

時間発展をともなう 1次元自由境界問題の数値解法の比較

金沢大学・理学部 小原功任 (Katsuyoshi Ohara)
Faculty of Science,
Kanazawa University

1 Introduction

本稿では、次の 1次元双曲型自由境界問題の初期値境界値問題の数値解法の比較を行う。

問題 1. $\Omega = (0, \infty)$ とする. 次の初期値境界値問題の非負の解をみつけよ.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & \text{in } (\Omega \times (0, \tau)) \cap \{u > 0\} \\ (u_x)^2 - (u_t)^2 = Q^2, & \text{on } (\Omega \times (0, \tau)) \cap \partial\{u > 0\} \\ u(0, t) = f(t), \\ u(x, 0) = e(x), \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (1)$$

ただし, $f(t), e(x), g(x)$ は与えられた関数とする.

我々は以下の数値解法の誤差を比較する. 問題 1 に対して固定領域法が有効であることは知られているが ([2]), 固定領域法は適用に限界があり, 自由境界が 2 点以上現れたり, 自由境界が生成・消滅するような場合には適用できない. そこで, 最初に固定領域法とその他の数値解法の比較を行い, その後で自由境界が生成・消滅するような現象に対して, 固定領域法以外の数値解法の間で比較を行う.

1. 固定領域法
2. 陽解法 (時間前進差分+空間中心差分)
3. 陽解法 (時間中心差分+空間中心差分)
4. 時間中心差分+空間有限要素法
5. 離散勾配流法

2 方程式の導出と問題の数学的背景

2.1 1次元ゼロテープの問題

次の問題を考える. 一次元の直線上に張り付いたゼロテープを切れないように引っ張りながら剥していく. 張力の合力の垂直成分が粘着力とつりあうようにテープが剥されているとすると, Lagrangean として

$$J(u) = \int_0^\tau \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}(u_t)^2 \chi_{u>0} - \frac{1}{2}(u_x)^2 + Q^2 \chi_{u>0} \right\} dx dt$$

が得られる. ([3] に, 空間 2 次元の場合の導出の説明がある)

$J(u)$ の停留点 u は, u に十分な regularity を仮定すれば, 方程式 (1) を満たすことをみよう. まず u が連続であると仮定する. テスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\{u > 0\})$ をとると第一変分方程式

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^\tau \int_\Omega (u_t \varphi_t - u_x \varphi_x) dx dt = 0$$

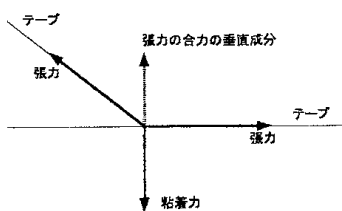


図 1: 一次元のテープ

は $u_{tt} = u_{xx}$ in $\{u > 0\}$ の弱形式になっている。さらに u に十分な regularity を仮定して, inner variation を用いた第一変分方程式を考えれば, 自由境界条件

$$(u_x)^2 - (u_t)^2 = Q^2 \quad \text{on } \partial\{u > 0\}$$

も導かれる。([3])

問題 1 はこのようにテープが剥がれ続ける状況, すなわちエネルギー保存 (剥がすために加えた力を含む) の場合を表している。

2.2 近似方程式

テープがくっつく場合はエネルギーが失われる。その場合を含め, 次の方程式が現象をよく記述している。

$$\chi_{u>0} u_{tt} = u_{xx} - Q^2 \delta_{\partial\{u>0\}}.$$

ただし $\chi_{u>0}$ は集合 $\{u > 0\}$ の特性関数, $\delta_{\partial\{u>0\}}$ は $\partial\{u > 0\}$ に support をもつ測度である。実際にはこの方程式を取り扱うのが難しいので, 次の近似問題を考える。

問題 2. Ω をある区間とする。このとき

$$\begin{cases} \chi_{u>0} u_{tt} = u_{xx} - Q^2 (\chi^\varepsilon)'(u), \\ u(0, t) = f(t), \\ u(x, 0) = e(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (2)$$

を満たす u を求めよ。

ここで, $\chi^\varepsilon(s) \in C^\infty(\mathbf{R})$ は

$$\chi^\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & (s \leq 0) \\ 1, & (s \geq \varepsilon) \end{cases} \quad \int_0^\varepsilon \chi^\varepsilon(s) ds = 1$$

