

施設に対する査察資源の最適割当を考慮した査察ゲーム

防衛大学校・情報工学科 宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)

Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

核不拡散条約の遵守を支援する国際機関である IAEA (国際原子力機関) が話題を提供することの多い近頃の世界情勢であるが、この論文ではこのような組織が実施する査察効果をゲーム理論により分析することを目的とする。核物質の国際査察に拘わらず、兵力削減交渉における査察や税関における輸出入物品の検査、さらには密輸品等禁制品の取締など、査察や検査、検閲を取り扱うゲームを Inspection ゲームと総称する。

Inspection ゲームは、兵力削減条約の遵守に関し Drescher が行った多段階の 2 人ゼロ和ゲームの研究 [3] に始まる。彼のモデルをより一般化したのが Maschler [6] である。このような兵力・兵器削減問題としてのモデルを密輸者とその違法行為を監視する税関とのゲームに置き換え、取締ゲームとして研究したものに Thomas and Nisgav [8], Baston and Bostock [2], Garnaeu [5], Sakaguchi [7] や Ferguson and Melolidakis [4] といった一連の研究がある。

以上の Inspection ゲームではいずれも 2 人ゼロ和の前提がなされていたが、国際査察の場合においてはこの前提はいかにも当てはまらない。まず、査察関係者としては、査察者である IAEA をはじめとして、被査察国は通常数カ国に上る。また、IAEA が行う査察の当面の目的は、条約国による核物質の拡散行為が抑止され、彼らが条約に対し合法的に振舞っていることを査察により確認することである。したがって、たとえ非合法活動が査察により発見されても、それは IAEA が期待する望ましい状況とは必ずしも言えない。また、条約違反の動機を多分にもつ国にとっては、自らの利害損得に関する客観的な観点から、場合によっては査察による摘発の可能性を視野にいれても非合法活動に走る場合もあり得る。このような観点から、それまでのモデルとは異なり、1 段階ではあるが非ゼロ和のゲームとして査察問題を取り扱ったのが Avenhaus ら [1] である。彼らは、1 人の査察者と 2 つの被査察国の参加する 3 人ゲームとして問題を考え、査察者に関しては手持ちの査察資源を 2 つの被査察国にどのように分割投入すべきかを、被査察者に関しては合法的に振る舞うべきか非合法的であるべきかの戦略をとるものとしたが、査察官/査察資源の投入による非合法活動の発見確率は所与のものとして扱っている。しかし、被査察国内にも多くの査察対象施設のあることが一般的であることを考えると、1 つの被査察国に与えられた査察コスト/査察資源をどのように各施設に割り当てるかの最適割当の観点が部分問題として必要であると思われる。この報告では、この部分問題の最適解を考慮して査察ゲームの均衡解を導出するが、提案した手法により多数の被査察国をもつ問題へ拡張することも容易である。

以下の第 2 節では、取り扱う査察問題のモデルを記述し、プレイヤーの戦略を定義することでプレイヤーの期待利得の式を導出し、施設に対する査察人数最適配分問題とゲームのナッシュ均衡解を求める問題を定式化する。さらに 3 節では、査察人数最適配分問題を解くことで得られる発見確率関数の性質を明らかにすることにより、ナッシュ均衡解が査察者の純粋戦略の範囲内で求められることを示す。さらに、均衡解の性質を利用することにより、均衡解の明確な導出アルゴリズムを提案する。第 4 節では、そのアルゴリズムを用いて解いた数値例による考察を述べる。

2 モデルと定式化

2 つの被査察国に対する査察団の編成を考える際には、通常、各国においてどの施設を査察の対象とするかは予め決められている。また、施設の規模、そこで取り扱われる査察対象物質の数量や処理方法に関する事前調査により、それらの施設の疑わしさに関するおおよその見積に基づいて査察計画が立案される。また、

査察を請け負う国際機関では、査察は予め決められた予算の範囲内で実施される。したがって、ここでは、ある予算制約の下で被査察国の施設への人的・物的な査察資源の効果的配分を問題とする次のような査察ゲームを考える。

- (A1) ある禁制品の非拡散を目的とした条約があり、この条約加盟国として査察対象となっている2つの被査察国と査察を実施する1つの査察機関があり、これら3人がプレイヤーとして参加する。
- (A2) 条約国である2つの国 $k = 1, 2$ にはこの禁制品を生産・処理・保管できると見なされている工場や倉庫といった施設が l^k 棟あり、それが査察対象となっている。 k 国が非合法活動により禁制品を取り扱っている場合には、それが施設 $i = 1, \dots, l^k$ に存在する確率は p_i^k と見積もられる。ただし、 $\sum_i p_i^k = 1$ である。また、禁制品の取り扱われている施設 i に対し x 人の査察官を派遣することにより、この非合法活動の証拠が露呈する確率は $1 - \exp(-\alpha_i^k x)$ と見積もられる。パラメータ $\alpha_i^k > 0$ はこの施設における禁制品発見の効率性を示す係数である。
- (A3) 2つの被査察国は禁制品の製造、加工等の非合法活動を“一切しない”か、“する”かの選択を他国とは独立に行う。 k 国が非合法活動を行って査察に引っかからなければ、禁制品から $n_k^I > 0$ の利益を得るが、査察により露呈すれば $d_k^I > 0$ の制裁金ないしは被害を被る。非合法活動をしなければ、査察がある無しに拘わらず利益も被害もない。被査察国は、自国の利益のみを考えて意思決定を行う。
- (A4) 査察者は予算 C により2つの被査察国への査察団を編成する。 k 国の施設 i への査察費用は査察官1人当たり $c_i^k > 0$ を必要とする。査察者にとっては被査察国側の非合法活動を抑止することが主たるねらいであるため、 k 国が合法的に振る舞っている限り利得はゼロである。もし非合法活動を行っておりそれが見つかることになれば、査察者は $d_k > 0$ の損失、さらにその活動が見つからなければ、抑止効果に対する他国への悪影響を考慮してより大きな $n_k > 0$ の損失を被る。つまり、 $n_k > d_k$ である。査察者の総利得はこれらの利得の2国に関する和であるとする。
- このような支払尺度の下で、査察者は2つの被査察国の各施設への派遣査察官の人数構成を決めたい。ただし、人数を実数として取り扱う。

