

Identifiable projections of knots, links and spatial graphs

谷山公規
Kouki Taniyama

〒 169-8050

東京都新宿区西早稲田 1-6-1

早稲田大学教育学部数学教室

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University, 1-6-1

Nishi-Waseda, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-8050, Japan

e-mail address: taniyama@waseda.jp

概要 結び目・絡み目・空間グラフの影を見てその本体が特定出来るかどうかを考察する。

ある物体の一つの影が円板だったときその物体は球体であると結論出来るであろうか。例えば茶筒であっても真上から光りを照らせばその影は円板になる。しかしある物体の影が光りを照らす方向によらずに円板であればその物体は球体であることはよく知られている。(正確な statement は省略する。) このように影全体の集合は元の物体を特徴付けるかという問題は興味深い問題であるが、本稿ではある一つの影がその本体を特徴付けることがあるかどうかを考察する。この問題はいろいろなセッティングで考察可能であると思われるが、本稿では 3 次元空間内の結び目・絡み目・空間グラフを 2 次元平面に射影したときの像からもとの結び目・絡み目・空間グラフの(結び目理論の意味での)同値類が特定出来るかどうかを考察する。特定出来るような射影を *identifiable projection* と呼ぶのである。正確な定義は以下の通りである。

G を有限グラフとする。 G の *regular projection* とは G からユークリッド平面 R^2 への連続写像で、その多重点は高々有限個の辺による横断的な 2 重点のみであるものを云う。

もし regular projection $\varphi : G \rightarrow R^2$ が n 個の 2 重点を持つならば、それは up to ambient isotopy で高々 2^n 個の lifts を持つ。ここで埋め込み $f : G \rightarrow R^3$ は $\pi \circ f = \varphi$ を満たすとき φ の lift であると呼ばれる。ここで $\pi : R^3 \rightarrow R^2$ は自然な射影である。

regular projection $\varphi : G \rightarrow R^2$ は φ のどの 2 つの lifts も互いに ambient isotopic になるとき *identifiable* であると呼ばれる [3]。これと対極にある概念として金沢大学の新國亮氏は n 個の 2 重点を持つ regular projection で up to ambient isotopy でちょうど 2^n 個の lifts を持つようなものを *completely distinguishable projection* と呼んで興味深い研究を展開している [6]。

identifiable projection を持つのは planar graph だけである [3]。 G が円周と同相なグラフであるとき regular projection $\varphi : G \rightarrow R^2$ が identifiable であるための必要十分条件は φ の像が first Reidemeister move (Figure 1) で 2 重点のないものに移ることである。このときその一意的な lift は trivial knot である。例えば Figure 2 は identifiable projection の像の一例である。特に φ が identifiable でないときにはその lifts として trivial knot と trefoil knot がとれることが分かっている [7] [8]。

