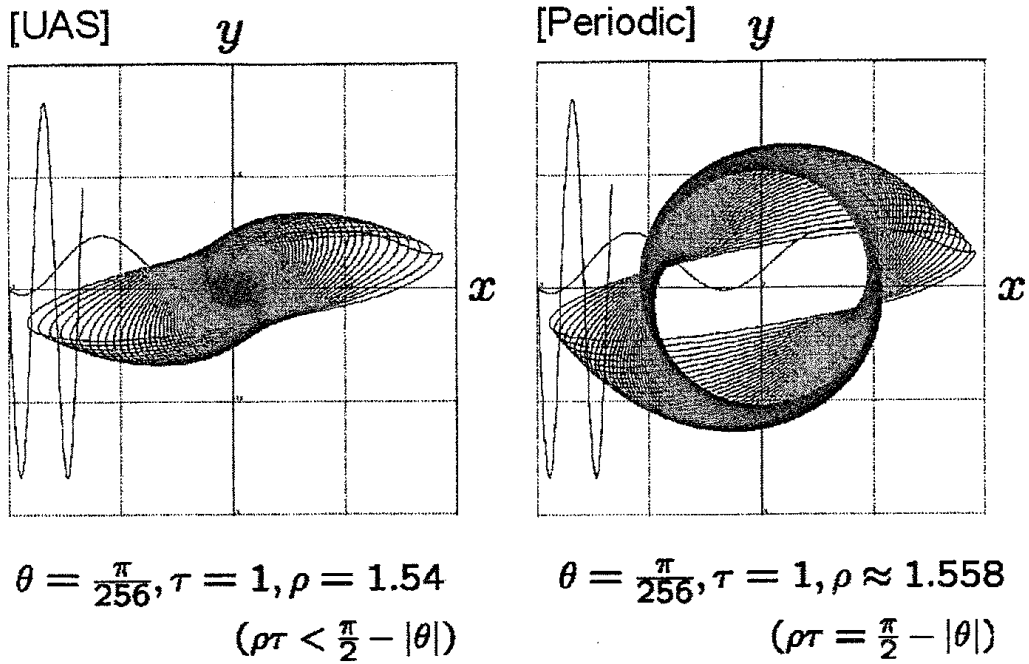
定理 B. [1] 方程式系 (2) の零解が [UAS] $\iff 0 < \rho\tau < \pi/2 - |\theta|$.

が成立する.

方程式系 (2) を書き直すと

$$\begin{cases} x'(t) = -\rho\{\cos \theta x(t - \tau) - \sin \theta y(t - \tau)\} \\ y'(t) = -\rho\{\sin \theta x(t - \tau) + \cos \theta y(t - \tau)\} \end{cases} \tag{3}$$

となっており, 右辺の全ての項にタイムラグ τ が入っていることに注意しよう. 定理 B を図解する (3) の解軌道図を与えておく. 初期関数はいずれも $\varphi = -(t + 3), \psi = \frac{5}{2} \sin 10t$ である.



定理 B の一様漸近安定条件 $0 < \rho\tau < \frac{\pi}{2} - |\theta|$ が満たす領域は

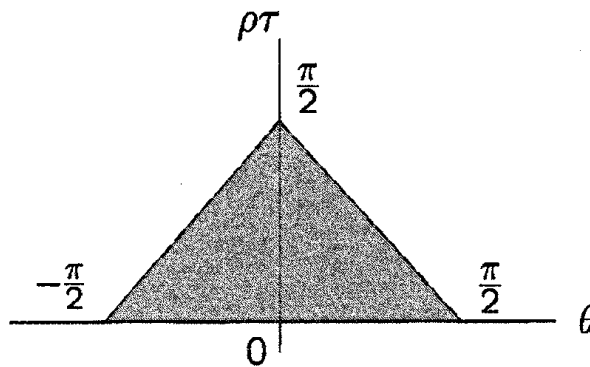


Fig.1

となっている.

さて方程式系 (3) は、右辺の全ての項にタイムラグが入っているが、実際的な数理モデルを扱っていると方程式系の右辺の全ての項にタイムラグが入っていることはほとんどなく、部分的にしかタイムラグは入っていない。そこで次のような問題を考えることにする。

問題設定. 2次元線形常微分方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (4)$$

に対し部分的にタイムラグを入れたとき,(4)の零解の漸近安定条件はどうなるのか?