を満たすようにとる。

方程式 (1) の解 u^ε は $\{u > \varepsilon\}$ では $u_{tt} = u_{xx}$ を満たす。また $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときに,

$$u \rightarrow \exists v \text{ such that } v_{tt} = v_{xx} \text{ in } \{v > 0\}$$

であるとすると, 形式的な計算で v は自由境界条件

$$(v_x)^2 - (v_t)^2 = Q^2 \quad \text{on } \partial\{v > 0\}$$

を満たす。したがって, この意味で u^ε は (1) の解の近似になっているので, われわれは (2) を (1) の近似方程式とみなす。(詳しくは [3] 参照のこと)

2.3 これまでに知られている数学的結果

まず、問題 1 の強い解が存在するかが問題になるが、Kikuchi-Omata [1] は、問題 1 について、強い解が存在するための十分条件を与えた。また、強い解の具体例を与えている。次に [2] では、固定領域法を用いて、問題 1 に関する詳細な数値解析が行われている。

次に、Omata [3] では、方程式 (2) を用いて水面に接触している石鹸膜がそっとはがれていく現象の数値解析を行っている。数値解法としては離散勾配流法を用いている (空間 2 次元)。

ところで方程式 (2) の解の存在についてはよく分かっていない。しかし、カレル・シュワドレンカ氏の研究によると、 $Q = 0$ のときには、ダンピング項を加えた方程式にすれば、解が存在することが分かった。

3 数値解法

3.1 固定領域法

方程式 (1) を対象とする数値解法。この数値解法は [2] で詳しく調べられている。

領域を $\Omega = (0, \infty)$ とし、自由境界が 1 点のみで現れるものと仮定する。 $l(t)$ を自由境界の座標とし、 $l_0 = l(0)$ とする。

mapping function $y = \frac{2x}{l(t)} - 1$ を用いて、次のように領域を写す。

$$(0, l(t)) \times (0, t) \ni (x, t) \mapsto (y, t) \in (-1, 1) \times (0, t)$$

(1) を (y, t) の微分方程式に書き直すと、次の方程式系が得られる。

$$u_{tt} - \frac{4 - ((y+1)l'(t))^2}{l(t)^2} u_{yy} - 2(y+1) \frac{l'(t)}{l(t)} u_{ty} - (y+1) \frac{l(t)l''(t) - 2(l'(t))^2}{l(t)^2} u_y = 0,$$

$$l'(t) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{Ql(t)}{2u_y(1, t)} \right)^2}.$$

ここで、 $l'(t) \geq 0$ であると仮定する。

さて、 y -空間 $[-1, 1]$ を N 等分割し、 u と $v = u_t$ の連立方程式に書き直すと、次の方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} u^i = v^i,$$

$$\frac{d}{dt} v^i = \frac{4 - ((y_i+1)l'(t))^2}{l(t)^2} \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{(\Delta x)^2} + 2(y_i+1) \frac{l'(t)}{l(t)} \frac{v^{i+1} - v^{i-1}}{2\Delta x} + (y_i+1) \frac{l(t)l''(t) - 2(l'(t))^2}{l(t)^2} \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2\Delta x},$$

$$l'(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{Ql(t)}{2u_y^N(t)} \right)^2}.$$

この方程式を t に関する 4 次の Runge-Kutta 法で解く。[2] にあるように、この方法が有効なことが知られている。このため、本稿ではこの方法を比較の基準としたい。

3.2 陽解法 (時間前進差分 + 空間中心差分)

方程式 (2) を対象とする数値解法.

$v = u_t$ とすると, (1) は, 次の方程式に書き換えられる.

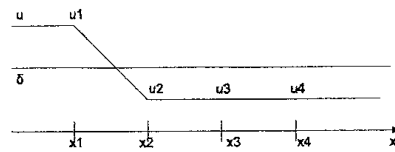
$$\begin{aligned} u_t &= v, \\ \chi_{u>0} v_t &= u_{xx} - Q^2(\chi^\varepsilon)'(u). \end{aligned}$$

まず, 空間 Ω を N 等分割する. $\Omega = [x_0, x_N]$, $x_0 < x_1 < \dots < x_N$.

