数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 41-51

亜距離を保存するSurjection$T$について

新潟大学・自然科学研究科　小林　清隆 (Kiyotaka Kobayashi)
Department of Mathematics, Graduate School of Science and Technology, Niigata University

この講演では高橋先生（山形大），三浦先生（山形大），羽鳥先生（新潟大）との共同研究で得られた結果について述べる．よく知られている Mazur-Ulam の定理 [1] はノルム空間の間の等距離全単射写像は affine であるということを述べた定理である．最近 [3] によりその簡単な証明が与えられた．それはノルム空間が鏡映的であるということを本質的に利用したものであって，A.Vogt[4] の方法を改良したものである．このとき，ノルム空間で考えている Mazur-Ulam の定理を一般化できないか？という考えが生じる．Takahasi-Miura[2] はノルム空間が鏡映的である点に着目して，超鏡映的亜距離群を定義し，超鏡映的亜距離群の間の等亜距離全単射写像が affine であるという結果を得た．ここでは超鏡映的亜距離群の例を与えるとともに，亜距離を保存する surjection T の形を決定する．

1 亜距離空間上の鏡映と Mazur-Ulam の定理の一般化

1.1 亜距離空間と亜距離群

定義 1.1 Gを集合とする．Gの積空間$G\times G$の非負値関数δが次の条件 (1) を満たすとする．

$$\delta(f,g)=0 \Longleftrightarrow f=g \tag{1}$$

ここでGからGへの写像Tに対して$\delta(T(f),T(g))=\delta(f,g)$　$(f,g\in G)$ が成り立つとき，Tをδ-isometry という．このとき，δが次の条件を満たすときδを亜距離と呼ぶ:
　$\forall f,g\in G$に対して，

$$\exists K(f,g)\in\mathbb{R}^{+} \text{ s.t. } \delta(T(f),f)\le K(f,g)\ (\forall T:\ \text{bijective}, \delta\text{-isometry s.t. } \ T(g)=g) \tag{2}$$

このとき (G,δ) を亜距離空間と呼ぶ．

注意 1.1 簡単な考察から，距離空間は亜距離空間であることが分かる．しかしながら次の例が示すように一般に逆は成り立たない．

Aを単位的半単純可換$Banach$環とし，Aの正則元全体をA^{-1}で表す．r_AをAのスペクトル半径とするとき，

$$\delta(f,g)=r_A(\frac{f}{g}-1);\quad f,g\in A^{-1}$$

で定義される関数δを考えると，(A^{-1},δ) は亜距離空間となるが，距離空間ではない．

定義 1.2 (G,δ) を亜距離空間とし，$h \in G$ とする．このとき G 上の自己写像 ρ が点 $h \in G$ における鏡映であるとは次の条件を満たすときをいう：

$$\rho(h) = h \tag{3}$$

$$\rho^2 = id \tag{4}$$

$$\rho \text{ is } \delta\text{-isometric} \tag{5}$$

$$\exists L(h) > 1 \text{ s.t. } \delta(\rho(f), f) \geq L(h)\delta(f,h) \ (f \in G) \tag{6}$$

この場合，ρ が全単射で δ-isometry であり，また点 h が唯一の不動点であることが分かる．ここで点 $h \in G$ における G の鏡映全体の集合を $R(G;h)$ と表わす．このとき，次の不動点定理を得る．

補題 1.1 (G,δ) を亜距離空間とし，G 上の全単射，δ-isometry であるようなある族 H が群を作ると仮定する．このとき，点 $f \in G$ が条件 $\sup_{S\in H} \delta(S(f),f) < \infty$ および，$\rho S^{-1}\rho S \in H \ (S \in H)$ を満たす $\rho \in R(G;f)$ が存在するならば，点 f は H の共通の不動点である．

次に鏡映による平均を定義する．

定義 1.3 (G,δ) を亜距離空間とする．任意の $f,g \in G$ に対して，

$$\frac{f \circ g}{2} = \left\{h \in G : \exists\rho \in R(G;h) \text{ with } \rho(f) = g\right\}$$