この問題は、各被査察国は非合法活動を {しない (LG), する (IL)} の2つの純粋戦略をもち、査察者は各国の施設への派遣査察人数構成 $\{x_i^k, i = 1, \dots, l^k, k = 1, 2\}$ を決める戦略をもつ非ゼロ和3人ゲームである。ただし、 x_i^k は k 国の施設 i への派遣人数を表す。査察者の戦略を、査察予算 C の2国への配分量 y_1, y_2 を決定し、その後それらの配分予算内で各施設への派遣人数を決定する2段階の意思決定と捉えてもよい。

そこで以下では、 $y_k, k = 1, 2$ が与えられた場合の k 国内の施設への最適査察人数割当問題と、配分量 y_1, y_2 の最適決定問題をこの順に議論してゆく。

2.1 最適査察人数割当問題

ここでは、被査察国 k に予算配分量 y_k が与えられていると仮定し議論を進める。人数に対する査察効果の仮定 (A2) から、査察人数が多ければ多いほど施設における非合法活動の発見確率は大きくなり、支払に関する仮定 (A4) の $n_k > d_k$ から、 k 国への予算割当量 y_k を余りなく使用し、最大の発見確率を得るように施設への割当人数を決定すべきである。したがって、 $x^k = \{x_i^k, i = 1, \dots, l^k\}$ の実行可能性条件は以下となる。

$$\sum_{i=1}^{l^k} c_i^k x_i^k = y_k, \quad x_i^k \geq 0, i = 1, \dots, l^k. \quad (1)$$

また、 k 国が非合法活動を行っている場合は、予算 y_k をもつ派遣計画 x^k による非合法活動の発見確率 $P_k(x^k)$ は次式で表される。

$$P_k(x^k) = \sum_{i=1}^{l^k} p_i^k (1 - \exp(-\alpha_i^k x_i^k)) = 1 - \sum_{i=1}^{l^k} p_i^k \exp(-\alpha_i^k x_i^k). \quad (2)$$

したがって、 k 国に関する最適査察人数割当問題は、制約条件 (1) の下で発見確率 $P_k(x^k)$ を最大にすることである。これは (2) 式の右辺第2項が表す非発見確率の最小化と考えても同じである。この最適割当を求め

る手順は被査察国 $k = 1, 2$ のどちらに対しても同じであるため、問題を簡単にするため、 n カ所の施設があり、施設 i は仮定 (A2) で述べられている発見効率性として α_i をもち、ここで非合法活動が行われている確率が p_i である国を代表として考える。また、この国への査察予算は y 、施設 i への派遣費用は査察官 1 人につき c_i であるとする。このとき、施設 i への派遣人数を x_i とし、非発見確率に関する次の最小化問題 (P) を解けば、施設への査察官の最適割当が求められる。

$$(P) \quad \beta(y) = \min_x \sum_{i=1}^n p_i \exp(-\alpha_i x_i) \tag{3}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4}$$

問題 (P) を k 国について解いて得られる最小非発見確率を以後 $\beta_k(y)$, $k = 1, 2$, と表そう。問題 (P) の性質から、 y の増加に対し最適値 $\beta_k(y)$ が単調減少することは明らかである。また、 $\beta_k(0) = 1$ であり、無限の予算割当 $y \rightarrow \infty$ に対し $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta_k(y) = 0$ であることも明らかである。

2.2 最適予算分割と査察ゲーム

ここでは、前節で議論した非発見確率関数 $\beta_k(y)$ が分かっているという仮定の下で、3人プレイヤーの査察ゲームを定式化する。査察者の被査察国 1, 2 への査察予算の分割戦略を $y_1, y_2, y_1 + y_2 = C$, としよう。

仮定 (A3) から、 k 国が非合法活動をした場合の利得は次式で与えられる。

$$-d_k^I(1 - \beta_k(y_k)) + n_k^I \beta_k(y_k) = -d_k^I + (n_k^I + d_k^I) \beta_k(y_k). \tag{5}$$