次に $\chi_{u>0} v_t$ 項の取り扱いが問題になる. ここで, 微少な $\delta > 0$ をとり,

$$x_i \in \{u > 0\} \iff u_{i-1} > \delta \text{ or } u_i > \delta \text{ or } u_{i+1} > \delta$$

と定める. 例えば, 下の図の場合は $x_1, x_2 \in \{u > 0\}$ かつ $x_3 \notin \{u > 0\}$ となる.



次に, $Q^2(\chi^\varepsilon)'(u)$ 項は次のように扱う.

$$(\chi^\varepsilon)'(u) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & (0 < u_i < \varepsilon) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

最後に u_{xx} を中心差分で表すと, $x_i \in \{u > 0\}$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i &= v_i, \\ \frac{d}{dt} v_i &= \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} - Q^2(\chi^\varepsilon)'(u) \end{aligned}$$

なる方程式が得られる. この方程式を t に関して 4 次の Runge-Kutta 法で解く.

3.3 陽解法 (時間中心差分 + 空間中心差分)

方程式 (2) を対象とする数値解法.

陽解法 (時間前進差分 + 空間中心差分) の解法をもとに u_{tt} を中心差分にすると,

$x_i \in \{u > 0\}$ のとき,

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} - Q^2(\chi^\varepsilon)'(u_i^k).$$

ここで $u_i^k = u(x_i, t_i)$ とする.

整理すると, 漸化式

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + (\Delta x)^2 \left\{ \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} - Q^2(\chi^\varepsilon)'(u_i^k) \right\}$$

が得られる.

3.4 時間中心差分+空間有限要素法

方程式 (2) を対象とする数値解法.

(2) を積分して,

$$\int_{\Omega} (u_{tt} - u_{xx} + Q^2(\chi^\varepsilon)'(u)) \xi dx = 0. \quad (\forall \xi \in C_0^\infty(\{u > 0\}))$$

ここで, $u = \sum_i a_i(t) \varphi_i$, $a = (a_1, \dots, a_N)$ とすると,

$$\sum_i \left[(a_i)_{tt} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right] + \sum_i \left[a_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx \right] + Q^2 C(a) = 0$$

となるので,

$$B a_{tt} + A a + Q^2 C(a) = 0.$$

a_{tt} を中心差分で表して,

$$B \frac{a^{k+1} - 2a^k + a^{k-1}}{(\Delta t)^2} + A a^k + Q^2 C(a^k) = 0.$$

よって漸化式

$$a^{k+1} = 2a^k - a^{k-1} - (\Delta t)^2 (B^{-1} A a^k + Q^2 B^{-1} C(a^k))$$

を得る.

3.5 離散勾配流法

方程式 (2) を対象とする数値解法.

汎関数

$$J_n(u) = \int_{\Omega \cap (\{u > 0\} \cup \{u_{n-1} > 0\})} \frac{|u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2}{2h^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + Q^2 \int_{\Omega} \chi^\varepsilon(u) dx$$

の minimizer の列

$$\{u_m\}_{m=0,1,2,\dots} \subset \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}); u = u_0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

を時間に関して 1 次関数補間したものを, 方程式 (2) の近似弱解とみなす方法. ([3] 参照のこと)

4 数値解法の比較

4.1 Case 1. 方程式 (1) の真の解が存在する場合. ($Q^2 = 1$ とする)

方程式 (1) の真の解が存在する場合, 真の解と近似解を比較する. ($Q^2 = 1$ とする)

領域 $\Omega = (0, \infty)$

初期条件・境界条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}x, & (0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 1.0, & (0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$u(0, t) = 1 + t.$$

このとき方程式 (1) の真の解は $u(x, t) = \max(1 + t - \sqrt{2x}, 0)$ である。
我々は差分値を下の表の通りに選んで実験を行った。

	Δt	Δx
固定領域法	1.0×10^{-2}	$N = 100$
陽解法 (時間前進差分)	2.5×10^{-5}	2.0×10^{-2}
陽解法 (時間中心差分)	2.5×10^{-5}	2.0×10^{-2}
空間有限要素法	5.0×10^{-4}	2.0×10^{-2}
離散勾配流法	1.0×10^{-5}	4.0×10^{-2}

表 1: Case 1 における差分値

それぞれの数値解法で得られる近似解と真の解との誤差は次の表の通り。

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
固定領域法	3.2×10^{-7}	4.6×10^{-7}	9.1×10^{-7}
陽解法 (時間前進差分)	1.1×10^{-2}	1.5×10^{-2}	2.4×10^{-2}
陽解法 (時間中心差分)	1.1×10^{-2}	1.7×10^{-2}	2.7×10^{-2}
空間有限要素法	9.2×10^{-2}	2.1×10^{-1}	4.4×10^{-1}
離散勾配流法	1.6×10^{-1}	3.4×10^{-1}	7.9×10^{-1}