としたとき，これを f,g の平均という．また，(G_1,δ_1), (G_2,δ_2) を亜距離空間とし，T を G_1 から G_2 への写像とする．T が次の条件

$$T\left(\frac{f \circ g}{2}\right) = \frac{T(f) \circ T(g)}{2} \quad (f,g \in G_1)$$

を満たすとき，T を affine であるという．

このとき，次の補題 1.2 は少しの計算を要するが，補題 1.1 から導かれる．

補題 1.2 (G_1,δ_1), (G_2,δ_2) を亜距離空間とし，T を G_1 から G_2 への δ-isometry で全単射な写像とする．また任意の $f,g \in G_1$ に対して，$\frac{f\circ g}{2} \neq \emptyset$，$\frac{T(f)\circ T(g)}{2} \neq \emptyset$ とする．このとき，平均 $\frac{f\circ g}{2}$，$\frac{T(f)\circ T(g)}{2}$ は 1 点集合であり，かつ

$$T\left(\frac{f \circ g}{2}\right) = \frac{T(f) \circ T(g)}{2} \quad (f,g \in G_1)$$

が成り立つ．

また補題 1.2 において $G_1 = G_2$ とし，$T = id$ とすると，次の系 1.3 を得る．

系 1.3 (G,δ) を亜距離空間とし，$f,g \in G$ とする．このとき，平均 $\frac{f\circ g}{2}$ は空集合かまたは 1 点集合となる．

また次の定義も自然なものである．

定義 1.4 亜距離空間 (G,δ) は条件 $R(G;f) \neq \emptyset$ $(f \in G)$ を満たすとき，鏡映的であるという．また亜距離空間 (G,δ) は条件 $\frac{f\circ g}{2} \neq \emptyset$ $(f,g \in G)$ を満たすとき，強鏡映的であるという．

注意 1.2 もし G が強鏡映的なら G は鏡映的となる．実際 G を強鏡映的とし，$f \in G$ とすると $\frac{f \circ f}{2} \neq \emptyset$ となる．故にある $h \in G$ に対して，$\rho(f) = f$ をみたす $\rho \in R(G; h)$ が存在する．ここで h は ρ の唯一の不動点であったので，$f = h$ となる．したがって $R(G; f) \neq \emptyset$ となり，G は鏡映的となる．

次に (G, δ) を 亜距離空間とし，G を群とする．このとき，次の条件 (7),(8),(9) をみたす亜距離空間 (G, δ) を考える:

$$\delta(hf^{-1}h, hg^{-1}h) = \delta(f, g) \quad (h, f, g \in G) \tag{7}$$

$$\forall h \in G \text{ に対して}, \exists L(h) > 1 \text{ s.t. } \delta(hf^{-1}h, f) \geq L(h)\delta(f, h) \quad (f \in G) \tag{8}$$

このとき G は鏡映的である．また各 $f, g \in G$ に対して，$\frac{f \circ g}{2} \supseteq \{h \in G : hf^{-1}h = g\}$ であることが分かる．したがってもし

$$M(f, g) = \{h \in G : hf^{-1}h = g\} \text{ としたとき}, M(f, g) \neq \emptyset \quad (f, g \in G) \tag{9}$$

ならば，(G, δ) は強鏡映的である．

定義 1.5 (G, δ) を亜距離空間とし，G を群とする．このとき，上の条件 (7),(8),(9) を満たす亜距離空間 (G, δ) を超鏡映的亜距離群と呼ぶ．

注意 1.3 $\frac{f \circ g}{2} \neq \emptyset$ であり，$M(f, g) = \emptyset$ となるような場合もあり得る．しかし，$M(f, g) \neq \emptyset$ ならば系 1.3 より $\frac{f \circ g}{2} = M(f, g)$ となる．

1.2 Mazur-Ulam の定理の一般化

強鏡映的概念を用いると，補題 1.2 から次の結果を得る．

定理 1.4 強鏡映的亜距離空間の間の等亜距離全単射写像は affine である．

定理 1.4 の直接の系として次の Mazur-Ulam の定理を得る．

系 1.5 (Mazur-Ulam の定理)([1]) ノルム空間の間の等距離全単射写像は affine である．

証明 N をノルム空間とし，$f, g \in N$ に対して $a = \frac{f+g}{2}$ とする．また $\rho(u) = 2a - u$ $(u \in N)$ とする．このとき簡単な考察から，$\rho \in R(N; a)$ with $g = \rho(f)$ であり，また N が強鏡映的であることがわかる．したがって定理 1.4 から題意は示される． □