戦略 LG(合法) をとれば利得はゼロである。また仮定 (A4) から、2 国がともに非合法活動を行った場合の査察者の利得は次式となる。

$$-\sum_{k=1}^2 \{d_k(1 - \beta_k(y_k)) + n_k \beta_k(y_k)\} = -\sum_{k=1}^2 \{d_k + (n_k - d_k) \beta_k(y_k)\}. \tag{6}$$

k 国が戦略 LG(合法) をとった場合の査察者の利得は、式 (6) において k の項をゼロとおくか、それを省けばよい。

以上により、査察者の戦略を $y = (y_1, y_2)$ とした場合の 2 つの被査察国の戦略 {LG(合法), IL(非合法)} の 4 つの組合せに対する 3 人の利得表を書くと、表 1 のようになる。4 つの象限において書かれた 3 行の式のうち、1 行目が被査察国 1 の利得、2 行目、3 行目の式がそれぞれ被査察国 2, 査察者の利得を表す。

表 1. 支払行列

		LG	IL
LG	0	0	0
	0	0	$-d_2^I + (n_2^I + d_2^I) \beta_2(y_2)$
IL	0	0	$-\{d_2 + (n_2 - d_2) \beta_2(y_2)\}$
	$-d_1^I + (n_1^I + d_1^I) \beta_1(y_1)$	$-d_1^I + (n_1^I + d_1^I) \beta_1(y_1)$	$-d_1^I + (n_1^I + d_1^I) \beta_1(y_1)$
	$-\{d_1 + (n_1 - d_1) \beta_1(y_1)\}$	$-\{d_1 + (n_1 - d_1) \beta_1(y_1)\}$	$-\sum_{k=1}^2 \{d_k + (n_k - d_k) \beta_k(y_k)\}$

ここで被査察国 k が非合法戦略をとる確率を q_k とすると、(5) 式から、査察者戦略 y に対する k 国の期待利得 $f_k(y_k, q_k)$ は次式で与えられる。

$$f_k(y_k, q_k) = q_k \{-d_k^I + (n_k^I + d_k^I) \beta_k(y_k)\}, \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

同様に、(6)式から、査察国の期待利得 $h(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ は次式となる。

$$h(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = - \sum_{k=1}^2 q_k \{d_k + (n_k - d_k) \beta_k(y_k)\}. \quad (9)$$

関数 $f_k(y_k, q_k)$ は、前節で議論した関数 $\beta_k(y)$ の性質より、 $q_k > 0$ であれば

$$f_k(0, q_k) = q_k n_k^f > 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} f_k(y, q_k) = -q_k d_k^f < 0 \quad (10)$$

であり、 $q_k = 0$ であれば恒等的にゼロである。 $n_k > d_k$ であることに注意すれば、査察者の期待利得関数 $h(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ に関しては、 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \mathbf{0}$ である場合のみ恒等的にゼロとなるが、それ以外の \mathbf{q} に対しては常に負値をとる。

以降の節では、被査察者に関しては混合戦略 \mathbf{q} の範囲で、査察者に関しては純粋戦略 \mathbf{y} の範囲で議論し、次のような条件を満たすナッシュ均衡解 \mathbf{q}^* , \mathbf{y}^* が存在するかどうか、あればその導出方法について焦点を当ててゆくことにする。

$$f_k(y_k^*, q_k^*) = \max_{q_k} f_k(y_k^*, q_k), \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

$$h(\mathbf{y}^*, \mathbf{q}^*) = \max_{\mathbf{y}} h(\mathbf{y}, \mathbf{q}^*). \quad (12)$$

ただし、容易にわかるように、 q_k の実行可能領域は $0 \leq q_k \leq 1$ であり、 \mathbf{y} のそれは $\Pi = \{\mathbf{y} \mid y_1 + y_2 = C, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ である。

3 査察人数の最適割当とナッシュ均衡解の導出

ここでは、前節で定式化した最適査察人数割当問題を解き、それを使って査察ゲームのナッシュ均衡解を導出することを考える。

3.1 被査察国における最小非発見確率

問題 (P) は最適配分問題として古くからその解法が知られており、概要を示すと次のようになる。

まず、左辺がラグランジュ乗数 λ の減少関数となる次の方程式に対し解 λ を求める。ただし、記号 $[]^+$ は $[x]^+ = \max\{0, x\}$ を意味する。

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\alpha_i} \left[\log \frac{\alpha_i p_i}{\lambda c_i} \right]^+ = y. \quad (13)$$

この解は区間 $(0, \max_i \alpha_i p_i / c_i]$ に唯一存在する。その後、次式により最適割当 x_i^* , $i = 1, \dots, n$, が導出できる。

$$x_i^* = \frac{1}{\alpha_i} \left[\log \frac{\alpha_i p_i}{\lambda c_i} \right]^+, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

これを目的関数に代入して最適値 $\beta(y)$ は計算できるが、 λ を使った次式によっても計算は可能である。

$$\beta(y) = \sum_{\{i|x_i^*=0\}} p_i + \sum_{\{i|x_i^*>0\}} p_i \exp(-\alpha_i x_i^*) = \sum_{\{i|\lambda \geq \alpha_i p_i / c_i\}} p_i + \lambda \sum_{\{i|\lambda < \alpha_i p_i / c_i\}} c_i / \alpha_i. \quad (15)$$