2 Off-diagonal delays の場合

方程式系 (4) の右辺の off-diagonal 成分にタイムラグ τ_1, τ_2 が入った方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t - \tau_1) \\ y'(t) = cx(t - \tau_2) + dy(t) \end{cases} \quad (5)$$

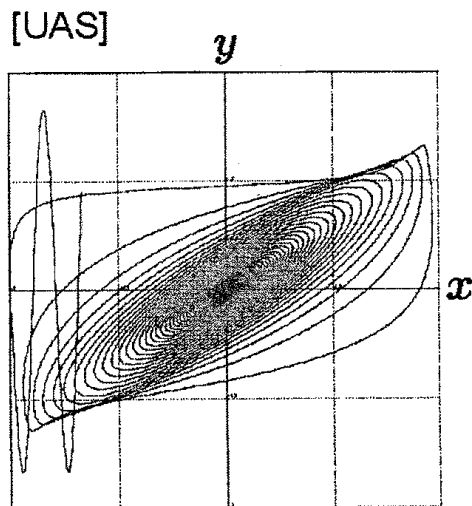
where $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$.

に対しては次の結果が知られている.

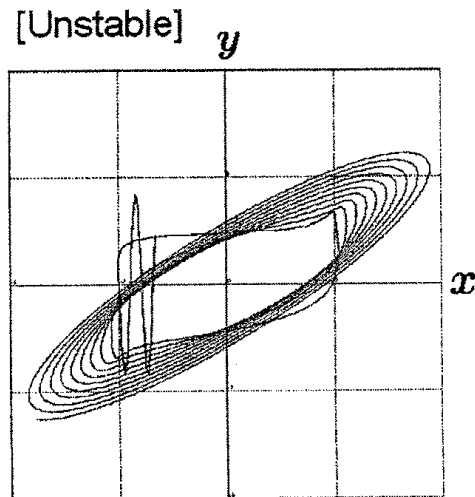
定理 C. [3] 任意の $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ に対して (5) の零解が [UAS]

$\iff a, d < 0$ かつ $ad > |bc|$ ($bc < 0$ のとき $ad > |bc|$ は等号も許される).

定理 C を図解する (5) の解軌道図を与えておく. 初期関数はいずれも $\varphi = -(3+t/10), \psi = \frac{5}{2} \sin t$ である.



$$\begin{aligned} a &= -1, b = 1.5, c = -2 \\ d &= -3, \tau_1 = 1, \tau_2 = 10 \\ &(a, d < 0, ad = |bc|) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= -1, b = 1.6, c = -2 \\ d &= -3, \tau_1 = 1, \tau_2 = 10 \\ &(a, d < 0, ad < |bc|) \end{aligned}$$

定理 C を n 次元の場合に拡張した結果も知られており, off-diagonal 成分にタイムラグ τ_{ij} が入った方程式系

$$x'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

where $\tau_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$), $\tau_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

に対しては次の結果が知られている. $A \equiv (a_{ij})$ とすると

定理 D. [2] 任意の $\tau_{ij} \geq 0$ に対して

(6) の零解が [UAS] $\iff a_{ij} < 0$, $\det A \neq 0$, A is weakly diagonal dominant.

ここで, weakly diagonal dominant の定義は次のように与えられる.

定義. A is weakly diagonal dominant

\iff all the principal minors of $-\tilde{A}$ are non-negative
where $\tilde{A} \equiv (\tilde{a}_{ij})$ with $\tilde{a}_{ii} = a_{ii}$ and $\tilde{a}_{ij} = |a_{ij}|$.

3 Diagonal delays の場合

さて方程式系 (3) に対して, 対角成分だけにタイムラグ τ が入った方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = -\rho\{\cos \theta x(t - \tau) - \sin \theta y(t)\} \\ y'(t) = -\rho\{\sin \theta x(t) + \cos \theta y(t - \tau)\} \end{cases} \quad (7)$$

where $\rho \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, $|\theta| < \pi/2$

を考える. 方程式系 (7) の零解が一様漸近安定になるための必要十分条件は次のように与えられる.