次の結果は定理 1.4 の直接の結果であり，それはまた Mazur-Ulam の定理の一般化になっている．

定理 1.6 超鏡映的亜距離群の間の等亜距離全単射写像は affine である．

1.3 超鏡映的亜距離群の例

X をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C^+(X)$ を X 上の正の実数値連続関数全体とする. また $f \in C^+(X)$ に対して, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ と表わす. $C^+(X)$ は通常の演算では線形空間ではないが, 積については群になっている. ここで, $\delta_\times(f,g) = \|\frac{f}{g} - 1\|\|\frac{g}{f} - 1\|$ $(f,g \in C^+(X))$ と定める. このとき次の結果を得る.

定理 1.7 $(C^+(X), \delta_\times)$ は超鏡映的亜距離群になる.

証明 (1), (7), (9) が成り立つことは明らかである. よって (2) と (8) が成り立つことを示せばよい.
(2) 任意の $f,g \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}||\frac{T(f)}{f} - 1|| &\le ||\frac{T(f)}{f}|| + 1 \\ &\le (||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| + ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| + 1)||\frac{g}{f}|| + 1\end{aligned}$$

が任意の bijective , $\delta_\times$-isometry s.t. $T(g) = g$で 成り立つ. 一方任意の $f,g \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}||\frac{f}{T(f)} - 1|| &\le ||\frac{f}{T(f)}|| + 1 \\ &\le (||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| + ||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| + 1)||\frac{f}{g}|| + 1\end{aligned}$$

が任意の bijective , $\delta_\times$-isometry s.t. $T(g) = g$で 成り立つ. ここで次の 2 通りについて考える.
(i) $||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| < \frac{1}{2}$のとき.

$$\begin{aligned}||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| + ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| &\le M\sqrt{||\frac{T(f)}{T(g)} - 1||\ ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1||} \\ &\le \frac{M}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

を満たす正数 M が存在する.
(ii) $||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| \ge \frac{1}{2}$のとき.

$$\begin{aligned}||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| + ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| &\le 5||\frac{T(f)}{T(g)} - 1||\ ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| \\ &= 5||\frac{f}{g} - 1||\ ||\frac{g}{f} - 1||\end{aligned}$$

となる.
よって $\alpha(f,g) = \max\{\frac{M}{\sqrt{2}},\ 5||\frac{f}{g} - 1||\ ||\frac{g}{f} - 1||\}$ とすると,

$$||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| + ||\frac{T(g)}{T(f)} - 1|| \le \alpha(f,g)$$

となる. したがって,

$$||\frac{T(f)}{f} - 1||\ ||\frac{f}{T(f)} - 1|| \le \{(\alpha(f,g) + 1)||\frac{g}{f}|| + 1\}\{(\alpha(f,g) + 1)||\frac{f}{g}|| + 1\}$$

となり，$K(f,g)=\{(\alpha(f,g)+1)||\frac{g}{f}||+1\}\{(\alpha(f,g)+1)||\frac{f}{g}||+1\}$ とすると (2) を満たす．

(8) $h,f\in C^+(X)$ を任意にとり，$x,y\in X$ を

$$||\frac{h}{f}-1||=|\frac{h(x)}{f(x)}-1| \text{ かつ } ||\frac{f}{h}-1||=|\frac{f(y)}{h(y)}-1|$$

を満たすようにとる．このとき，

$$|\frac{h(y)}{f(y)}-1|\leq|\frac{h(x)}{f(x)}-1| \text{ かつ } |\frac{f(x)}{h(x)}-1|\leq|\frac{f(y)}{h(y)}-1|$$