さて、最小発見確率 $\beta(y)$ について、次の性質が成り立つことを確認しよう。

補題 1 非発見確率 $\beta(y)$ は y に対し単調減少である。また、狭義凸関数である。

(証明) 前半は明らかである。狭義凸性は、 $0 < \gamma < 1$ である任意の γ に対して $\beta(\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2) < \gamma\beta(y_1) + (1-\gamma)\beta(y_2)$ であることを証明すればよい。このため、(3) 式の目的関数 $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i \exp(-\alpha_i x_i)$ の変数ベクトル \mathbf{x} に対する狭義凸性を利用する。 $A(y) \equiv \{\mathbf{x} \mid \sum_{j=1}^n c_j x_j = y, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ とおくと、

$$\{\gamma \mathbf{x} + (1-\gamma)\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in A(y_1), \mathbf{x}' \in A(y_2)\} \subseteq A(\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta(\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2) &= \min_{\mathbf{x} \in A(\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2)} g(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{x} \in A(y_1), \mathbf{x}' \in A(y_2)} g(\gamma \mathbf{x} + (1-\gamma)\mathbf{x}') \\ &< \min_{\mathbf{x} \in A(y_1), \mathbf{x}' \in A(y_2)} \{\gamma g(\mathbf{x}) + (1-\gamma)g(\mathbf{x}')\} = \gamma \min_{\mathbf{x} \in A(y_1)} g(\mathbf{x}) + (1-\gamma) \min_{\mathbf{x}' \in A(y_2)} g(\mathbf{x}') \\ &= \gamma\beta(y_1) + (1-\gamma)\beta(y_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。故に、 $\beta(y)$ は y に関し狭義凸である。 Q.E.D.

さらに、後の議論のため、導関数 $d\beta(y)/dy$ を考えておく。方程式 (13) の左辺は、正の値をとる限り、 λ に対し単調減少である。したがって、 y の増加に対し根 λ は単調に減少し、(14) 式で与えられる最適解 x_i^* は非減少となる。今、予算 y から微小な正值 dy だけの増加を考えると、 $x_i^* > 0$ であった最適解は正の値のまま増加し、たまたま $\lambda = \alpha_k p_k / c_k$ のために $x_k^* = 0$ であった最適解のみが 0 から微量増加することになる。議論を簡単にするため、このような解は x_k^* のみだとしよう。他の最適解 $x_i^* = 0$ はゼロのままである。 $x_i^* > 0$ 及び x_k^* のどちらの場合でも、(14) 式から $p_i \exp(-\alpha_i x_i^*) = \lambda c_i / \alpha_i$ であるから、

$$\frac{d\beta(y)}{dy} = \frac{g(\mathbf{x}^*)}{dy} = \left(\sum_{\{i \mid x_i^* > 0\}} \frac{c_i}{\alpha_i} + \frac{c_k}{\alpha_k} \right) \frac{d\lambda}{dy} \quad (16)$$

である。 $d\lambda/dy$ を得るため、方程式 (13) の両辺を y で微分すると、

$$- \left(\sum_{\{i \mid x_i^* > 0\}} \frac{c_i}{\alpha_i} + \frac{c_k}{\alpha_k} \right) \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dy} = 1$$

となるから、これを (16) 式に代入すれば

$$d\beta(y)/dy = -\lambda \quad (17)$$

を得る。以上は、査察費用が y であることを前提としていたため、これを明示する意味で、(13) 式で決まる最適ラグランジュ乗数 λ を今後 $\lambda(y)$ と書こう。

(13) 式と同じであるが、念のため、被査察国 $k = 1, 2$ に対する最適ラグランジュ乗数 $\lambda_k(y)$ を決める方程式を記しておく。

$$\sum_{i=1}^{l^k} \frac{c_i^k}{\alpha_i^k} \left[\log \frac{\alpha_i^k p_i^k}{\lambda_k(y) c_i^k} \right]^+ = y. \quad (18)$$

因みに、 $\lambda_k(0)$ は次式で与えられる。

$$\lambda_k(0) = \max_{i=1, \dots, l^k} \alpha_i^k p_i^k / c_i^k. \quad (19)$$

3.2 プレイヤーの最適反応戦略とナッシュ均衡解

まず、各被査察国の最適反応戦略を求めよう。査察者の戦略 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ に対する被査察国 k の最適反応戦略 q_k^* は (11) 式の最適化問題により求められる。関数 $f_k(y_k, q_k)$ は (8) 式で与えられ、 y_k に関し単調減少であ

り、かつ(10)式のような性質をもつことから、 $-d_k^I + (n_k^I + d_k^I)\beta_k(\tilde{y}_k) = 0$ となる解が $\tilde{y}_k \in (0, \infty)$ の区間で唯一存在する。この \tilde{y}_k を用いれば、最適反応戦略は次のように簡単に表される。

$$q_k^* = \begin{cases} 1, & y_k < \tilde{y}_k \text{ のとき} \\ \text{任意の値}, & y_k = \tilde{y}_k \text{ のとき} \\ 0, & y_k > \tilde{y}_k \text{ のとき} \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 \tilde{y}_k は次の方程式の解である。

$$\beta_k(\tilde{y}_k) = d_k^I / (d_k^I + n_k^I). \quad (21)$$

また、最適反応戦略による最大期待利得は以下で与えられる。

$$f_k(y_k, q_k^*) = \max_{0 \leq q_k \leq 1} f_k(y_k, q_k) = \max\{0, -d_k^I + (n_k^I + d_k^I)\beta_k(y_k)\} \quad (22)$$