表 2: Case 1: 関数値 u の真値との誤差

さらに、自由境界の真値との誤差は次のようになる。ただし、固定領域法以外の数値解法では、自由境界を含む区間の中点を自由境界の近似値とみなした。

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
固定領域法	1.9×10^{-7}	1.9×10^{-7}	1.9×10^{-7}
陽解法 (時間前進差分)	4.7×10^{-2}	3.2×10^{-2}	4.0×10^{-2}
陽解法 (時間中心差分)	4.7×10^{-2}	3.2×10^{-2}	4.0×10^{-2}
空間有限要素法	8.7×10^{-2}	1.7×10^{-1}	3.4×10^{-1}
離散勾配流法	1.7×10^{-2}	8.0×10^{-2}	2.7×10^{-1}

表 3: Case 1: 自由境界の座標の真値との誤差

4.2 Case 2. はがれる速度が大きい場合. ($Q^2 = 1$ とする)

領域 $\Omega = (0, \infty)$

初期条件・境界条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \sqrt{5}x, & (0 \leq x \leq 1/\sqrt{5}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 2.0, & (0 \leq x \leq 1/\sqrt{5}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$u(0, t) = (1 + t)^2.$$

この問題では固定領域法が利用できるので、固定領域法と他の方法を比較することにした。すなわち固定領域法で得られた数値解を一次関数補間したものとの誤差を調べた。差分値については Case 1 と同じである。

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
陽解法 (時間前進差分)	5.8×10^{-1}	3.0	1.1×10^1
陽解法 (時間中心差分)	5.8×10^{-1}	3.0	1.1×10^1
空間有限要素法	7.2×10^{-1}	2.7	1.0×10^1
離散勾配流法	1.3	6.6	7.5×10^1

表 4: Case 2: 関数値 u の誤差

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
陽解法 (時間前進差分)	1.5×10^{-2}	2.6×10^{-1}	6.8×10^{-1}
陽解法 (時間中心差分)	3.5×10^{-2}	2.6×10^{-1}	7.0×10^{-1}
空間有限要素法	1.5×10^{-2}	1.6×10^{-1}	4.7×10^{-1}
離散勾配流法	5.4×10^{-3}	2.3×10^{-1}	1.1

表 5: Case 2: 自由境界の座標の誤差

4.3 Case 3. はがれる速度が小さい場合. ($Q^2 = 1$ とする)

領域 $\Omega = (0, \infty)$

初期条件・境界条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}x, & (0 \leq x \leq 2/\sqrt{5}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 0.5, & (0 \leq x \leq 2/\sqrt{5}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$u(0, t) = \sqrt{1+t}.$$

この問題では固定領域法が利用できるので、固定領域法と他の方法を比較することにした。すなわち固定領域法で得られた数値解を一次関数補間したものとの誤差を調べた。差分値については Case 1 と同じである。

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
陽解法 (時間前進差分)	1.6×10^{-2}	1.2×10^{-2}	4.0×10^{-1}
陽解法 (時間中心差分)	1.6×10^{-2}	2.8×10^{-2}	4.0×10^{-2}
空間有限要素法	1.9×10^{-1}	7.6×10^{-2}	3.2×10^{-1}
離散勾配流法	7.2×10^{-2}	5.0×10^{-2}	4.1×10^{-1}

表 6: Case 3: 関数値 u の誤差

	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 20.0$
陽解法 (時間前進差分)	5.8×10^{-2}	6.0×10^{-2}	7.0×10^{-2}
陽解法 (時間中心差分)	5.8×10^{-2}	4.0×10^{-2}	3.0×10^{-2}
空間有限要素法	3.2×10^{-1}	6.2×10^{-1}	4.7×10^{-1}
離散勾配流法	8.0×10^{-3}	1.0×10^{-2}	5.6×10^{-1}

表 7: Case 3: 自由境界の座標の誤差

4.4 Case 4. 自由境界が生成・消滅する場合.

初期値, 境界値の与え方によっては, 自由境界が生成・消滅する現象が観察される. しかしながら, 固定領域法では自由境界が一点でのみ現れることを仮定しており, 自由境界が生成・消滅する場合は扱えない. 本稿で検討している, 固定領域法以外の数値解法は, このような問題に対しても適用できる. そこで我々はこのような問題に対して, 固定領域法以外の数値解法を比較したい.