を得る．このことから

$$f(x)h(y)\leq f(y)h(x)$$

がわかる．よって，

$$2f(x)h(y)\leq(h(y)+f(y))(h(x)+f(x))$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}
2\Big\|\frac{h}{f}-1\Big\|\Big\|\frac{f}{h}-1\Big\| &= 2\Big|\frac{h(x)}{f(x)}-1\Big|\Big|\frac{f(y)}{h(y)}-1\Big| \\
&= 2\Big|\frac{(h(x)-f(x))(f(y)-h(y))}{f(x)h(y)}\Big| \\
&= 2\Big|\frac{(h(y)^2-f(y)^2)(h(x)^2-f(x)^2)}{f(x)h(y)(h(x)+f(x))(h(y)+f(y))}\Big| \\
&\leq \Big|\frac{(h(y)^2-f(y)^2)(h(x)^2-f(x)^2)}{f(x)^2h(y)^2}\Big| \\
&= \Big|\frac{h(x)^2}{f(x)^2}-1\Big|\Big|\frac{f(y)^2}{h(y)^2}-1\Big| \\
&\leq \Big\|\frac{h^2}{f^2}-1\Big\|\Big\|\frac{f^2}{h^2}-1\Big\|
\end{aligned}$$

となるので $2\delta_\times(h,f)\leq\delta_\times(hf^{-1}h,f)$ を得る．ここで $L(h)=2$ とすると (8) を満たす．
以上より $(C^+(X),\delta_\times)$ は超強映的亜距離群になる． □

同様に $\delta_+(f,g)=||\frac{f}{g}-1||+||\frac{g}{f}-1||\ (f,g\in C^+(X))$ と定めたとき，次の結果を得る．

定理 1.8 $(C^+(X),\delta_+)$ は超鏡映的亜距離群になる．

証明 (1), (7), (9) が成り立つことは明らかである．よって (2) と (8) が成り立つことを示せばよい．
(2) 任意の $f,g\in G$ に対して，

$$\begin{aligned}
||\frac{T(f)}{f}-1|| &= ||\frac{T(f)-f}{f}|| \\
&\leq (||\frac{T(f)}{T(g)}-1||+||\frac{T(g)}{T(f)}-1||)\ ||\frac{g}{f}||+(||\frac{f}{g}-1||+||\frac{g}{f}-1||)\ ||\frac{g}{f}|| \\
&= \delta_+(T(f),T(g))\ ||\frac{g}{f}||+\delta_+(f,g)\ ||\frac{g}{f}|| \\
&= 2\delta_+(f,g)\ ||\frac{g}{f}||
\end{aligned}$$

が任意の T: bijective , δ_+-isometry s.t. $T(g)=g$で成り立つ．一方任意の $f,g\in G$ に対して，

$$
\begin{aligned}
||\frac{f}{T(f)}-1|| &= ||\frac{f-T(f)}{T(f)}|| \\
&\le (||\frac{T(f)}{T(g)}-1||+||\frac{T(g)}{T(f)}-1||+||\frac{f}{g}-1||+||\frac{g}{f}-1||)\ ||\frac{T(g)}{T(f)}|| \\
&\le 2\delta_+(f,g)\ (||\frac{T(g)}{T(f)}-1||+||\frac{T(f)}{T(g)}-1||+1) \\
&= 2\delta_+(f,g)\ (\delta_+(f,g)+1)
\end{aligned}
$$

が任意の T: bijective , δ_+-isometry s.t. $T(g)=g$で成り立つ．したがって，

$$\delta_+(T(f),f)\le 2\delta_+(f,g)(||\frac{g}{f}||+\delta_+(f,g)+1)$$

となり，$K(f,g)=2\delta_+(f,g)(||\frac{g}{f}||+\delta_+(f,g)+1)$ とすると，(2) を満たす．

(8) $h,f\in C^+(X)$ を任意にとり，$x,y\in X$ を

$$||\frac{h}{f}-1||=|\frac{h(x)}{f(x)}-1| \text{ かつ } ||\frac{f}{h}-1||=|\frac{f(y)}{h(y)}-1|$$

を満たすようにとる．このとき，

$$|\frac{h(y)}{f(y)}-1|\le|\frac{h(x)}{f(x)}-1| \text{ かつ } |\frac{f(x)}{h(x)}-1|\le|\frac{f(y)}{h(y)}-1|$$