査察者の最適反応戦略は最大化問題(12)式の最適解により得られるが、補題1から目的関数 $h(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ は $q_1 = q_2 = 0$ である場合を除いて \mathbf{y} に関し狭義凹関数であり、 $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ に対し唯一の最適反応戦略をもつ。このことは、純粋戦略が査察者のナッシュ均衡解を与えることを保証する。また、最適解は予算をすべて使いきるやり方 $y_1 + y_2 = C$ により得られることは明らかだから、最適反応戦略 y_1^* を次の最大化問題により求め、 $y_2^* = C - y_1^*$ とすればよい。

$$\begin{aligned} y_1^* &= \arg \max_{0 \leq y_1 \leq C} h((y_1, C - y_1), (q_1, q_2)) \\ &= \arg \max_{0 \leq y_1 \leq C} [-q_1\{d_1 + (n_1 - d_1)\beta_1(y_1)\} - q_2\{d_2 + (n_2 - d_2)\beta_2(C - y_1)\}]. \end{aligned} \quad (23)$$

さて、予算総額 C が十分多い場合の最適反応戦略に関し次の補題が成り立つ。

補題2 $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 < C$ ならば、ナッシュ均衡解 \mathbf{y}^* 、 \mathbf{q}^* は、 $y_k^* > \tilde{y}_k$ 、 $k = 1, 2$ なる任意の解 $\mathbf{y}^* \in \Pi$ 及び $q_1^* = q_2^* = 0$ である。

(証明) このとき査察者は $y_k^* > \tilde{y}_k$ 、 $k = 1, 2$ なる戦略をとることが可能であるが、(20)式から、これに対する被査察者の最適反応戦略は $q_1^* = q_2^* = 0$ である。このとき $h(\mathbf{y}, \mathbf{q}^*)$ は恒等的にゼロとなり、任意の戦略 \mathbf{y} が査察者にとって最適である。したがって、 \mathbf{y}^* と \mathbf{q}^* は互いに最適反応戦略となっている。 **Q.E.D.**

補題2はナッシュ均衡解の自明なケースであり、以下では $C \leq \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ の場合に限定して議論を進めよう。

補題3 査察者の最適戦略 $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*) \in \Pi$ は、 $y_1^* \leq \tilde{y}_1$ 、 $y_2^* \leq \tilde{y}_2$ を満たす。

(証明) 補題が成り立たず、仮に $y_1^* > \tilde{y}_1$ であるとしよう。 $C \leq \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ の前提から、 $y_2^* < \tilde{y}_2$ のはずである。このとき、 $y_1 = \tilde{y}_1 + \epsilon$ 、 $y_2 = y_2^* + y_1^* - \tilde{y}_1 - \epsilon$ により、新しい解 (y_1, y_2) を作成する。ただし、 ϵ は $0 < \epsilon < y_1^* - \tilde{y}_1$ で、かつ $y_2^* + y_1^* - \tilde{y}_1 - \epsilon < \tilde{y}_2$ となるようにとる。すなわち、 $\max\{0, y_1^* - \tilde{y}_1 + y_2^* - \tilde{y}_2\} < \epsilon < y_1^* - \tilde{y}_1$ なる ϵ をとればよい。このとき、 $y_1^* > \tilde{y}_1$ 、 $y_1 > \tilde{y}_1$ であるから、ともに被査察国 $k = 1$ の最適反応は $q_1 = 0$ である。また、 $y_2^* < y_2 < \tilde{y}_2$ であるから、これらに対する被査察国2の最適反応戦略はともに $q_2 = 1$ である。 $\mathbf{q} = (0, 1)$ に対しては、(9)式より $h(\mathbf{y}^*, \mathbf{q}) < h(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ が成り立つから、 \mathbf{y}^* の最適性に反する。 $y_2^* > \tilde{y}_2$ と仮定しても、同様に矛盾が生じる。 **Q.E.D.**

以上の準備の下、 $C \leq \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ の場合のナッシュ均衡解は次の手順により求めることができる。ただし、単位ベクトルを $\mathbf{e} = (1, 1)$ で表す。

定理1 まず、 $\max\{0, C - \tilde{y}_2\} \leq y_1 \leq \min\{C, \tilde{y}_1\}$ の範囲で $y_1^* = \arg \max_{y_1} h((y_1, C - y_1), \mathbf{e})$ を求め、 $y_2^* = C - y_1^*$ とすれば、この \mathbf{y}^* が査察者の最適戦略である。また、被査察国の最適戦略 \mathbf{q}^* は以下で与えられる。