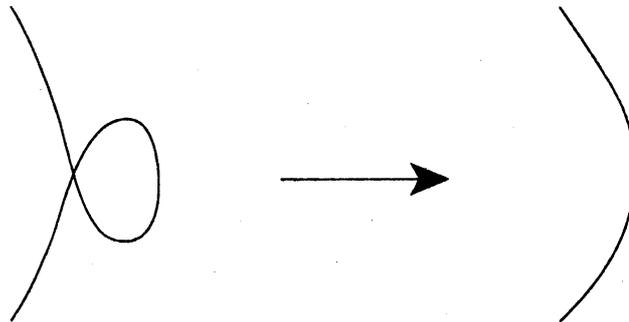


Figure 1

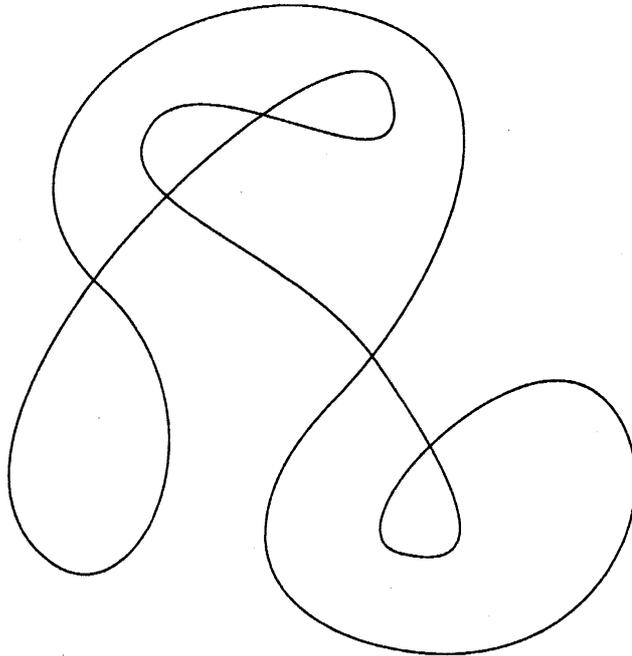


Figure 2

この結果と類似の結果がいくつかのグラフについて得られている。シーター曲線グラフについては [4] [1]、多重シーター曲線グラフについては [2]、ブーケグラフについては [10]、手錠グラフについては [9] を参照されたし。

最近筆者は郡山登美代氏との共同研究において多重手錠グラフの identifiable projections の特徴付けを行なった。Figure 3 に $n = 3$ の場合の多重手錠グラフの identifiable projection の像の一例を示して本稿を終わることとする。この射影の 2 重点にどのように上下の情報を与えても ambient isotopy の範囲で自明な空間多重手錠グラフしか出来ないことを確かめることが出来る。詳しくは [5] に述べる予定である。

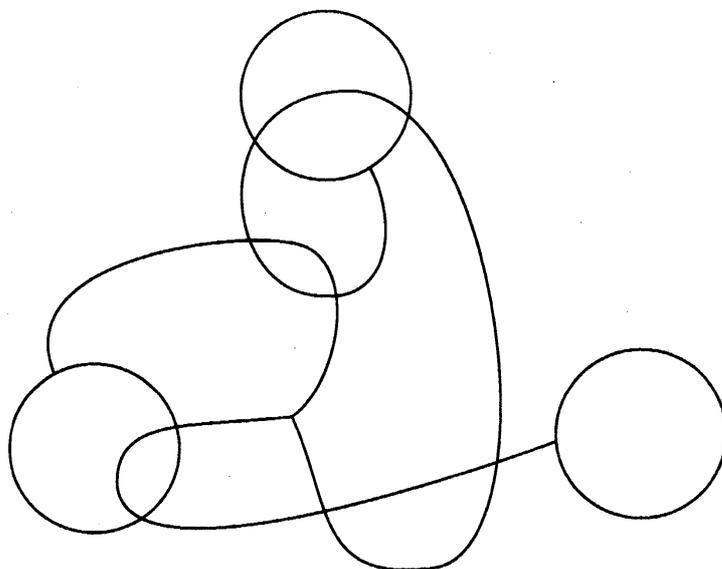


Figure 3

References

- [1] Y. Huh, G. T. Jin and S. Oh: Strongly almost trivial θ -curves, *J. Knot Theory Ramifications*, 11, 153-164, 2002.
- [2] Y. Huh, G. T. Jin and S. Oh: An elementary set for θ_n -curve projections, *J. Knot Theory Ramifications*, 11, 1243-1250, 2002.
- [3] Y. Huh and K. Taniyama: Identifiable projections of spatial graphs, *J. Knot Theory Ramifications*, 13, 991-998, 2004.
- [4] S. Kinoshita and J. Mikasa: On projections of spatial theta-curves, Kwansai Gakuin Univ. In Japanese. 1993.
- [5] T. Koriyama and K. Taniyama: Identifiable projections of certain planar graphs, in preparation.
- [6] R. Nikkuni: Completely distinguishable projections of spatial graphs, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
- [7] J. H. Przytycki: Positive knots have negative signature, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 37, 559-562, 1989.
- [8] K. Taniyama: A partial order of knots, *Tokyo J. Math.*, 12, 205-229, 1989.
- [9] K. Taniyama and C. Yoshioka: Regular projections of knotted handcuff graphs, *J. Knot Theory Ramifications*, 7, 509-517, 1998.
- [10] C. Yoshioka: Regular projections of knotted handcuff graphs and knotted bouquets, Master thesis, Tokyo Woman's Christian University, 1996.