を得る．このことから

$$f(x)h(y)\le f(y)h(x)$$

がわかる．

ここで，$a\ge b$ を満たす任意の正の数に対して，

$$|a^2-1|+|\frac{1}{b^2}-1|\ge\frac{11}{10}\ \{|a-1|+|\frac{1}{b}-1|\}$$

が成り立つことを用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{11}{10}\delta_+(f,h) &= \frac{11}{10}\ (||\frac{h}{f}-1||+||\frac{f}{h}-1||) \\
&= \frac{11}{10}\ (|\frac{h(x)}{f(x)}-1|+|\frac{f(y)}{h(y)}-1|) \\
&\le |\frac{h(x)^2}{f(x)^2}-1|+|\frac{f(y)^2}{h(y)^2}-1| \\
&= ||\frac{h^2}{f^2}-1||+||\frac{f^2}{h^2}-1|| \\
&= \delta_+(hf^{-1}h,f)
\end{aligned}
$$

となるので $\delta_+(hf^{-1}h,f)\ge\frac{11}{10}\delta_+(f,h)$ を得る．ここで，$L(h)=\frac{11}{10}$ とすると (8) を満たす．

以上より $(C^+(X),\delta_+)$ は超強映的亜距離群になる． □

2　亜距離を保存する $C^+(X)$ 上のSurjection T について

この章では，$C^+(X)$ 上の亜距離を保存するSurjection T の形を決定する．

2.1　$\delta_{\max}$ を保存する $C^+(X)$ 上のSurjection T について

この節では，

$$\delta_{\max}(f,g)=\max\{||\frac{g}{f}-1||,||\frac{f}{g}-1||\}\quad (f,g\in C^+(X))$$

と定めたとき，

$$\delta_{\max}(f,g)=\delta_{\max}(T(f),T(g))\quad (f,g\in C^+(X))$$

を満たす $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ へのsurjection T の形を決定する．

ここで X をコンパクトハウスドルフ空間とし，$C_{\mathbb{R}}(X)$ を X 上の実数値連続関数全体，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体とする．

補題 2.1 $S: C_{\mathbb{R}}(X)\to C_{\mathbb{R}}(Y)$ は surjective で real-linear であり，一様ノルムに関して isometry であるとする．このとき $S_{\mathbb{C}}: C(X)\to C(Y)$ を次のように定義する：

$$S_{\mathbb{C}}(u+iv)=S(u)+iS(v)\quad (u,v\in C_{\mathbb{R}}(X)).$$

このとき $S_{\mathbb{C}}$ は complex-linear であり，一様ノルムに関して isometry である．

証明 簡単な計算から $S_{\mathbb{C}}$ は bijection であり，また complex-linear であることがわかる．したがって $||S_{\mathbb{C}}(f)||=||f||$ $(f\in C(X))$ となることを示せばよい．まず $||S_{\mathbb{C}}(f)||\geq||f||$ $(f\in C(X))$ となることを示す．$||S_{\mathbb{C}}(f)||<||f||$ となるような $f=u+iv\in C(X)$ があると仮定する．このとき X はコンパクトなので，$||f||=|f(x_0)|=|u(x_0)+iv(x_0)|$ となるような $x_0\in X$ が存在する．ここで $\alpha=\frac{u(x_0)-iv(x_0)}{||f||}$, $a=Re(\alpha)$, $b=Im(\alpha)$ とおく．このとき

$$||au-bv||=||f||>||S_{\mathbb{C}}(f)||\geq||S(au-bv)||$$

となるが，S はisometryであったのでこれは矛盾である．したがって，$||S_{\mathbb{C}}(f)||\geq||f||$ $(f\in C(X))$ となる．さらに S^{-1} が isometry であることから，$||S_{\mathbb{C}}(f)||\leq||f||$ $(f\in C(X))$ となることもわかる．ゆえに $||S_{\mathbb{C}}(f)||=||f||$ $(f\in C(X))$ となり $S_{\mathbb{C}}$ は isometry である．□

定理 2.2 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし，

$$\delta_{\max}(T(f),T(g))=\delta_{\max}(f,g)\quad (f,g\in C^+(X))$$

を満たすものとする．このとき，$T(f)=(wf\circ\Phi)^h$ $(f\in C^+(X))$ となる $w\in C^+(Y)$, $h: X\to\{-1,1\}\in C^+(X)$, $\Phi: Y\to X$: *homeomorphism* が存在する．