定理 1. 方程式系 (7) の零解が [UAS] $\iff 0 < \rho\tau(\sin |\theta| + \cos |\theta|) < \pi/2$.

証明の方針. (7) の特性方程式は,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \rho \cos \theta e^{-\lambda\tau} & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \lambda + \rho \cos \theta e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda + \rho \cos \theta e^{-\lambda \tau})^2 + (\rho \sin \theta)^2 \\
&= (\lambda + \rho \cos |\theta| e^{-\lambda \tau} + i \rho \sin |\theta|)(\lambda + \rho \cos |\theta| e^{-\lambda \tau} - i \rho \sin |\theta|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。ここで、

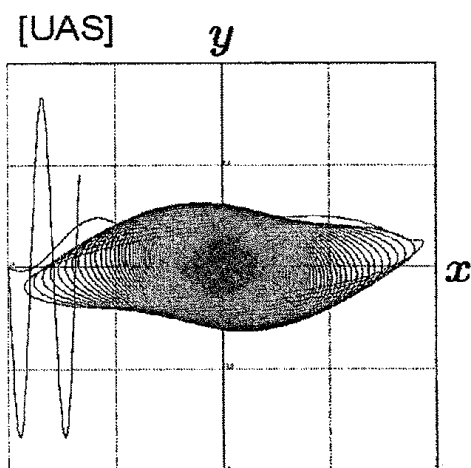
$$p_+(\lambda) = \lambda + \rho \cos |\theta| e^{-\lambda \tau} + i \rho \sin |\theta|, \quad p_-(\lambda) = \lambda + \rho \cos |\theta| e^{-\lambda \tau} - i \rho \sin |\theta|$$

とおく。 $\tau = 0$ のときは特性根は $\lambda = -\rho \cos |\theta| \pm i \rho \sin |\theta|$ であるから $\rho > 0$ ならば特性根は複素平面の左半平面に位置している。 τ を 0 から増加させていき、 $\tau = \tau^*$ で初めて特性根が複素平面の虚軸と $\lambda = i\omega$ ($\omega \neq 0$) でぶつかるとする。 $p_+(i\omega) = 0$ と $p_-(i\omega) = 0$ を用いて議論すると τ^* と ω が求まり

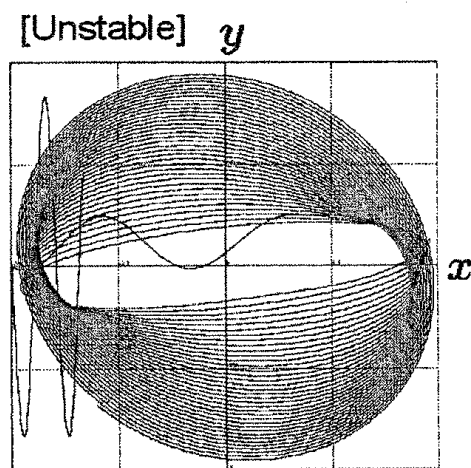
$$\tau^* = \frac{1}{\rho(\cos |\theta| + \sin |\theta|)} \frac{\pi}{2}$$

