

# 一般素数グラフと部分群束について

山口大学教育学部 (Yamaguchi University)

飯寄信保 (Iiyori, Nobuo)

## 1 部分群束の部分集合

$G$  を群とし、 $\Xi$  を群についての性質とする。 $\text{Sub}_\Xi(G)$  で群  $G$  の  $\Xi$ -部分群全体を表すことにする。 $(\text{Sub}(G))$  は  $G$  の部分群全体を表すものとする。 $\text{Sub}_\Xi(G)$  は、通常の含有関係により自然に順序集合の構造を持つが、この順序集合も  $\text{Sub}_\Xi(G)$  で表記することにする。 $\text{Sub}_\Xi(G)$  は、一般には、単位群  $1$  や  $G$  の自明な部分群を含んでいないので、 $\text{Sub}_\Xi(G)$  に  $1$  と  $G$  を付け加えたものを  $\text{Sub}_\Xi(G)^*$  で書き表すことにする。

**例 1**  $G = SL_2(C)$  として、群の性質として「有限群である (*finite*)」を考える。このとき  $\text{Sub}_{finite}(G)$  は  $SL_2(5)$ 、 $GL_2(3)$  などの限られた有限群しか含まれない。

**例 2**  $G$  を有限群、 $P$  をそのシロー  $p$ -部分群とする。 $\text{Sub}_\Xi(G) = \{A \mid \text{ある } Q \subseteq P \text{ に対して、} [A, Q] \subseteq Q\}$  として、逆に  $\Xi$  を定義することもできる。

これらの順序集合を研究する場合、ひとつの有力な手段として一般素数グラフを用いるものがある。 $\text{Sub}_\Xi(G)$  に含まれる部分群の位数の集合を  $O_\Xi(G)$  と書くことにし、 $V$  を  $O_\Xi(G)$  に含まれる正整数達の素因数全体の集合とする。一般素数グラフ「 $\Xi$ -グラフ」(ここでは、位数グラフという種類のものであるが、) というのは、頂点集合を  $V$  とし、 $V$  属する相異なる 2 素数  $p, q$  に対して、丁度  $pq$  で割り切れるような  $O_\Xi(G)$  の要素が存在するときに、またそのとき限りにおいて  $(p, q)$  を辺とするようなグラフのことである。こうしてできるグラフの総称が、一般素数グラフである。この特殊な場合として、群の性質として、巡回部分群に注目してできるグラフは、所謂素数グラフと一致しており、これらのグラフは丁度、素数グラフを一般化したグラフと考えられるので一般素数グラフという名前が与えられたのである。

ここで注意していただきたい点として、「群の性質」についてである。まず第一点として、群の性質というのは、準同形写像で保たれる必要がないという点である。たとえば、「真の部分群である」、「極大部分群である」、非可解である等は、明らかに準同形で保たれる性質でない。また、全射準同形では、「正規である」という性質は保たれるが、一般の準同形では、その保障はまったくない。われわれの一般素数グラフではこのような性質も扱っているということに注目していただきたい。

第二点として、(まったく?) 異なる群の性質が同じグラフを定義することもあるという点である。2つの例を挙げてみよう。一つ目の例として、「真の部分群である」、「極大部分群である」である。この二つの性質は、明らかに「極大部分群である」の方が強い条

件である。(このことを我々は、「真の部分群である」 $\leq$ 「極大部分群である」と書き表すことにする。)しかし、真の部分群は、常にある極大部分群に含まれるので「任意の真の部分群の位数は、ある極大部分群の位数を割り切る。」がいえる。また極大部分群は真の部分群である。このことより、この二つの性質が定義する一般素数グラフは一致する。

