

多目的確率計画問題に対する二次確率優越に基づく パレート最適解と対話型ファジィ満足化

加藤 浩介[†], 坂和 正敏[†], 片桐 英樹[†], 宇野 剛史[†], 小川 篤[‡]

Kosuke Kato, Masatoshi Sakawa, Hideki Katagiri, Takeshi Uno, Atsushi Ogawa

[†] 広島大学大学院工学研究科, [‡] シャープ株式会社

Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Sharp Corporation

1. はじめに

多目的確率計画問題に対して, 坂和ら [7, 4, 5] により, 期待値最適化, 分散最小化及び確率最大化といった機会制約条件計画モデルに基づく満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法が提案されている. しかし, これらのモデルに基づいて得られる解と, 不確実な意思決定状況の下で意思決定者が目的関数に対する満足度を表す効用関数の期待値を最大化しようとするという「期待効用最大化原則」に基づいて得られる解の整合性は保証されていない. 一方, 確率変数の分布関数を積分した二次分布関数の大小関係により確率変数を順序付けする二次確率優越 (SSD) という概念があり, 目的関数に対する意思決定者の効用関数がリスク回避的である場合には, 二次確率優越は期待効用最大化原則と整合的である [8] という性質がある. そこで, 本研究では, 多目的確率計画問題に対して, 二次確率優越の概念に基づく非劣解 (SSD パレート最適解) を定義し, 対話型ファジィ満足化手法の適用について考察する.

2. 多目的確率計画問題

目的関数の係数が確率変数である多目的計画問題は次のように定式化される.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & z_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1(\omega)) \\ & \vdots \\ \text{maximize} & z_k(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k(\omega)) \\ \text{subject to} & g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} \in R^n \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで, \mathbf{x} は n 次元決定変数列ベクトル, $\mathbf{c}_l(\omega)$, $l = 1, 2, \dots, k$ は確率変数ベクトル, $g_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, m$ は制約関数である. また, 問題 (1) の制約領域を $X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \mathbf{x} \in R^n\}$ で表す.

問題 (1) の目的関数には確率変数が含まれているため, 通常の数理計画法における解の

概念や解法をそのまま適用することはできない。そこで、坂和ら [7, 4, 5] は、多目的確率計画問題に対して、制約条件は常に満たされる必要はなく、ある確率以上で満たされればよいとする機会制約条件 [1] の下での、期待値最適化、分散最小化及び確率最大化などの確率計画モデルに基づく満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法を提案している。

ここで、金融工学及びファイナンス理論の中で、不確実な状況下では、意思決定者は目的関数の値によって得られる満足度を表す効用関数 $U(\cdot)$ の期待値を最大化するべく行動するという「期待効用最大化原則」が支持されており、現代ポートフォリオ理論はこの原則をもとに組み立てられている。期待効用最大化原則に基づけば、問題 (1) は次のような多目的期待効用最大化問題に帰着される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize } E[U_1(z_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1(\omega)))] \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \text{maximize } E[U_k(z_k(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k(\omega)))] \\ \text{subject to } \mathbf{x} \in X \end{array} \right\} \quad (2)$$

しかし、残念ながら、坂和ら [7, 4, 5] によって提案された手法によって得られる解の期待効用最大化原則との整合性は保証されていない。

もし効用関数 $U(\cdot)$ が特定できるならば、効用関数の期待値を直接最大化すれば期待効用最大化原則と整合的な解が得られるが、現実には不確実性下での意思決定者の効用関数を特定することは困難であることが知られている。ところで、確率変数の二次分布関数値の大小により確率変数自体に順序づけを行う二次確率優越 (SSD) という概念を利用することで、意思決定者が危険回避的であるとき、すなわち、その効用関数 $U(\cdot)$ が $U'(\cdot) > 0$, $U''(\cdot) < 0$ を満たすとき、期待効用を最大化する解は二次確率優越の意味で効率的である [8] という性質がある。また、二次効率的な確率変数はある特定の危険回避的な効用関数の期待効用を最大にする [3] という性質がある。そこで、本研究では、二次確率優越の概念に基づいて、期待効用最大化原則と整合的な満足解の導出について考察する。