となる。よって $0 < \tau < \tau^*$ ならば特性根はすべて複素平面の左半平面に存在することになり、(7) の零解の一様漸近安定性が示せる。□

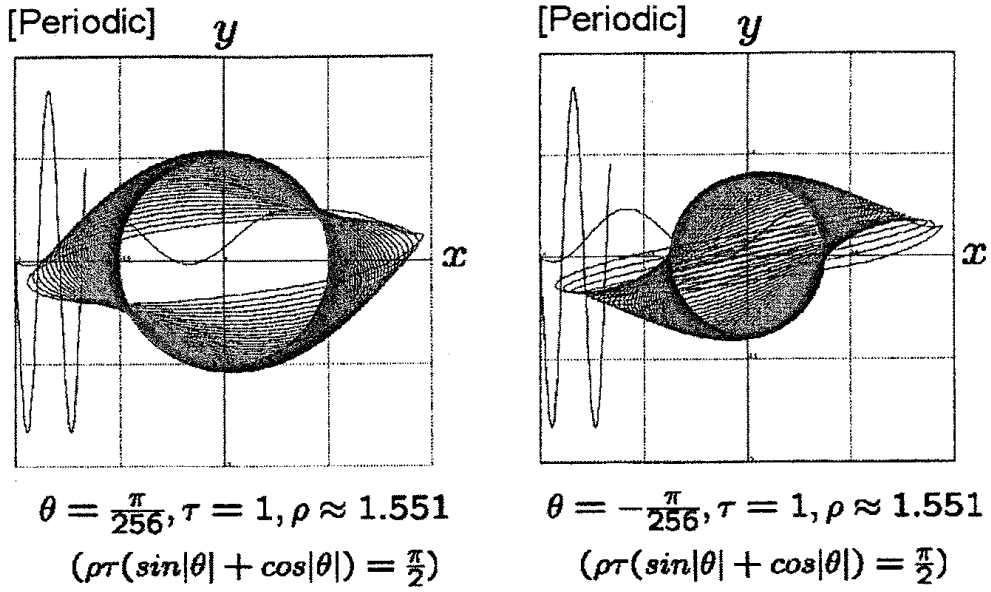
定理 1 を図解する (7) の解軌道図を与えておく。初期関数はいずれも $\varphi = -(t+3), \psi = \frac{5}{2} \sin 10t$ である。



$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\pi}{256}, \tau = 1, \rho = 1.54 \\
(\rho \tau (\sin |\theta| + \cos |\theta|)) &< \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\pi}{256}, \tau = 1, \rho = 1.56 \\
(\rho \tau (\sin |\theta| + \cos |\theta|)) &> \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



方程式系 (7) において $a \equiv \rho \cos \theta, b \equiv \rho \sin \theta$ とおくと (7) は

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t - \tau) + by(t) \\ y'(t) = -bx(t) - ay(t - \tau) \end{cases} \quad (8)$$

where $a, b \in \mathbf{R}, \tau > 0$

となる. 方程式系 (8) に対しては定理 1 は次のように書き直せる.

定理 2. 方程式系 (8) の零解が [UAS] $\iff a > 0$ かつ $(a + |b|)\tau < \pi/2$.

$a > 0$ かつ $(a + |b|)\tau < \frac{\pi}{2} \iff 0 < a < \frac{\pi}{2\tau} - |b|$ であるから a と b による定理 2 の漸近安定領域図は

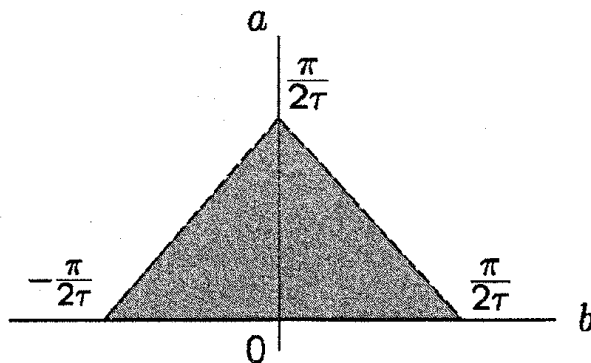
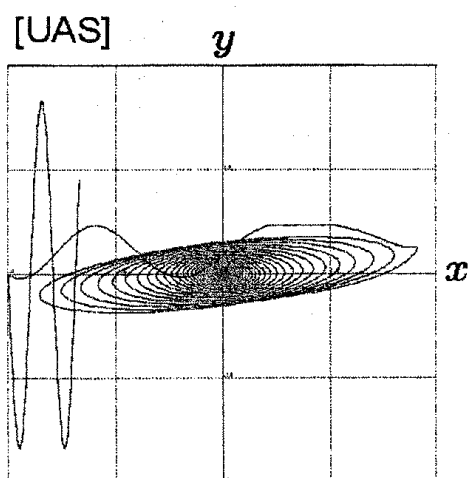


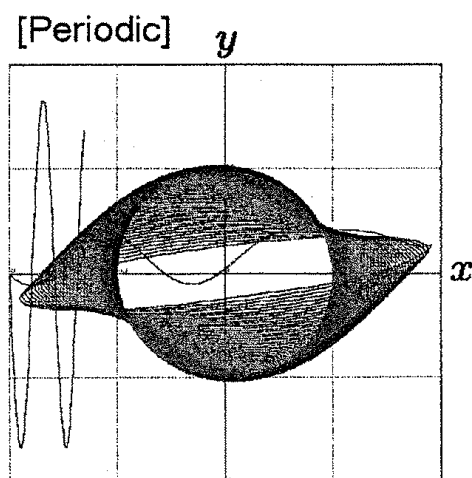
Fig.2

となり, Fig.1 と類似の領域図が得られるところが興味深い.