二つ目の例であるが、「巡回群である」、「可換群である」、「べき零群である」については、明らかに

$$\text{「巡回群である」} \leq \text{「可換群である」} \leq \text{「べき零群である」}$$

が成立する。しかし、これらの性質が定義する一般素数グラフは、素数グラフと一致しすべて一緒である。

このように、一般素数グラフを構成したとき同じグラフを定義する2つの群の性質  $P, Q$  を、我々は、GPG-同値と呼び、 $P \equiv_{GPG} Q$  で書き表すことにする。よって、GPG-同値な2つの性質が本質的に異なる場合、どのようにしてこれらの性質の相違を群から引き出すかが、重要な課題となる。(しかし、素数グラフ・一般素数グラフの概念は、群の難問が阿鼻叫喚、七転八倒するほど強力なものであることは、断っておく。つまり、素数グラフ・一般素数グラフは、群の情報の骨の髄・神経細胞が出てくるほど非常にうまく徹底的に削り、群の本質だけをのこしたものであることが経験的にわかっている。)

## 2 順序集合のバーンサイド環

順序集合  $S$  は次の条件を満たしていると仮定する。

- (i) 任意の  $x, y \in S$  に対して、 $z \leq x, z \leq y$  を満たす最大の元  $x \cap y$  が存在する。
- (ii)  $S$  には、最大元  $X$  および、最小元  $1$  が存在する。

このとき、 $S$  の有限個の元の線形和全体  $\mathbf{Z}[S]$  は、任意の  $x, y \in S$  に対しての積を  $x \cap y$  で定めることにより可換代数になる。ここでは、この条件 (i)、(ii) を代数化条件と呼ぶことにする。

代数化条件を満たす順序集合  $S$  に作用する群を  $A$  とする。任意の  $x \in S$  に対して、 $x$  の  $A$  による軌道に属する元の線形和を  $[x]$  で表すことにする。このとき、 $x_1, x_2, \dots$  を  $A$ -軌道の代表系とすると、 $[x_1], [x_2], \dots$  は、 $A$  の固定する元のなす  $\mathbf{Z}[S]$  の部分環  $\mathbf{Z}[S]^A$  の  $\mathbf{Z}$  上の生成元になる。我々は、この部分環の部分環が必要になる。そのために、まず  $x, y \in S$  に対して

$$[x][y] = \sum_{i=1,2,\dots} \beta_{x,y}(x_i)[x_i]$$

と定義する。つまり、 $\beta_{x,y}$  は、 $\mathbf{Z}[S]^A$  の積定数である。

我々が注目したい構造物は、 $\mathbf{Z}[S]^A$  の部分代数で「かなり性質のよい」ものである。それを定義するために次の概念を導入する。 $A$  に適合する重み関数  $w: S \rightarrow \mathbf{C}$  とは、次の条件を満たすものである。 $g \in A$  そして  $x \in S$  に対して、

- (1)  $w(1) = 1$  また、 $w(x)$  は  $|A_x|$  を割り切る、
- (2)  $\beta_{x,y}(z) \cdot \frac{w(x)w(y)}{w(z)} \in \mathbf{Z}$ ,

$$(3) w(x) = w(x^9).$$

$A$ に適合する重み関数  $w$  が与えられたとき、 $x_1, x_2, \dots$  を  $A$ -軌道の代表系とすると、 $w(x_1)[x_1], w(x_2)[x_2], \dots$  の線形和全体  $B(S, A)$  は  $\mathbf{Z}[S]^A$  の部分環になる（このように定義したのだからこの事実は当たり前である）。この環を  $S$  の ( $A$ -) バーンサイド環と呼び、 $B_w(S)$  と書くことにする。もちろんこのバーンサイド環は、重み関数の取り方に依存する。トリビアルな例として  $\mathbf{Z}[S]^A$  があげられる。このトリビアルな例の重み関数は、 $S$  上恒等的に 1 の値をとる関数である。

