数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 111-115

L^{∞} の近くの補外定理と可換 BANACH 環

岡山大学教育学部　曽布川拓也

1. 補外定理と可換 BANACH 環との関係

1.1. Zygmund の補外定理について.

(Ω,μ) を有限測度空間とする. 都合に応じて $\mu(\Omega)=1$ に限定する. 関数空間

(1)
$$L^{p}(\Omega,\mu)=\{f \text{ は } \Omega \text{ 上の可測関数} : \|f\|_{p}=\left[\int_{\Omega}|f(x)|^{p}d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}<\infty\}$$
$$L^{\infty}(\Omega,\mu)=\{f \text{ は } \Omega \text{ 上の可測関数} : \|f\|_{\infty}=\mathrm{ess.\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|<\infty\}$$

について, 主観的に次の見解を持っている.

(1) $0<p<1$ の場合は, 色々な意味で扱いにくい.
(2) $p=2$ の場合は扱いやすいことが多い.
(3) $1<p<\infty$ の場合は比較的扱いやすいことが多い.
(4) $p=1, p=\infty$ の場合はミステリアスである.

特に狭く実解析の分野で考えれば,

$1<p<\infty$ に対して L^p 有界であるが, L^1 有界, L^{∞} 有界でない作用素がたくさんある

ことが問題である. たとえば Hilbert 変換

(2)
$$Hf(x)=p.v.\int_{0}^{2\pi}\frac{f(t)}{t-x}dt$$

に代表される, Calderón-Zygmund 型の特異積分作用素はこの性質を持つ.

このとき, $1<p<\infty$ の場合にわかっていることを用いて何らかの意味で $p\to 1$ および $p\to\infty$ の “極限” を考えようするのが「補外定理」と呼ばれるものである.

Theorem 1 (矢野茂樹, 1951). $\alpha\geq 0$ とする. 半線形作用素 T に対して

(3)
$$\|Tf\|_{L^{p}}\leq\frac{A}{(p-1)^{\alpha}}\|f\|_{L^{p}}\quad f\in L^{p},\quad 1<p<2$$

であるならば,

(4)
$$\int_{\Omega}|Tf(x)|d\mu(x)\leq C_{1}\int_{\Omega}|f(x)|(1+\log^{+}|f(x)|)^{\alpha}d\mu(x)+C_{2}\mu(\Omega)\quad f\in L\log^{\alpha}L$$

が成り立つ.

この定理の双対にあたる次のことも知られている.

岡山大学教育学部　曽布川拓也

Theorem 2 (Zygmund, 1959). $\alpha > 0$ とする. 半線形作用素 T に対して

$$\|Tf\|_{L^p} \leq Ap^{\alpha}\|f\|_{L^p} \quad f \in L^p, \quad p < p < \infty \tag{5}$$

であるならば

$$\|Tf\|_{\exp L^{1/\alpha}} \leq C\|f\|_{L^\infty} \tag{6}$$

が成り立つ. ここで $\rho > 0$ に対して

$$\exp L^\rho = \{f \text{ は}\Omega\text{ 上の可測関数} : \int_\Omega \exp(|\lambda f|^\rho)d\mu \leq 1 \ for\ some\ \lambda > 0\} \tag{7}$$

であり, ここに表れる λ の逆数の下限で定義されるノルム $\|\cdot\|_{\exp L^{1/\alpha}}$ によって *Banach* 空間となる.

Proof. ([5] XII 4.41 の証明の概略) 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq 1 \quad \text{ならば} \quad \int_\Omega \exp(\lambda|Tf|^{1/\alpha})d\mu \leq C \tag{8}$$

が成り立つことを証明する.

k を自然数とする. (5) から

$$\int_\Omega |Tf(x)|^{\frac{k}{\alpha}}d\mu \leq A^{\frac{k}{\alpha}}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^k \int_\Omega |f(x)|^{\frac{k}{\alpha}}d\mu(x) \leq A^{\frac{k}{\alpha}}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^k \mu(\Omega)\|f\|_{L^\infty}^{\frac{k}{\alpha}} \tag{9}$$