定理 2 を図解するために (8) の解軌道図を与えておく. 初期関数はいずれも $\varphi = -(t+3), \psi = \frac{5}{2} \sin 10t$ である.



$$a = 1.5, b = 0.01, \tau = 1 \\ ((a + |b|)\tau < \frac{\pi}{2})$$



$$a = 1.5, b = 0.01, \tau \approx 1.040 \\ ((a + |b|)\tau = \frac{\pi}{2})$$

方程式系 (8) を少し拡張した方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t - \tau) + by(t) \\ y'(t) = -cx(t) - ay(t - \tau) \end{cases} \quad (9)$$

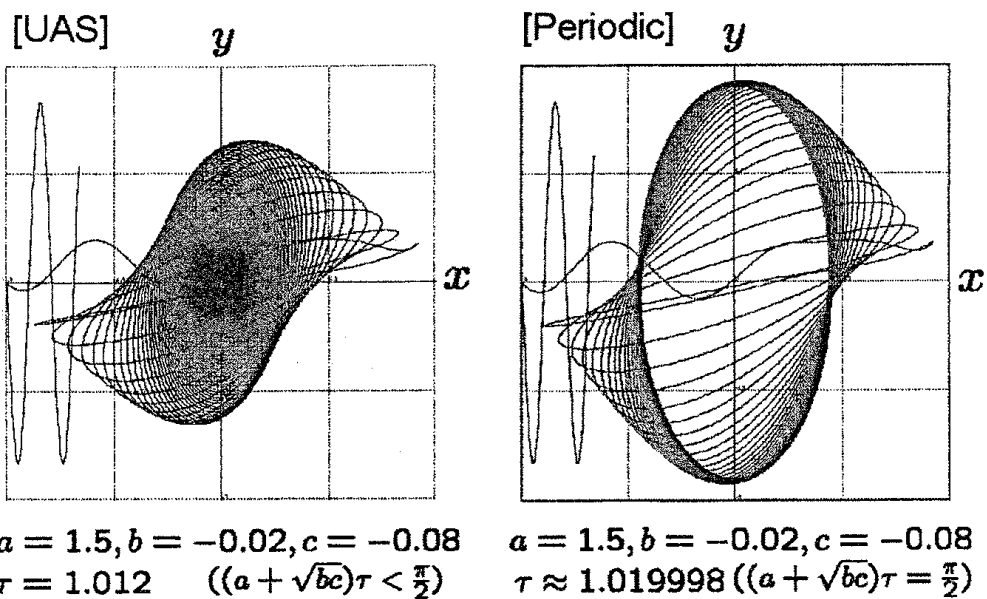
$$\text{where } a \in \mathbf{R}, bc \geq 0, \tau > 0$$

に対しては

定理 3. 方程式系 (9) の零解が [UAS] $\iff a > 0$ かつ $(a + \sqrt{bc})\tau < \frac{\pi}{2}$
 $(\iff 0 < a < \frac{\pi}{2\tau} - \sqrt{bc}).$

が成立する. Theorem 1 の証明を少し変更するだけで Theorem 3 は証明できる.

定理 3 を図解する (9) の解軌道図を以下に与える. 初期関数はいずれも $\varphi = -(t+3), \psi = \frac{5}{2} \sin 10t$ である.



参考文献

- [1] Hara, T. and Sugie, J., Stability region for systems of differential-difference equations, Funkcial. Ekvac.(1996), vol 39, pp69-89.
- [2] Josef Hofbauer and Joseph W.-H. So, Diagonal dominance and harmless off-diagonal delays, Funkcial. Proc.A.M.S.(2000), vol 128, pp2675-2682.
- [3] Z. Lu and W.Wang, Global stability for two-species Lotka-Volterra systems with delay, J. Math. Anal. Appl.(1997), 208, pp277-280.