3. 確率優越

現実の不確実性下での意思決定において、意思決定者の効用関数の具体的な関数形を特定することは一般に容易ではないと考えられる。しかし、効用関数を特定できない状況においても、効用関数の基本的な性質を利用して、目的関数値が確率変数として表現される代替案に対して、どのような選好の順序付けが行われるかを分析することは重要である。このように、効用関数について多くの情報が得られない場合に、与えられた代替案が効率的かどうかを判断する方法として、分布関数の形状に基づいて決められる確率変数の順序である確率順序が利用される。

いま、 z を確率測度 P_z を持つ確率変数とし、 z の確率密度関数を $f_z(\cdot)$ とすると、 z の (一次) 分布関数 $F_z(\cdot)$ は次のように定義される。

$$F_z(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} f_z(\xi) d\xi$$

このとき、一次確率優越は次のように定義される。

定義 1 (一次確率優越 (FSD: First-order Stochastic Dominance)) z_1 と z_2 を確率変数とすると、任意の $h \in R$ に対して $F_{z_1}(h) \leq F_{z_2}(h)$ が成り立つならば、 z_1 は z_2 に対して弱一次確率優越するといひ、 $z_1 \succeq_{FSD} z_2$ と表す。また、任意の $h \in R$ に対して $F_{z_1}(h) \leq F_{z_2}(h)$ 、かつ、ある h^* に対して $F_{z_1}(h^*) < F_{z_2}(h^*)$ が成り立つとき、 z_1 は z_2 に対して一次確率優越するといひ、 $z_1 \succ_{FSD} z_2$ と表す。

この関係を図で表せば、図 1 の (a) は z_1 が z_2 に対して一次確率優越している場合であり、(b) は z_1, z_2 がともに他方に対して一次確率優越していない場合である。

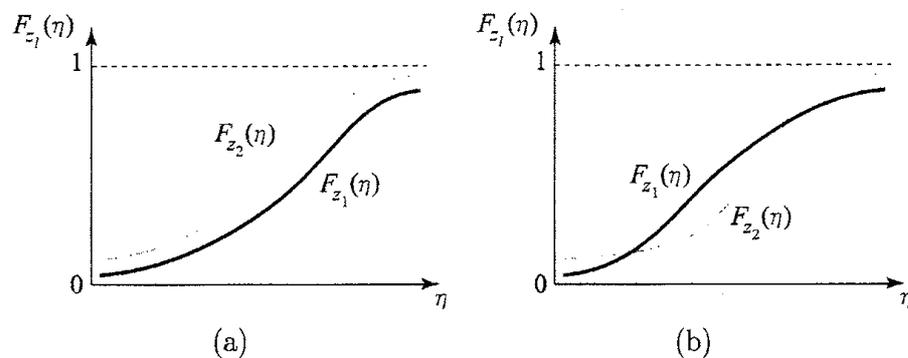


図 1: 一次確率優越の例

一次確率優越に基づいて一次効率的性が次のように定義される。

定義 2 (一次効率的性) 確率変数 z の集合を Ω とするとき、ある $z^* \in \Omega$ に対して、 $z \succ_{FSD} z^*$ となるような $z \in \Omega$ が存在しないとき、 z^* は一次効率的であるという。

このような一次確率優越の概念は感覚的に分かりやすいが、一次効率的となる z^* が多すぎる、一次効率的な z^* が危険回避的な効用関数をもつ意思決定者にとって合理的とは限らない、というような理由から実用的ではないとされている。

さて、確率変数 z の (一次) 分布関数を $F_z(\cdot)$ とするとき、二次分布関数 $F_z^{(2)}(\cdot)$ は次式で定義される。

$$F_z^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_z(\xi) d\xi$$

このとき、二次確率優越は次のように定義される。

定義 3 (二次確率優越 (SSD: Second-order Stochastic Dominance)) z_1 と z_2 を確率変数とすると、任意の $h \in R$ に対して $F_{z_1}^{(2)}(h) \leq F_{z_2}^{(2)}(h)$ が成り立つならば、 z_1 は z_2 に対して弱二次確率優越するといひ、 $z_1 \succeq_{SSD} z_2$ と表す。また、任意の $h \in R$ に対して $F_{z_1}^{(2)}(h) \leq F_{z_2}^{(2)}(h)$ 、かつ、ある h^* に対して $F_{z_1}^{(2)}(h^*) < F_{z_2}^{(2)}(h^*)$ が成り立つとき、 z_1 は z_2 に対して二次確率優越するといひ、 $z_1 \succ_{SSD} z_2$ と表す (図 2)。