**例 3**  $G$  を有限群、 $H$  をその部分群とする。このとき、 $a \in \text{Sub}(G)$  に対し、

$$w(a) = (N_G(a) : a)$$

とおくと、 $w$  は  $H$  に適合する重み関数になっている。この重み関数で定義されたバーンサイド環を  $B(G, H)$  で書くことにする。

**例 4**  $C \subseteq 2^X$  をコードとし、 $S = \{a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_m \mid m \in \mathbf{Z}, a_i \in S\}$  とおく。 $A$  を  $C$  の自己同型群としたとき、適当に ( $S$  上恒等的に 1 の値をとる関数を) 重み関数と考えれば、 $C$  についてのバーンサイド環を得ることができる。

さて、我々が考察したい主たる問題は次のものである。

#### 問題 1.

順序集合  $S$  によって、その自己同型群に準同形をもつ群  $A$  を特徴づけよ。

このような問題設定であると非常に多くのケースと統一的な計算が不可能な状態に落ちるので、次のようなサブケースを考えることができる。

#### 問題 2.

環とその部分環の組  $(\mathbf{Z}[S], B_w(S))$  によって、 $B_w(S)$  を定義する群  $A$  を特徴付けよ。

この問題は、問題 1 より現実的な設定であるのことは、次のようなことからわかる。実際、 $B_w(S)$  よりたいした苦勞なしで  $\mathbf{Z}[S]^A$  が計算できる。このことより、 $S$  の  $A$ -軌道の情報がだまかに計算できる。もしかしたら、 $B_w(S)$  のみで、 $\mathbf{Z}[S]$  自体が、復元できるのではないかという思いもおこる。さらに、そういう妄想的なことではなくて、現実には、 $B_w(S)$  より、その拡大環  $R_0$  が一意的に計算できて、次を満たすことが検証できる：

$$R_0/B_w(S) \simeq \prod_{\sigma \in S/\sim_A} \mathbf{Z}/w(\sigma)\mathbf{Z}.$$

ただし、上の同型は加群としてのものである。しかし、問題 2 が解決できたとして、問題 1 の解決にどれだけ還元できるかは、まだはっきりとわかっていない。次の節では、問題 2 ついての結果を紹介したいと思う。

### 3 一般素数グラフに関する部分群束の部分集合

前節で扱ったバーンサイド環等を我々の研究に適合させることをこの節では考えたい。我々のターゲットは、 $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ であった。しかし、この集まりは、素朴な意味での集合論の交わりをとる操作について閉じていないので代数化条件を満たしていない。ここは、織田信長の心境になって、ホトトギスを鳴かす代わりに代数化条件を無理やり満たすようにしてやればよい。

$$\text{Sub}_{\Xi}(G) = \{a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_m \mid a_i \in \text{Sub}_{\Xi}(G)\}$$

として $\Xi$ から $\Xi$ を定義してやるわけである。もっと乱暴にしても良いかもしれない；

$$\text{Sub}_{\Xi}(G) = \{a \cap x \mid a \in \text{Sub}_{\Xi}(G), x \in \text{Sub}(G)\}.$$

このように定義したものは、実はみなGPG-同値になっている。さらに、 $\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)^*]$ は $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ を含む $\mathbf{Z}[\text{Sub}(G)]$ の最小の部分代数であり、 $\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)]$ は、 $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ の生成するイデアルになっている。以下、 $\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)^*]$ が $\mathbf{Z}[\text{Sub}(G)]$ の部分代数を定義する場合、 $\Xi$ を1型、 $\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)]$ が、 $\mathbf{Z}[\text{Sub}(G)]$ のイデアルになっている場合、2型と呼ぶことにする。

さて、 $G$ を有限群、 $H$ をその部分群とする。1型の群の性質 $\Xi$ に対して、 $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ を考える。ただし、 $H$ は $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ 上に共役で作用するものとする。バーンサイド環 $B(G, H)$ を定義する重み関数を $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ に制限し、これを $w$ であらわすことにする。 $w$ のとり方により、 $w$ による $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ のバーンサイド環 $B_{\Xi}(G, H)$ が定義できる。当然、これは $B(G, H)$ の部分代数になっている。本来ならば、 $B(G, H)$ における、 $B_{\Xi}(G, H)$ の入り方もきちんと議論しなければならないだろうが、ここではそれについては触れないでおく。しかし、次の入り方には注目をしたい：

$$B_{\Xi}(G, H) \subseteq \mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)].$$