証明 $\widetilde{T}=\frac{T}{T(1)}$ とおく．すると $\widetilde{T}$ はbijection になることがわかる．このとき，$S: C_{\mathbb{R}}(X)\to C_{\mathbb{R}}(Y)$ を

$$S(f)=\log\widetilde{T}(\exp f)\quad (f\in C_{\mathbb{R}}(X))$$

と定めると，S は bijection になる．また，

$$||S(u) - S(v)|| = ||u - v|| \quad (u, v \in C_{\mathbb{R}}(X))$$

となることも分かるので，Mazur-Ulam の定理から

$$S(\frac{u+v}{2}) = \frac{S(u) + S(v)}{2} \quad (u, v \in C_{\mathbb{R}}(X))$$

を得る．ここで $S(0) = 0$ とから，S は real-linear になる．次に，$S_{\mathbb{C}} : C(X) \to C(Y)$ を

$$S_{\mathbb{C}}(u + iv) = S(u) + iS(v) \quad (u, v \in C_{\mathbb{R}}(X))$$

と定めると，補題 2.1 から $S_{\mathbb{C}}$ は bijective で complex-linear でありまた，isometry であることがわかる．このとき，Banach-Stone の定理から，$\exists h \in C(Y)$ with $|h| = 1$ on Y, $\exists \Phi : Y \to X$:homeomorphism s.t. $S_{\mathbb{C}}(f) = hf \circ \Phi$ $(f \in C^+(X))$ となる．これより，

$$T(f) = T(1)(f \circ \Phi)^h \quad (f \in C^+(X))$$

を得る．ここで，$w = T(1)^h$ とすると，$T(f) = (wf \circ \Phi)^h$ $(f \in C^+(X))$ を得る． □

定理 2.2 は Mazur-Ulam の定理を書き換えたものになっていることがわかる．

次に $\delta_0(f,g) = ||\frac{f}{g} - 1||$ $(f, g \in C^+(X))$ と定めたとき，定理 2.2 の系として次の系 2.3 を得る．

系 2.3 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし，

$$\delta_0(f,g) = \delta_0(T(f), T(g)) \quad (f, g \in C^+(X))$$

を満たすものとする．このとき，$T(f) = wf \circ \Phi$ $(f \in C^+(X))$ を満たす $w \in C^+(Y)$, $\Phi : Y \to X$: *homeomorphism* が存在する．

証明 $\delta_0(f,g) = \delta_0(T(f), T(g))$ $(f, g \in C^+(X))$ から，$\delta_{\max}$ の定義より，

$$\delta_{\max}(f,g) = \delta_{\max}(T(f), T(g)) \quad (f, g \in C^+(X))$$

が分かる．ゆえに定理 2.2 から $T(f) = (wf \circ \Phi)^h$ $(f \in C^+(X))$ となる $w \in C^+(Y)$, $h : X \to \{-1, 1\} \in C^+(X)$, $\Phi : Y \to X$: *homeomorphism* が存在する．それゆえ X 上 $h = 1$ となることを示せば十分である．実際 $f = 1$, $g = 2$ とする．このとき $T(f) = w^h$ となり，$T(g) = 2^h w^h$ となる．したがって

$$\frac{T(f)}{T(g)} = \frac{1}{2^h}$$

となり

$$||\frac{1}{2^h} - 1|| = ||\frac{1}{2} - 1|| = \frac{1}{2}$$

となるので X 上 $h = 1$ となることが分かる． □

2.2 $\delta_\times$ を保存する $C^+(X)$ 上のSurjection T について

この節では,

$$\delta_\times(f,g) = ||\frac{f}{g} - 1||||\frac{g}{f} - 1|| \quad (f,g \in C^+(X))$$

と定めたとき,

$$\delta_\times(f,g) = \delta_\times(T(f),T(g)) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たす $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ へのsurjection T の形を決定する.

補題 2.4 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g)) = \delta_\times(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$T(f^p g^{1-p}) = T(f)^p T(g)^{1-p} \quad (p \in \mathbb{R},\ f,g \in C^+(X))$$

補題 2.5 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g)) = \delta_\times(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(1) = 1$, $T(fg) = T(f)T(g)$ $(f,g \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, $T(3) = 3$ または $T(3) = \frac{1}{3}$ となる.