- (i) もし $y_1^* < \tilde{y}_1$ 、 $y_2^* < \tilde{y}_2$ 、あるいは $y_1^* = \tilde{y}_1$ 、 $y_2^* = \tilde{y}_2$ ならば、 $q_1^* = q_2^* = 1$ 。
(ii) そうでなく $y_1^* = \tilde{y}_1$ ならば、

$$q_1^* = (n_2 - d_2)\lambda_2(y_2^*) / (n_1 - d_1)\lambda_1(y_1^*), \quad q_2^* = 1, \quad (24)$$

(iii) そうでなければ $y_2^* = \tilde{y}_2$ のはずであり, このとき

$$q_1^* = 1, \quad q_2^* = (n_1 - d_1)\lambda_1(y_1^*) / (n_2 - d_2)\lambda_2(y_2^*). \tag{25}$$

(証明) まず以下のことを確認しておく. $h((y_1, C - y_1), e)$ を y_1 について微分すると, $h'((y_1, 1 - y_1), e) = -(n_1 - d_1)\beta_1'(y_1) + (n_2 - d_2)\beta_2'(C - y_1)$ となり, 補題 1 から, この式は y_1 の単調減少関数である. 故に, もし右端点 $y_1^* = \min\{C, \tilde{y}_1\}$ で $h((y_1, C - y_1), e)$ が最大となるのであれば,

$$(n_1 - d_1)\beta_1'(y_1^*) \leq (n_2 - d_2)\beta_2'(C - y_1^*) \tag{26}$$

のはずであるし, 左端点 $y_1^* = \max\{0, C - \tilde{y}_2\}$ が最大点ならば

$$(n_1 - d_1)\beta_1'(y_1^*) \geq (n_2 - d_2)\beta_2'(C - y_1^*) \tag{27}$$

である.

(i) (20) 式から, $y_1^* < \tilde{y}_1, y_2^* < \tilde{y}_2$ の (y_1^*, y_2^*) に対する最適反応戦略は $q_1^* = q_2^* = 1$ であり, y_1^*, y_2^* はこの q^* に対し問題 (23) 式で求めた査察者の最適反応戦略である. また, $y_1^* = \tilde{y}_1, y_2^* = \tilde{y}_2$ ならば任意の q_1, q_2 が最適であるから, その中の $q_1 = q_2 = 1$ を採用すれば, 同じく y_1^*, y_2^* は査察者の最適反応戦略となっている.

(ii) この場合, 端点 $y_1^* = \tilde{y}_1$ が $h((y_1, C - y_1), e)$ の最大点であるから, 不等式 (26) が成り立つ. ここで (17) 式を考慮すれば, (24) 式により計算された q_1^* は $0 \leq q_1^* \leq 1$ である. このとき, $-q_1^*(n_1 - d_1)\beta_1'(y_1^*) + (n_2 - d_2)\beta_2'(C - y_1^*) = 0$ であるが, これは y_1^* が $h((y_1, C - y_1), (q_1^*, 1))$ の最大点であることを意味する. したがって, $y_1^* = \tilde{y}_1, y_2^* < \tilde{y}_2$ なる (y_1^*, y_2^*) と $(q_1^*, q_2^* = 1)$ とはお互いが最適反応戦略となっている.

(iii) (ii) の場合と同じく, (25) 式により与えられる q_2^* は $0 \leq q_2^* \leq 1$ となり, $-(n_1 - d_1)\beta_1'(y_1^*) + q_2^*(n_2 - d_2)\beta_2'(C - y_1^*) = 0$ を満たすから, $y_1^* = C - y_2^* < \tilde{y}_1, y_2^* = \tilde{y}_2$ なる (y_1^*, y_2^*) と $(q_1^* = 1, q_2^*)$ は互いに最適反応戦略となっている. **Q.E.D.**

定理にある区間 $y_l \equiv \max\{0, C - \tilde{y}_2\} \leq y_l \leq y_u \equiv \min\{C, \tilde{y}_1\}$ における最適化問題 $y_1^* = \arg \max_{y_1} h((y_1, C - y_1), e)$ は, 目的関数の導関数が y_1 の単調減少関数となることから, 容易にその解法を述べることができる. ただし, 乗数 $\lambda_k(y)$ は方程式 (18) を解いて求める.

定理 1 の y_1^* の導出アルゴリズム

- (i) もし $(n_1 - d_1)\lambda_1(y_l) - (n_2 - d_2)\lambda_2(C - y_l) \leq 0$ ならば, $y_1^* = y_l$ である.
- (ii) もし $(n_1 - d_1)\lambda_1(y_u) - (n_2 - d_2)\lambda_2(C - y_u) \geq 0$ ならば, $y_1^* = y_u$ である.
- (iii) そうでなければ, $(n_1 - d_1)\lambda_1(\hat{y}) - (n_2 - d_2)\lambda_2(C - \hat{y}) = 0$ となる解 $\hat{y} \in [y_l, y_u]$ を黄金分割法等の数値解法により求めれば, $y_1^* = \hat{y}$ である.

以上により, ナッシュ均衡解の導出手順は明らかになった. 全体の解法アルゴリズムは以下のとおりである.

