

非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数*

九州大学大学院数理学研究院 若山 正人 (Masato Wakayama)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 非可換調和振動子 (NCHO)

そもその問題は、非可換調和振動子 (Non-Commutative Harmonic Oscillator =NCHO) のスペクトルの研究である。NCHO とは [A.Parmeggiani-W.: Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 98 2001, Forum Math., 14 2002 の論文 I] で導入された常微分方程式系である。すなわち、次のような行列の微分作用素 $Q_{(\alpha,\beta)}(x, D_x)$ の固有値が知りたい:

$$Q_{(\alpha,\beta)}(x, D_x) := A \left(-\frac{\partial_x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) + J \left(x\partial_x + \frac{1}{2} \right).$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_x = \frac{d}{dx}.$$

• 調和振動子 $-\frac{\partial_x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ の解析は生成消滅演算子に基づいている。それは言い換えれば、Heisenberg の正準交換関係 $[\partial_x, x] = 1$ から導かれる Lie 環 \mathfrak{sl}_2 の表現の存在といってもよい。ここで扱う非可換調和振動子は、2つの行列 A と J が可換でないことから明らかのように、 $[\partial_x, x] = 1$ という ∂_x と x の間の非可換性のほかに、新たに行列の非可換性が加わった調和振動子の一般化と考えられる。ただし、NCHO は物理や工学からの要請で導入されたものではなく、現在のところ具体的な物理モデルが見つかったわけではない¹。

*京大数理研, December 20, 2004 における講演および本稿の主な内容は、数年来の一瀬孝氏 (金沢大学理学部) との共同研究の成果である (原稿提出 March 24, 2005).

¹L.Boulton *et al*, Lett. Math. Phys. 70 2004 には、関連する動機が、少しあるように見受けられる。

- $\alpha, \beta > 0, \alpha\beta > 1$ とする。このとき $Q = Q_{(\alpha, \beta)}$ は、 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ における正値自己共役作用素で離散固有値のみをもつ：

$$(0 <) \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty.$$

以下本稿では、つねに $\alpha, \beta > 0, \alpha\beta > 1$ と仮定する。この条件は、 $A + \sqrt{-1}J$ が正値エルミート行列であることへの要請である。

- $\alpha = \beta$ ならば、 Q が定める系は調和振動子の2個の組とユニタリ同値である（生成消滅演算子があり、intertwiner も明示的に得られる）。とくに、

$$Q_{(\sqrt{2}, \sqrt{2})} \cong \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)I_2.$$

- 一般の場合も、連分数展開を用いて理論的？にはスペクトルが決定できる。 $(\alpha = \beta$ のときの固有関数からなる基底に関する展開係数が満たす3項間漸化式を利用する。) 重複度は高々3であることが示される [Parmeggiani-W. Forum Math., 14 2002 の論文 II]。だが、具体的にはまったく求まらない。

直後、[H.Ochiai: Commun. Math. Phys., 217 2001] において

- NCHO のスペクトル問題と Heun DE（複素領域で確定特異点を4点もつ Fuchs 型常微分方程式）を解くこととの同値性が示された²。
- 精度保証つき計算：[K.Nagatou-M.T.Nakao-W.: Numer. Func. Anal. Optim., 23 2002] を行ったが完全な解析には至っていない。本稿の最終ページに参考までに α/β の変化に対する固有値の様子を表すグラフを付けたが、詳しくは論文を参照していただきたい。

2 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数

§1 スペクトルゼータ関数:

$\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots}$ を $Q = Q_{(\alpha, \beta)}$ の固有値とする。このとき、次の Dirichlet 型級数で定義される

$$\zeta_Q(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$$

²さらに最近の H.Ochiai, Lett. Math. Phys. 70 2004 には、スペクトルの重複度と対応する Fuchs 型 ODE の解の接続問題の研究がある。

をNCHOのスペクトルゼータ関数と言う [T. Ichinose-W.: Commun. Math. Phys., Published online: March 15 2005 (以後これを [IW:CMP] と記す), Kyushu J. Math., 59 2005 (以後これを [IW:KJM] と記す)]. この級数は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束することが示されるので [IW:KJM], $\zeta_Q(s)$ はそこで正則である.