領域 $\Omega = (0, 1)$

初期条件・境界条件

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0.5, & u_t(x, 0) &= -20x(1-x), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0.5. \end{aligned}$$

この問題でははじめ自由境界はなく, テープが x 軸に接触することで 1 点の自由境界が現れる. すぐに自由境界は 2 点になるが, やがてそれらはくっつき, 最後に消滅する. (図 2)

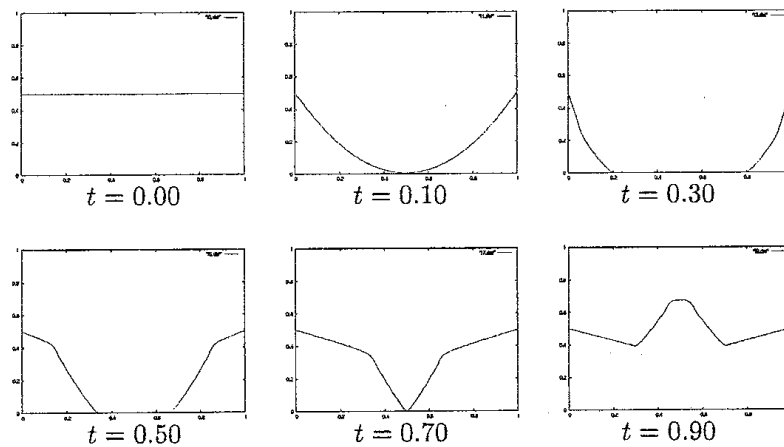


図 2: Case 4: 離散勾配流法による近似解

数値解法間の誤差を比較したいが, 基準となる数値解法が存在しないので, ここでは離散勾配流法とその他の数値解法との比較を行うことにする. 固定領域法と比較した場合と同様に, 離散勾配流法による近似解を一次関数補間したものとの誤差を調べた.

	$t = 0.10$	$t = 0.30$	$t = 0.50$	$t = 0.70$
陽解法 (時間前進差分)	1.9×10^{-4}	4.5×10^{-3}	0.9×10^{-2}	2.8×10^{-2}
陽解法 (時間中心差分)	1.6×10^{-4}	4.7×10^{-3}	1.0×10^{-2}	2.6×10^{-2}
空間有限要素法	1.7×10^{-4}	4.3×10^{-3}	6.4×10^{-3}	5.9×10^{-3}

表 8: Case 4: 離散勾配流法との関数値 u の誤差

5 結論

それぞれの数値解法の特徴と利点・欠点を表にまとめた。

	時間の扱い	空間の扱い	時間計算量	精度	自由境界の生成・消滅
固定領域法	前進差分	差分	小さい	◎	×
陽解法 (時間前進差分)	前進差分	差分	小さい	○	○
陽解法 (時間中心差分)	中心差分	差分	小さい	○	○
空間有限要素法	中心差分	有限要素法	小さい	○	○
離散勾配流法	一次補間	有限要素法	大きい	○	○

一次元の問題の場合、適用できる局面では固定領域法を使用すべきである。もちろん、自由境界が生成・消滅する場合などには固定領域法を適用できない。次に、固定領域法が適用できない問題についてであるが、離散勾配流法での計算時間は他の数値解法に比べて極めて大きいことに注意したい。しかしながら離散勾配流法は空間の次元が高くても、アルゴリズムがほとんど変わらないので、高次元の問題にも適用できる方法である。また本稿では扱っていないが、体積保存条件のもとで、方程式 (2) を解く場合には、いまのところ離散勾配流法以外の方法は知られていない。

参考文献

- [1] K. Kikuchi, S. Omata: A free boundary problem for a one dimensional hyperbolic equation, Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999).
- [2] H. Imai, K. Kikuchi, K. Nakane, S. Omata, T. Tachikawa: A numerical approach to the Asymptotic Behavior of Solution of a one-dimensional free boundary problem of hyperbolic type, Japan J. of Ind. and Appl. Math. **18** (2001).
- [3] S. Omata: A numerical treatment of film motion with free boundary, Adv. Math. Sci. Appl. **14** (2004).