ナッシュ均衡解の導出アルゴリズム

(S1) 次により方程式 (21) を解き, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 を導出する. まず (15) 式を使って,

$$\sum_{\{i|\lambda_k \geq \alpha_i^k p_i^k / c_i^k\}} p_i^k + \lambda_k \sum_{\{i|\lambda_k < \alpha_i^k p_i^k / c_i^k\}} c_i^k / \alpha_i^k = \frac{d_k^I}{d_k^I + n_k^I}$$

の解 $\tilde{\lambda}_k \in (0, \lambda_k(0))$ を求める. 左辺は λ_k の単調増加関数であるから, この求解は容易である. この $\tilde{\lambda}_k$ を (18) 式に代入した次式により \tilde{y}_k を求める.

$$\tilde{y}_k = \sum_{\{i|\tilde{\lambda}_k < \alpha_i^k p_i^k / c_i^k\}} \frac{c_i^k}{\alpha_i^k} \log \frac{\alpha_i^k p_i^k}{\tilde{\lambda}_k c_i^k}.$$

(S2) もし $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 < C$ ならば, 補題 2 により, ナッシュ均衡解 y^*, q^* を求める. この場合 $q^* = 0$ であるから, 被査察国の施設への最適査察官割当はあまり意味がない.

(S3) $C \leq \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ ならば、上述した y_1^* の導出アルゴリズムを用いて $y_1^*, y_2^* = C - y_1^*$ を求め、計算過程で計算された $\lambda_1(y_1^*), \lambda_2(y_2^*)$ 等を定理 1 において利用し、ナッシュ均衡解 y^*, q^* を求める。

被査察国 $k = 1, 2$ の施設 i への最適査察官派遣人数は、(14) 式から以下により求める。

$$x_i^{k*} = \frac{1}{\alpha_i^k} \left[\log \frac{\alpha_i^k p_i^k}{\lambda_k(y_k^*) c_i^k} \right]^+, \quad i = 1, \dots, l_k.$$

4 数値例

2つの被査察国のある査察ゲームを考える。被査察国 $k = 1$ は4つの施設 ($l^1 = 4$) を、被査察国 2 は3つの施設 ($l^2 = 3$) をもち、それぞれで取り扱われると見られる禁制品に関して、その存在確率 p_i^k と査察資源の効率性 α_i^k が表 2 のように見積もられている。また、各施設への査察官派遣単価はすべて $c_i^k = 1, i = 1, \dots, l^k, k = 1, 2$ であるとする。

表 2. パラメータ設定

$k \setminus$	n_k	d_k	n_k^I	d_k^I	l^k	p_1^k	p_2^k	p_3^k	p_4^k	α_1^k	α_2^k	α_3^k	α_4^k
1	3	2	3	5	4	0.3	0.2	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.5
2	5	3	4	3	3	0.5	0.3	0.2		0.3	0.4	0.4	

このとき、査察者の戦略 (y_1, y_2) 、被査察国の戦略 (q_1, q_2) に対して式 (8), (9) で与えられる各プレイヤーの期待利得関数は次のようになる。

$$f_1(y_1, q_1) = q_1 \{-5 + 8\beta_1(y_1)\}, \quad f_2(y_2, q_2) = q_2 \{-3 + 7\beta_2(y_2)\}, \tag{28}$$

$$h(y, q) = -q_1 \{2 + \beta_1(y_1)\} - q_2 \{3 + 2\beta_2(y_2)\}. \tag{29}$$

図 1 は予算 C を 2 から 11 の間で変化させ、被査察国への予算の最適分割 y_k^* の動きを描いたものであり、図 2 は被査察国の最適戦略 q_k^* を示したものである。図 1 でみるとおり、区間 $[0, 3.1], [3.1, 8.7], [8.7, 10.3]$ 及びそれ以後の区間で変化の様子が異なっている。被査察国 k に非合法戦略を断念させる資源量閾値は $f_k(y_k, 1) = 0$ の解で与えられ、このケースでは $\tilde{y}_1 = 3.5, \tilde{y}_2 = 6.8$ となるため、予算 C が $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 10.3$ を越える区間ではすべての非合法活動は抑止され、全プレイヤーの利得はゼロとなる。以後、非合法活動が存在する $C \leq 10.3$ の区間での変化について、詳しく説明を加えてゆこう。