- $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ のときは、前述のことから

$$\zeta_{Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})}(s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-s} = 2(2^s - 1)\zeta(s)$$

が判る。ここで $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ はリーマンゼータ関数である³。

- スペクトルゼータ関数を考えたときの基本問題は以下のとおりである：

[基本的問題]

- (1) $\zeta_Q(s)$ は全平面へ有理型に解析接続できるか？
- (2) 固有値の個数評価 (Weyl's law)。
- (3) $\zeta_Q(s)$ の零点、極は？
- (4) 特殊値の計算とその数としての性質の研究。
- (5) 関数等式、RH の類似などの可能性。

- 注意： $\zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1}$ のようなオイラー積は見込めない。よって、 $\zeta_Q(s)$ の zero-free region の effective な評価は荒いものでさえ非自明である。

§2 全平面への解析接続:

$\zeta_Q(s)$ のは次のように全平面に有理型に解析接続される [IW:CMP]。

定理 1: 各 $j = 1, 2, \dots$ に対し定数 $C_{Q,j}$ が存在し、さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\operatorname{Re} s > -2n$ で正則な関数 $H_{Q,n}(s)$ が存在し、次が成立する：

$$\zeta_Q(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \frac{1}{s-1} + \sum_{j=1}^n \frac{C_{Q,j}}{s+2j-1} + H_{Q,n}(s) \right].$$

したがって $\zeta_Q(s)$ は全平面 \mathbb{C} で有理型である。 $s = 1$ で単純極、 $s = 0, -2, -4, \dots$ で単純零点をもつ。 $s = 1$ 以外では極を持たない。

³この意味で、 $\zeta_Q(s)$ は $\zeta(s)$ の $\frac{\alpha}{\beta}$ -類似である。より詳しく述べれば、後述の定理の系として、すべての $s \in \mathbb{C}$ に対して $\zeta_Q(s)$ が $\zeta(s)$ の $\frac{\alpha}{\beta}$ -類似であることが示される (勿論、up to elementary factor で)。

- $\zeta(s)$ の場合の対応物：積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

から、Taylor 展開 $t/(e^t - 1) = \sum_{n=0}^\infty (B_n/n!) t^n$ ($|t| < 2\pi$) を用いて (ただし、 B_n は Bernoulli 数)

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{s+n-1} + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \right].$$

- 注意： $s=0$ はリーマンゼータ $\zeta(s)$ の零点ではないが、上の定理で見ると、 $\zeta_Q(s)$ の零点ではある。これは、先に見た事実 $\zeta_{Q(\sqrt{x}, \sqrt{2})}(s) = 2(2^s - 1)\zeta(s)$ に compatible である。

- 証明方法：熱核 $K(t) = K(t, x, y) := e^{-tQ(\alpha, \beta)}(x, y)$ の跡

$$\text{Tr } K(t) = \int \text{Tr} \left(e^{-tQ(\alpha, \beta)}(x, x) \right) dx,$$

を考え、 $\zeta_Q(s)$ をその Mellin 変換

$$\zeta_Q(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \text{Tr } K(t) dt.$$

と考える。Tr $K(t)$ の原点での漸近展開を求めることが課題である。

- 証明の鍵:

$$\text{Tr } K(t) \sim c_{-1}t^{-1} + c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots, \quad t \downarrow 0$$

と漸近展開されることを示すこと。まずはじめに、漸近展開がじつさいに t^{-1} から始まり、その初項の係数が $c_{-1} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}}$ と与えられることを証明する。

- 最近の関連する仕事： $Q_{(\alpha, \beta)}$ の複素冪 (resolvent 展開) を用いてのアプローチ。[以下の副産物 1 で述べる [問題 A] を含め、A. Parmeggiani が in progress⁴。また、E. Mizushima (学習院大学 修士論文：2004年2月) において、 c_{-1} の決定]。

- 副産物 1：漸近展開が t^{-1} から始まることと c_{-1} の値の決定から、Wiener-Ikehara のタウバー型定理を用いると次の Weyl's law が従う：

$$N_Q(\lambda) := \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \approx \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \lambda, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