両辺に $\dfrac{\lambda_0^k}{k!}$ をかけると

$$\int_\Omega \frac{\left(\lambda_0|Tf(x)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^k}{k!}d\mu(x) \leq A^{\frac{k}{\alpha}}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^k \frac{\lambda_0^k}{k!}\int_\Omega |f(x)|^{\frac{k}{\alpha}}d\mu(x) \leq \left(A^{\frac{1}{\alpha}}e\frac{\lambda_0}{\alpha}\right)^k \|f\|_\infty^{\frac{k}{\alpha}}$$

となる. $0 < \beta < 1$, $\lambda_0 = \beta\left(\dfrac{\alpha}{eA^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ とおき, k を動かして 足し合わせると

$$\int_\Omega \sum_n \frac{1}{k!}\left(\lambda_0|Tf|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^k d\mu \leq \text{Constant} \tag{10}$$

となる. 左辺の積分の中は, 指数関数の Taylor 展開であることから (8) が得られる. □ □

1.2. Zygmund の定理と $\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$.

Zygmund の定理のこの証明は次のことの上に成り立っていることがわかる.

$$f \in L^\infty \Longrightarrow f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p \Longrightarrow Tf \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p \Longrightarrow |Tf|^k \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

すなわち,

$$\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p \quad \text{は環の構造を持っている}$$

ということである. このことから, Zygmund の定理は

$$f \in L^{\infty} \quad \text{ならば} \quad Tf \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p \quad \text{であり, かつ} \quad \int_{\Omega} \exp(\lambda |Tf|)\, d\mu < \infty$$

と見ることができる. 言い換えれば $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p$ の部分空間を考えていることになる[1].

作用素 T の定義域である L^{∞} も

(11)
$$L^{\infty}(\Omega) = \{f \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p : \sup_{1 \le p < \infty} \|f\|_p < \infty\}$$

と表すことができる[2]. すなわち Zygmund の定理は可換 Banach 環 $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p$ の部分空間同士の関係について述べたものであるとみることができる.

1.3. 環の構造とノルムについて.

この考察からもわかるとおり,

$$\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p \supset \exp L \supset L^{\infty}$$

である. ここに表れる 3 つの空間について考えると,

- $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p$ は可換環であるが, ノルムはよく分からない.
- $\exp L$ は Banach 空間であるが, 環ではない
- L^{∞} は可換 Banach 環である

ことがわかる. このことから次を提起する.

Problem . $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p$ と L^{∞} の間にどのような可換 Banach 環があるか?

予想される結論は

このような可換 Banach 環は L^{∞} しかない

である.

2. 初等的な考察

この節では岡山大学理学部・佐藤亮太郎氏によるこの問題に対する初等的な考察について紹介する.

Theorem 3. $(H, \|\cdot\|_H)$ を, 有限測度空間 (Ω, μ) 上の各点ごとの積による *Banach* 環で, $H \subset L^1$ でありその埋め込み写像 J が連続となるものとする. このとき $H \subset L^{\infty}$ であり, $\|f\|_{\infty} \le \|f\|_H$ が任意の $f \in H$ に対して成り立つ.

Remark . L^1 に含まれる環のうち最大のものは $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p$ である. 従ってこの定理はわれわれの問に対する答えになっている.

---

[1] 特定の λ に対して $\int_{\Omega} \exp(\lambda |Tf|)\, d\mu < \infty$ である関数の集合は線形空間にならないので, λ を動かして和集合をとる.

[2] $\mu(\Omega) = 1$ のとき $0 < p_0 \le p_1 \le \infty$ ならば $\|f\|_{L^{p_0}} \le \|f\|_{L^{p_1}}$ であり, $\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^{\infty}}$ である.

Proof. Jを連続と仮定したので, 定数 $C>0$ が存在して, 任意の $f\in H$ に対して $\|f\|_{L^1}\le C\|f\|_H$ となる. すると任意の $n\ge 1$ に対して

$$\|f\|_{L^n}^n=\int_\Omega |f|^n d\mu=\|f^n\|_{L^1}\le C\|f^n\|_H\le\|f\|_h^n,$$

すなわち $\|f\|_{L^n}\le C^{1/n}\|f\|_H$ となる. 従って

$$\|f\|_{L^\infty}=\lim_{n\to\infty}\|f\|_n\le\lim_{n\to\infty}C^{1/n}\|f\|_H=\|f\|_H<\infty$$

を得る. □

3. 可換 BANACH 環の基本的な性質からの考察

この節では新潟大理学部の羽鳥 理氏によるこの問題への考察について紹介する.