補題 2.6 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g)) = \delta_\times(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(3) = 3$, $T(f^p) = T(f)^p$ $(p \in \mathbb{R},\ f \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, $T(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ となる.

補題 2.7 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g)) = \delta_\times(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(1) = 1$, $T(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$, $T(fg) = T(f)T(g)$ $(f,g \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$||\frac{f}{g} - 1|| = ||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| \quad (f,g \in C^+(X))$$

定理 2.8 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g)) = \delta_\times(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. このとき, $T(f) = wf\circ\Phi$ $(f \in C^+(X))$ または $T(f) = \frac{1}{wf\circ\Phi}$ $(f \in C^+(X))$ となる $w \in C^+(Y), \Phi : Y \to X$: *homeomorphism* が存在する.

定理 2.8 の証明 $\widetilde{T} = \frac{T}{T(1)}$ とおく. すると $\widetilde{T}$ はbijection になることがわかる. また,

$$\delta_\times(f,g) = \delta_\times(\widetilde{T}(f),\widetilde{T}(g)) \quad (f,g \in C^+(X))$$

も成り立つことが分かる. ここで, 補題 2.4および $\widetilde{T}(1) = 1$ とから

$$\widetilde{T}(fg) = \widetilde{T}(f)\widetilde{T}(g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を得る. これと 補題 2.5～補題 2.7および, 系 2.3 から題意は示される. □

2.3 δ_+ を保存する $C^+(X)$ 上のSurjection T について

この節では,

$$\delta_+(f,g) = ||\frac{f}{g} - 1|| + ||\frac{g}{f} - 1|| \quad (f,g \in C^+(X))$$

と定めたとき,

$$\delta_+(f,g) = \delta_+(T(f),T(g)) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たす $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ へのsurjection T の形を決定する.

補題 2.9 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g)) = \delta_+(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$T(f^p g^{1-p}) = T(f)^p T(g)^{1-p} \quad (p \in \mathbb{R},\ f,g \in C^+(X))$$

補題 2.10 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g)) = \delta_+(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(1) = 1$, $T(fg) = T(f)T(g)$ $(f,g \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, $T(3) = 3$ または $T(3) = \frac{1}{3}$ となる.

補題 2.11 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g)) = \delta_+(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(3) = 3$, $T(f^p) = T(f)^p$ $(p \in \mathbb{R},\ f \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, $T(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ となる.

補題 2.12 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g)) = \delta_+(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. また $T(1) = 1$, $T(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$, $T(fg) = T(f)T(g)$ $(f,g \in C^+(X))$ が成り立つものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$||\frac{f}{g} - 1|| = ||\frac{T(f)}{T(g)} - 1|| \quad (f,g \in C^+(X))$$

定理 2.13 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g)) = \delta_+(f,g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を満たすものとする. このとき, $T(f) = wf \circ \Phi$ $(f \in C^+(X))$ または $T(f) = \frac{1}{wf \circ \Phi}$ $(f \in C^+(X))$ となる $w \in C^+(Y), \Phi : Y \to X$: *homeomorphism* が存在する.

定理 2.13 の証明 $\widetilde{T} = \frac{T}{T(1)}$ とおく. すると $\widetilde{T}$ はbijection になることがわかる. また,

$$\delta_+(f,g) = \delta_+(\widetilde{T}(f),\widetilde{T}(g)) \quad (f,g \in C^+(X))$$

も成り立つことが分かる. ここで, 補題 2.9および $\widetilde{T}(1) = 1$ とから

$$\widetilde{T}(fg) = \widetilde{T}(f)\widetilde{T}(g) \quad (f,g \in C^+(X))$$

を得る. これと 補題 2.10〜補題 2.12 および, 系 2.3 から題意は示される. □

参考文献

[1] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isometrique d'espaces vectoriels norms,* C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946-948.

[2] S.-E. Takahasi, and T. Miura, *Reflections and Mazur-Ulam's theorem on metricpoid spaces,* preprint, (2004).

[3] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem,* Amer. Math. Monthly, **110-7**(2003), 633-635.

[4] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance,* Studia Math, **45** (1973), 43-48.