⁴研究集会 "Zetas and Limit Law" in Okinawa (November 2004) での講演。

問題 A : $N_Q(\lambda)$ の剰余項の評価は？

● 副産物 2 : 最小固有値 λ_1 の評価を得るために Lieb-Thirring の不等式 [E.Lieb-W.Thirring, 1976 in "Studies in Mathematical Physics" Eds. B.Simon-A.S.Wightman, Princeton Univ. Press. H.Araki, Lett. Math. Phys. 19 1990 も参照] を思い出す。

Lieb-Thirring の不等式: $A \geq 0, B \geq 0$ に対し

$$\text{Tr}(B^{1/2}AB^{1/2})^{kq} \leq \text{Tr}(B^{q/2}A^qB^{q/2})^k,$$

($q \geq 1, k > 0$) が成立する。これを利用することで

$$\min\{\alpha, \beta\} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha\beta}} \leq 2\lambda_1 \leq \max\{\alpha, \beta\} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha\beta}}$$

が示される。さらに m_Q を λ_1 の重複度とすると

$$m_Q \leq 2 \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \min\{\alpha, \beta\} \sqrt{1 - 1/(\alpha\beta)} \text{ のとき,}$$

$$m_Q \geq 2 \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \max\{\alpha, \beta\} \sqrt{1 - 1/(\alpha\beta)} \text{ のとき.}$$

なお、 α, β が十分大きければ $m_Q = 1$ が示されている [前出の Nagatou-Nakao-W.]。

§3 $\text{Tr} K(t)$ の漸近展開のあらまし :

$Q := A^{-1/2}QA^{-1/2}$ に対する熱核は、調和振動子の熱核を用いて明示的に書ける (このことは後述の特殊値の解析に役立つ) が、 A と J の非可換性より $[\partial_t + Q(x, D_x)]K(t, x, y) = 0$ は解けない。

さて、

$$\zeta_Q(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_0^1 + \int_1^\infty \right] dt t^{s-1} \text{Tr} K(t) =: Z_0(s) + Z_\infty(s)$$

と書こう。このとき

- $Z_\infty(s)$ の全平面での正則性は容易に判る。よって $Z_0(s)$ を調べればよい。
- ψ Diff.Op. $K_1(t)$ を ($f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$)

$$\begin{aligned} K_1(t)f(x) &= \int K_1(t, x, y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int e^{i(x-y)\xi} \exp\left[-A\frac{\xi^2 + x^2}{2} + Jyi\xi\right]f(y)dyd\xi \end{aligned}$$

と定め、さらに $R_2(t) := K(t) - K_1(t)$ とおく。

補題 2:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)Z_0(s) &= \int_0^1 dt t^{s-1} \text{Tr} K_1(t) + \int_0^1 dt t^{s-1} \text{Tr} R_2(t) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \frac{1}{s-1} + \int_0^1 dt t^{s-1} \text{Tr} R_2(t).\end{aligned}$$

• ここで $F(t, x, y) := [\partial_t + Q]R_2(t, x, y) = -[\partial_t + Q]K_1(t, x, y)$ とおく。 ($\because [\partial_t + Q]K = 0$.)

Duhamel の原理により

$$R_2(t) = \int_0^\infty e^{-(t-u)Q} F(u) du = K_2(t) + R_3(t).$$

とかける。ただし、

$$K_2(t) := \int_0^\infty du \int K_1(t-u, x, z) F(u, z, y) dz,$$

$$R_3(t) := \int_0^\infty du \int R_2(t-u, x, z) F(u, z, y) dz.$$

したがって、 $K(t) = K_1(t) + K_2(t) + R_3(t)$ である。

• この操作を続けると

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t) + \cdots + K_n(t) + R_{n+1}(t),$$

ただし、 $1 \leq m \leq n$ に対し

$$\begin{aligned}K_m(t) &= \int_0^t du_1 \int_0^{t-u_1} du_2 \cdots \int_0^{t-u_1-u_2-\cdots-u_{m-2}} du_{m-1} \\ &\quad \times K_1(t-u_1-\cdots-u_{m-1}) F(u_{m-1}) \cdots F(u_2) F(u_1), \\ R_{n+1}(t) &= \int_0^t du_1 \int_0^{t-u_1} du_2 \cdots \int_0^{t-u_1-u_2-\cdots-u_{m-1}} \\ &\quad \times K(t-u_1-\cdots-u_m) F(u_m) F(u_{m-1}) \cdots F(u_2) F(u_1) du_m.\end{aligned}$$