上のよう定義される二次分布関数 $F_z^{(2)}(\cdot)$ は、一定のしきい値以下である目的関数値

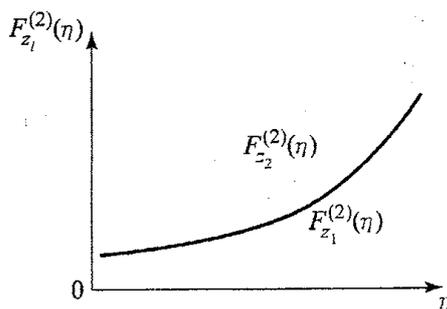


図 2: 二次確率優越の例

のモーメントを表す下方部分モーメントというリスク指標と等しくなる [8]. よって, 二次確率優越している確率変数は, 二次確率優越されている確率変数よりもリスクが小さいということになる.

また, 二次確率優越に基づいて二次効率性が次のように定義される.

定義 4 (二次効率性) 確率変数 z の集合を Ω とするとき, ある $z^* \in \Omega$ に対して, $z \succ_{SSD} z^*$ となるような $z \in \Omega$ が存在しないとき, z^* は二次効率的であるという.

さらに, 二次確率優越に関しては以下のような命題が示されている.

命題 1 意思決定者の効用関数 $U(\cdot)$ が $U'(\cdot) > 0$, $U''(\cdot) < 0$ を満たすならば,

$$z_1 \succ_{SSD} z_2 \Leftrightarrow E[U(z_1)] \geq E[U(z_2)].$$

すなわち, 意思決定者が危険回避的な場合に, 二次確率優越は期待効用最大化原則と整合的である [8] ことを意味している.

4. 二次確率優越 (SSD) パレート最適解

多目的計画問題に対しては, 一般に, すべての目的関数を同時に最適にするような解は存在せず, ある目的関数の値を改善するには少なくとも他の 1 つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解が合理的な解とされており, パレート最適解と呼ばれる.

定義 5 (パレート最適解) $x^* \in X$ に対して, $z_l(x) \geq z_l(x^*)$, $l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $z_j(x) > z_j(x^*)$ となるような $x \in X$ が存在しないならば, x^* をパレート最適解という.

本研究では, 多目的確率計画問題 (1) に対して, 二次確率優越の概念に基づいてパレート最適解を拡張した二次確率優越 (SSD) パレート最適解を定義する.

定義 6 (二次確率優越 (SSD) パレート最適解) $x^* \in X$ に対して, $z_l(x, c_l(\omega)) \succeq_{SSD} z_l(x^*, c_l(\omega))$, $l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $z_j(x, c_j(\omega)) \succ_{SSD} z_j(x^*, c_j(\omega))$ となるような $x \in X$ が存在しないならば, x^* を SSD パレート最適解という.

定理 2 意思決定者の各目的関数に対する効用関数が危険回避的 ($U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$) である場合, \mathbf{x} が多目的期待効用最大化問題 (2) のパレート最適解であるための必要十分条件は, \mathbf{x} が多目的確率計画問題 (1) に対する SSD パレート最適解であることである.

証明 多目的確率計画問題 (1) の SSD パレート最適解 \mathbf{x}^* が, 多目的期待効用最大化問題 (2) のパレート最適解ではないと仮定すると, $E[U_l(z_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l(\omega)))] \geq E[U_l(z_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_l(\omega)))]$, $l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $E[U_j(z_j(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j(\omega)))] > E[U_j(z_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_j(\omega)))]$ となる \mathbf{x} が存在する. よって効用関数が危険回避的 ($U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$) であることから, 命題 1 より, $z_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l(\omega)) \succeq_{SSD} z_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_l(\omega))$, $l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $z_j(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j(\omega)) \succ_{SSD} z_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_j(\omega))$ となる \mathbf{x} が存在する. これは \mathbf{x}^* が SSD パレート最適解であることに矛盾する. 逆についても, 命題 1 より同様に証明できる.