Theorem 4. 測度空間 $(\mathcal{X},\mathcal{M},m)$ 上の複素数値可測関数全体からなる多元環を M, L^∞ を有界可測関数全体の部分環とし, A を $L^\infty\subset A\subset M$ であるような M の部分多元環で何かのノルムで可換 *Banach* 環であるとする. このとき $L^\infty=A$ である.

Remark . こちらの考察の方がより一般的な形になっていることは明らかである.

Proof. A を単位的可換 Banach 環, その極大イデアル空間を Φ_A とする. $g\in A$ に対しそのスペクトル集合を $\sigma_A(g)$, Gelfand 変換を $\hat{g}$ と表すとき $\sigma_A(g)=\hat{g}(\Phi_A)$ である (たとえば [3] 11.5(e) など参照). g のスペクトルノルムを

$$\|\hat{g}\|_\infty=\sup\{|z|:z\in\sigma_M(g)\}$$

と表す.

$L^\infty\ne A$ と仮定する. $f\in A\setminus L^\infty$ を任意にひとつ選び, 固定すると f は非有界関数である.

スペクトルはコンパクトであり f は非有界関数なので, $\lambda>\|\hat{f}\|_\infty$ であり, 同時に任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$m(f^{-1}(\{z:|z-\lambda|<\varepsilon\}))>0$$

をみたす複素数 λ が存在する.

一方, スペクトルの定義から任意の $u\in L^\infty$ に対して $\sigma_A(u)\subset\sigma_{L^\infty}(u)$ である.

$\varepsilon=(|\lambda|-\|\hat{f}\|_\infty)/3$ とおくと, $\sup|u|\le 2\varepsilon$ かつ $f^{-1}(\{z:|z-\lambda|<\varepsilon\})$ 上では $f-u=\lambda$ であるような $u\in L^\infty$ が存在する.

すると $f-u-\lambda$ は測度正の集合上で 0 をとるので M で invertible でないことになる. したがって A でも invertible でないことになるから,

$$\lambda\in\sigma_A(f-u)$$

である.

一方,

$$\hat{f}(\Phi_A)=\sigma_A(f)\subset\{z:|z|\le\|\hat{f}\|_\infty\}$$

であり, $|\lambda|>2\varepsilon$ であると $u-\lambda$ は L^∞ で可逆であるから,

$$\sigma_{L^\infty}(u)\subset\{z:|z|\le 2\varepsilon\}$$

となり, よって

$$\hat{u}(\Phi_A)=\sigma_A(u)\subset\sigma_{L^\infty}(u)\subset\{z:|z|\le 2\varepsilon\}$$

であるから,

$$\sigma_A(f-u) = \widehat{f-u}(\Phi_A) = (\hat{f}-\hat{u})(\Phi_A) \subset \{z : |z| \le \|\hat{f}\|_\infty + 2\varepsilon\}$$

である．ここで ε の選び方から

$$\lambda \notin \sigma_A(f-u)$$

となり矛盾が起こる．以上から $L^\infty = A$ である． □

謝辞：筆者の疑問に対し，丁寧な説明と共にその解答をお教え下さった，岡山大学理学部・佐藤亮太郎教授，新潟大学理学部・羽鳥 理教授にはこの場を借りて深く御礼を申し上げます。

REFERENCES

[1] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston (1988).
[2] M. M. Rao - Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker (1991)
[3] W. Rudin *Functional analysis, 2nd ed.*, McGraw Hill,(1991)
[4] S.Yano, *Notes on Fourier Analysis (XXIX):An Extrapolation Theorem*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951).
[5] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press (1959).

700-8530 岡山市津島中 3-1-1 岡山大学教育学部
E-mail address: `sobu@cc.okayama-u.ac.jp`