まず、

$$|\text{Tr} R_2(t)| \leq C(\epsilon) t^{-\epsilon} \quad (\epsilon > 0),$$

$$\text{Tr} R_{n+1}(t) = C^n \Gamma(1 + n/2)^{-1} t^{n/2}.$$

そして、たいへんな（しかし parity から得られる対称性を上手に統制しながら）計算を実行することで、ようやく

- 十分小さな $t > 0$ にたいして

$$\begin{aligned} \text{Tr}K(t) &= \text{Tr}[K_1(t) + K_2(t) + \cdots + K_n(t) + R_{n+1}(t)]. \\ \text{Tr}K_1(t) &\sim \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} t^{-1} \\ \text{Tr}K_2(t) &\sim c_{2,1}t + c_{2,3}t^3 + c_{2,5}t^5 + c_{2,7}t^7 + c_{2,9}t^9 + \cdots \\ \text{Tr}K_3(t) &\sim c_{3,1}t + c_{3,3}t^3 + c_{3,5}t^5 + c_{3,7}t^7 + c_{3,9}t^9 + \cdots \\ \text{Tr}K_4(t) &\sim c_{4,3}t^3 + c_{4,5}t^5 + c_{4,7}t^7 + c_{4,9}t^9 + \cdots \\ \text{Tr}K_5(t) &\sim c_{5,3}t^3 + c_{5,5}t^5 + c_{5,7}t^7 + c_{5,9}t^9 + \cdots \\ \text{Tr}K_6(t) &\sim c_{6,5}t^5 + c_{6,7}t^7 + c_{6,9}t^9 + \cdots \\ &\dots \end{aligned}$$

このパターンが続くことが示される。すなわち、**上三角型 & 偶数幂がない!** したがって、Mellin 変換による表示により、定理 1 が得られる。

問題 B: 偶数べきが現れないこと（これは、ゼータが非正の偶数点で零点を持つことを意味する）が、あらかじめ示せないだろうか。

問題 C: リーマンゼータ $\zeta(s)$ の場合には、上に対応する $\text{Tr}K(t)$ の漸近展開は、じっさいには $|t| < 2\pi$ で有効なテーラー展開である。今の場合はどうであろうか？もしこれが正しいとすると、Riemann が $\zeta(s)$ の場合に 1859 年 (= $11 \cdot 13^2 = \text{イイ意味!}$) に発見したような、 $\zeta_Q(s)$ の contour 積分表示も得られることになり有り難い。

- 参考: $Q = Q_{(\sqrt{2}, \sqrt{2})}$ のとき $\text{Tr}K(t) = (\sinh \frac{t}{2})^{-1}$ である。

3 スペクトルゼータ関数の特殊値

2以上の整数 n に対して $\zeta_Q(n)$ の値を研究することが目的である。たとえば、 α/β が有理数のときとそうでないということなどが、特殊値の性質に反映されるだろうか。ここでは、とくに [IW:KJM] に沿って $\zeta_Q(2)$ と $\zeta_Q(3)$ の値について述べる。

§1 $\zeta_Q(2)$:

まず始めに、

定理 3: $a = \gamma(1 - \gamma^2)^{-1/2}$, $\gamma = (\alpha\beta)^{-1/2}$ と置く.

$$\zeta_Q(2) = \frac{(\alpha^{-1} + \beta^{-1})^2}{2(1 - \gamma^2)} (2^2 - 1)\zeta(2) \\ + \frac{(\alpha^{-1} - \beta^{-1})^2}{2(1 - \gamma^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty F(t, s; a) dt ds,$$

ただし、

$$F(t, s; a) = \frac{e^{-(t+s)/2}}{\sqrt{(1 - e^{-(t+s)})^2 + a^2(1 - e^{-2t})(1 - e^{-2s})}}.$$

注意: 定理の二重積分は、第 1 種完全楕円積分 $cn^{-1}(0)$ の単積分でかける。

• $F(t, s; a)$ の a^2 についての Taylor 展開から、

$$J_n := \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t+s}{2}} (1 - e^{-2t})^n (1 - e^{-2s})^n}{(1 - e^{-(t+s)})^{2n+1}} dt ds$$