この考察において重要な役割を果たすのが、次で定義される $\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)]$ から $B_{\Xi}(G, H)$ への写像である： $a \in \text{Sub}_{\Xi}(G)$ に対し、

$$\Phi(a) := \sum_{h \in H} (a^h).$$

これは、もちろん、準同形ではない。しかし、 $\mathbf{Z}$ -線形にはなっている。よって、 $\Phi$ 及び、 $\text{Sub}_{\Xi}(G)$ で生成される、 $\text{End}(\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)])$ の部分環 $R$ （ただし、右加群として）を考えることができる。このようなシステムは、もちろん前節で用意したレベルで当然定義できる。これについては、次のようなことが計算できる。

#### 定理

$M(n, k)$ を有理整数を成分にもつ行列環 $M_n(\mathbf{Z})$ 部分代数で、次の元で生成されるものとする： $\{e_{i,i} : \text{行列要素} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup k \cdot M_n(\mathbf{Z})$  ( $n, k$ は正の整数)。このとき次が成立する。（重み関数を定義した時の記法を用いると）

$$R \simeq \bigoplus_{x \in S/\sim_A} M((A : A_x), |A_x|).$$

この定理は素朴なものであるが、 $(\mathbf{Z}[\text{Sub}_{\Xi}(G)], B_{\Xi}(G, H), \Phi)$ がかなりの $A$ の情報を含んでいることを示している。

話を元に戻して、 $\text{Sub}_{\Xi}(G)$  について考える。この場合に上の定理を  $\text{Sub}_{\Xi}(G)$  の場合に当てはめると次のようなデータが得られる。ただし、これらは無条件にもとまるものでなく当然、いくつかの条件を必要とする。(位数  $p^2$  の部分群束は  $p$  によらず、同型であること、簡単な構造をもつフロベニウス群の部分群束は可換群の部分群束に同型である場合があること等に注意してもらいたい。)

- (1)  $\text{Sub}_{\Xi}(G)$  の各要素の位数
- (2)  $\text{Sub}_{\Xi}(G)$  の  $A$ -共役類
- (3) (これは、 $A, \Xi$  がさらに強い条件を満たすときであるが)  $A$  の位数。

適当な  $\Xi$  に対しては、非可解単純群については、上のデータが計算できる。(方法は、アーベル群の場合、群の直積について、フロベニウス群について... と地道に特徴づけを行い、それらの結果を用いて行うので、ここでは説明を省く。)

さて、我々の今回の主定理は次のとおりである：

#### 定理

$A$  を斜交群、 $B$  型の直交群でない有限単純群とする。このとき、有限群  $G$  について

$$(\mathbf{Z}[\text{Sub}_{sol}(G)], B_w(\text{Sub}_{sol}(G))) \simeq (\mathbf{Z}[\text{Sub}_{sol}(A)], B_w(\text{Sub}_{sol}(A)))$$

が成立するならば、 $G \simeq A$  が成り立つ。ここで、 $G$  および、 $A$  はそれぞれ  $\text{Sub}_{sol}(G), \text{Sub}_{sol}(A)$  に共役で作用しているものとし、重み関数は例 3 で用意したものとする。

この定理は、素数グラフに関する Abe, Li, ... らの次の結果にを用いて証明される。

#### 定理

$A$  を斜交群、 $B$  型の直交群でない有限単純群とする。このとき、有限群  $G$  について

$$O_{sol}(G) = O_{sol}(A)$$

を満たすならば、 $G \simeq A$  が成立する。

#### 参考文献

- [1] Abe, S. and Iiyori, N., *A generalization of prime graphs of finite groups*. Hokkaido Math. J.
- [2] Iiyori, N., *A generalization of prime graphs of finite groups II*. preperation.