定理 2 により, 効用関数が危険回避的である場合, SSD パレート最適解が求まれば, それは多目的期待効用最大化問題のパレート最適解となることがわかる.

5. 対話型ファジィ満足化手法

多目的期待値-リスク問題 (6) の各目的関数に対して, 「目的関数をだいたいある値以上にしたい」というような意思決定者の判断のあいまい性を考慮するためのファジィ目標を導入すると, 問題 (6) は次のように書き換えられる.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & \mu_1(\zeta_1(\mathbf{x})) \\ & \vdots \\ \text{maximize} & \mu_k(\zeta_k(\mathbf{x})) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in X \end{array} \right\} \quad (7)$$

ここで, $\mu_l(\cdot)$ は l 番目の目的関数に対するファジィ目標を規定するメンバシップ関数であり, 単調増加であるものとする. 問題 (7) はファジィ多目的意思決定問題であり, k 個のメンバシップ関数に対して, それらを集約する統合関数 $\mu_D(\cdot)$ を導入すれば, 問題 (7) は

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & \mu_D(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}))) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in X \end{array} \right\} \quad (8)$$

と書き換えられる. このような統合関数 $\mu_D(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})))$ は k 個のファジィ目標全体に対する意思決定者の満足度あるいは選好を表していると考えられる. Hulsurkar ら [2] は, 統合関数として, ファジィ決定における最小オペレータや積オペレータを採用している. しかしながら, 最小オペレータや積オペレータはそれぞれ統合関数の一つの特別な場合であり, 一般の状況においては, k 個のメンバシップ関数の統合法としては必ずしも満足できるものであるとはいえない. 通常, 意思決定者の複雑な選好を十分に反映した統合関数を大域的に陽に同定することは困難であると考えられるため, 本論文では, 意思決定者の陰に存在する統合関数を大域的に陽に同定することなく, 意思決定者との対話により, 局所的な選好情報を引き出し, 最終的に意思決定者の満足解を求めるという対話型手法を導入

する. 具体的には, 問題 (7) において, 意思決定者は各ファジィ目標に対する自己の志望水準を反映する基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_l, l = 1, \dots, k$ を, 対応する拡張ミニマックス問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \max_{l=1, \dots, k} \left\{ \bar{\mu}_l - \mu_l(\zeta_l(\mathbf{x})) + \rho \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_i - \mu_i(\zeta_i(\mathbf{x}))) \right\} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (9)$$

を解いて得られた結果を考慮して対話的に更新しながら, 満足解を導出するという対話型ファジィ満足化手法の適用を試みる. ここで, ρ は十分に小さい正数である.

問題 (9) の最適解は, 基準メンバシップ値に (拡張) ミニマックスの意味で近い SSD パレート最適解となることが下記の定理により示される.

定理 3 $\mathbf{x}^* \in X$ が拡張ミニマックス問題 (9) の最適解であれば, \mathbf{x}^* は多目的確率計画問題 (1) の SSD パレート最適解である.

証明 拡張ミニマックス問題 (9) の最適解 \mathbf{x}^* が多目的確率計画問題 (1) の SSD パレート最適解でないとする. $z_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l(\omega)) \succeq_{SSD} z_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_l(\omega)), l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $z_j(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j(\omega)) \succ_{SSD} z_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}_j(\omega))$ となる \mathbf{x} が存在する. よって, 命題 2 より, $\zeta_l(\mathbf{x}) = M_{z_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l(\omega))} - \lambda_l \Gamma_{z_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l(\omega))}$ とおくと, $\zeta_l(\mathbf{x}) \geq \zeta_l(\mathbf{x}^*), l = 1, 2, \dots, k$, かつ, ある $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $\zeta_j(\mathbf{x}) > \zeta_j(\mathbf{x}^*)$ となる \mathbf{x} が存在する. メンバシップ関数 $\mu_l(\cdot)$ は単調増加という仮定より, ある j について, $\mu_j(\zeta_j(\mathbf{x})) > \mu_j(\zeta_j(\mathbf{x}^*))$ かつ $\mu_l(\zeta_l(\mathbf{x})) \geq \mu_l(\zeta_l(\mathbf{x}^*)), l = 1, 2, \dots, k$ となる \mathbf{x} が存在する. よって, すべての $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して