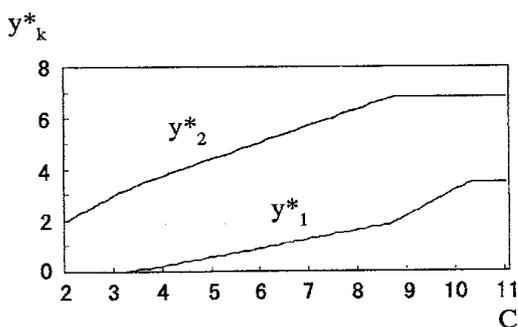


図 1. 査察予算の最適配分

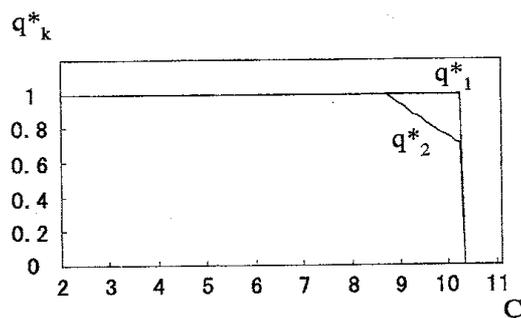


図 2. 被査察国の最適戦略

(1) $0 \leq C \leq 3.1$ における変化：

査察予算 C が小さな場合、 $\beta_k(0) = 1, k = 1, 2$, であることに注意すれば $f_k(y_k, 1) > 0$ となり、被査察国にとって完全な非合法戦略 $q_1^* = q_2^* = 1$ が最適となる。査察者の期待利得関数の導関数 $h'((y_1, C - y_1), e) = -\beta_1'(y_1) + 2\beta_2'(C - y_1)$ は y_1 の単調減少関数であり、(17) 及び (19) 式から $\beta_1'(0) = -0.16, \beta_2'(0) = -0.15$ であるから、 $C \approx 0$ 付近では $\beta_1'(0) > 2\beta_2'(0)$ となっている。したがって $h'((y_1, C - y_1), e) < 0$ であり、 $y_1^* = 0$ が査察者の最適戦略となる。この $y_1^* = 0, y_2^* = C$ の最適性は、 $C = 3.1$ で $\beta_1'(0) = 2\beta_2'(C)$ となるまで続く。

(2) $3.1 \leq C \leq 8.7$ における変化：

それ以降の予算の増加に対しては、 $h'((y_1^*, C - y_1^*), e) = 0$ となるように $\beta_1'(y_1^*) = 2\beta_2'(C - y_1^*)$ の関係を保ちながら、 $y_1^*, y_2^* = C - y_1^*$ は C とともに増加してゆく。しかし、 y_2^* が閾値 $\tilde{y}_2 = 6.8$ に達すると、被査察国 2 はそれまでの完全非合法戦略 $q_2^* = 1$ の放棄を余儀なくされる。

(3) $8.7 \leq C \leq 10.3$ における変化：

査察者は、被査察国 2 への分配予算 y_2 を少しでも \tilde{y}_2 より大きくすれば、完全合法戦略 $q_2^* = 0$ に変えさせることができるから、これ以降の全体予算 C の増加分はもっぱら被査察国 1 への分配予算 y_1^* の増加に充当することになる。すなわち、この予算区間においては y_1^* だけが増加し、 y_2^* は \tilde{y}_2 の値を保つことになる。この間、依然として y_1^* は査察者の期待利得 $h((y_1, C - y_1), (1, q_2^*))$ の最大点となるよう $h'((y_1^*, C - y_1^*), (1, q_2^*)) = -\beta_1'(y_1^*) + 2q_2^*\beta_2'(C - y_1^*) = 0$ を満たすがゆえに q_2^* は減少するが、その様子は図 2 でみることができる。この y_1^* の増加が閾値 $\tilde{y}_1 = 3.5$ に達したところで状況は変わり、これ以上の査察予算 $C \geq 10.3$ に対しては、被査察国は完全合法戦略 $q_1^* = q_2^* = 0$ をとることとなり、すべてのプレイヤーの期待利得はゼロとなる。

5 おわりに

この論文では、IAEA（国際原子力機関）に代表される査察活動の効果的計画の立案に資するため、ひとりの査察者と 2 つの被査察国の思惑により結果が左右される査察ゲームを取り上げ、ナッシュ均衡解を導出するための解法を提案した。その際、被査察国内にある査察対象施設への査察資源の最適割当をも考慮することにより、査察官のような具体的な査察資源の効果的な使用を明確に示すことのできる査察計画を取り上げた。これまで IAEA は、査察の頻度や査察人数の割当を決定する際に、核関連施設の数といった“比例の原則”を永らく基準として採用してきた。しかし期待支払に関する 2 節での議論から、査察者の期待支払に重大な影響を及ぼすのは、第 1 に被査察国の非合法活動が国際社会、すなわち国際的組織としての IAEA に与える負のダメージであり、第 2 にその被査察国が非合法活動を行おうとする意図の大きさ、すなわち非合法活動を選択しようとする確率であることが明確となった。したがって IAEA で決定される査察予算に関しては、たとえ核関連施設数が少ない被査察国に対しても、上記の要素による影響を考慮した効果的な使用方法を検討することが重要である。

参考文献

- [1] R. Avenhaus and D. Kilgour, Efficient distributions of arm-control inspection effort, *Naval Research Logistics*, **51**(2004), 1-27.
- [2] V. Baston and F. Bostock, A generalized inspection game, *Naval Research Logistics*, **38**(1991), 171-182.
- [3] M. Drescher, A sampling inspection problem in arms control agreements: A game-theoretic analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1962.
- [4] T. Ferguson and C. Melolidakis, On the inspection game, *Naval Research Logistics*, **45**(1998), 327-334.
- [5] A. Garnaev, A remark on the customs and smuggler game, *Naval Research Logistics*, **41**(1994), 287-293.
- [6] M. Maschler, A price leadership method for solving the inspection's non-constant-sum game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **13**(1966), 11-33.
- [7] M. Sakaguchi, A sequential game of multi-opportunity infiltration, *Mathematica Japonica*, **39**(1994), 157-166.
- [8] M. Thomas and Y. Nisgav, An infiltration game with time dependent payoff, *Naval Research Logistics Quarterly*, **23**(1976), 297-302.