$$\bar{\mu}_l - \mu_l(\zeta_l(\mathbf{x})) + \rho \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_i - \mu_i(\zeta_i(\mathbf{x}))) < \bar{\mu}_l - \mu_l(\zeta_l(\mathbf{x}^*)) + \rho \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_i - \mu_i(\zeta_i(\mathbf{x}^*)))$$

が成り立つので, \mathbf{x}^* が拡張ミニマックス問題 (9) の最適解であることに矛盾する.

以下に, 基準メンバシップ値を対話的に更新することにより, 期待効用最大化原則と整合的な SSD パレート最適性が保証された意思決定者の満足解を導出するという対話型ファジィ満足化手法の手順をまとめる.

- 手順 1:** 問題 (6) の各目的関数 $\zeta_l(\mathbf{x}), l = 1, 2, \dots, k$ の最大化問題を解いて, 個別の最大値 $\zeta_{l, \max}, l = 1, 2, \dots, k$ を求める.
- 手順 2:** 手順 1 で得られた各目的関数ごとの最大値と最大値を与える解に基づいて各目的関数に対するファジィ目標を規定するメンバシップ関数 $\mu_l(\cdot), l = 1, 2, \dots, k$ を決定する.
- 手順 3:** 意思決定者が初期の基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_l, l = 1, 2, \dots, k$ を設定する (設定が困難な場合には $\bar{\mu}_l = 1, l = 1, 2, \dots, k$ とする).
- 手順 4:** 現在の基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_l, l = 1, 2, \dots, k$ に対応するミニマックス問題 (9) を解く.
- 手順 5:** 手順 4 で得られた解と目的関数値およびメンバシップ関数値を意思決定者に提示し, 意思決定者が満足ならば満足解を得て終了する. そうでなければ, 意思決定

者は現在の解と目的関数値およびメンバシップ関数値を参考にして、主観的に基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_l, l = 1, 2, \dots, k$ を更新して、手順 4 に戻る。

6. おわりに

本稿では、多目的確率計画問題に対して、期待効用最大化原則と整合的な満足解を導出するために、二次確率優越に基づく SSD パレート最適解を定義するとともに、多目的期待値-リスク問題に対する対話型ファジィ満足化手法の適用により、期待効用最大化原則と整合的な SSD パレート最適性が保証された満足解を求める方法を提案した。

参考文献

- [1] A. Charnes and W.W. Cooper, Chance constrained programming, *Management Science*, Vol. 6, No. 1, pp. 73–79, 1959.
- [2] S. Hulsurkar, M.P. Biswal and S.B. Sinha, Fuzzy programming approach to multi-objective stochastic linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 88, No. 2, pp. 173–181, 1997.
- [3] 池田昌幸, 金融経済学の基礎, 朝倉書店, 2002.
- [4] 加藤浩介, 坂和正敏, 片桐英樹, 植田公一, 多目的確率線形計画問題に対する分散最小化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法, *日本ファジィ学会誌*, Vol. 14, No. 4, pp. 404–411, 2002.
- [5] 加藤浩介, 坂和正敏, 片桐英樹, 植田公一, 確率変数係数を含む多目的線形計画問題に対する確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J85-A, No. 9, pp. 967–975, 2002.
- [6] W. Ogryczak and A. Ruszczyński, Dual stochastic dominance and related mean-risk models, *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 13, No. 1, pp. 60–78, 2002.
- [7] 坂和正敏, 加藤浩介, 西崎一郎, 吉岡正人, 確率変数係数を含む多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J83-A, No. 2, pp. 161–167, 2000.
- [8] 山井康浩, 吉羽要直, リスク指標の性質に関する理論的整理, *金融研究所*, Vol. 20, pp. 95–132, 2001.