とおくと

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(t, s; a) dt ds = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} J_n$$

と表示できる。

補題 4: J_n は次の漸化式を満たす:

$$4n^2 J_n - (8n^2 - 8n + 3)J_{n-1} + 4(n-1)^2 J_{n-2} = 0,$$

$$J_0 = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}, J_1 = \frac{9}{4}\zeta(2) = \frac{3\pi^2}{8}. \text{ とくに}$$

$$J_n \in \mathbb{Q}\pi^2.$$

• 微分作用素 D を次で定める:

$$D := z(1-z)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (1-3z)(1-z) \frac{dw}{dz} + \left(z - \frac{3}{4}\right).$$

定理 5: $w(z) := \sum_{n=0}^\infty J_n z^n$ は単合流型の Heun 微分方程式⁵

$$Dw(z) = 0, \quad (w(0) = 3\zeta(2), w'(0) = \frac{9}{4}\zeta(2))$$

⁵たとえば S.Yu Slavyanov-W.Lay, "Special Functions — A Unified Theory Based on Singularities", Oxford Univ. Press 2000 などを参照.

を満たす $|z| < 1$ での正則解 (unique) である。

• 上述の $\zeta_Q(2)$ の表示を用いると、 $\zeta_Q(2)$ は $w(z)$ を用いた積分で書けるが (後述の系 9 にある $\zeta_Q(3)$ の表示にあたる式)、その後 H. Ochiai ⁶ は、さらにそれが第一種完全楕円積分で表示できることを示した：それは上の Heun DE が、変数変換によって本質的に Gauss の超幾何微分方程式に書き直すことができるという発見と、その解の表示式

$$w(z) = \frac{J_0}{1-z} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{z}{z-1}\right) \quad (J_0 = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}),$$

そして、きわめて特殊なパラメータの時のみに成立する超幾何関数 ${}_3F_2$ と $({}_2F_1)^2$ の間の関係式 (Clausen 等式) によってなされる。

§2 $\zeta_Q(3)$:

定理 6:

$$\zeta_Q(3) = \frac{\alpha^{-1} + \beta^{-1}}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \left[\frac{(\alpha^{-1} + \beta^{-1})^2}{4} (2^3 - 1)\zeta(3) + \frac{3(\alpha^{-1} - \beta^{-1})^2}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty F(t, s, u; a) dt ds du \right].$$

ただし

$$F(t, s, u; a) = \frac{e^{-(t+s+u)/2}}{\sqrt{(1 - e^{-(t+s+u)})^2 + a^2(1 - e^{-2t})(1 - e^{-2(s+u)})}}.$$

また、

$$J_n^1 := \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t+s+u}{2}} (1 - e^{-2t})^n (1 - e^{-2(s+u)})^n}{(1 - e^{-(t+s+u)})^{2n+1}} ds dt du$$

とおくと

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty F(t, s, u; a) dt ds du = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} J_n^1 a^{2n}$$

である。

補題 7: J_n^1 は次の漸化式を満たす:

$$4n^2 J_n - (8n^2 - 8n + 3) J_{n-1} + 4(n-1)^2 J_{n-2} = \frac{2^n (n-1)!}{(2n-1)!!},$$

$J_0^1 = 7\zeta(3)$, $J_1^1 = \frac{21}{4}\zeta(3) + \frac{1}{2}$ 。とくに

$$J_n^1 \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}.$$

⁶A special value of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, Preprint 2004.

定理 8: $v(z) := \sum_{n=0}^{\infty} J_n^1 z^n$ は単合流型・非同次 Heun 方程式

$$Dv(z) = \frac{1}{2} \cdot {}_2F_1\left(1, 1, \frac{3}{2}; z\right),$$

$$(v(0) = 7\zeta(3), v'(0) = \frac{1}{4}(21\zeta(3) + 2))$$

を満たす $|z| < 1$ での正則解 (unique) である。ただし, ${}_2F_1\left(1, 1, \frac{3}{2}; \sin^2 x\right) = \frac{2x}{\sin 2x}$.

系 9: $\alpha\beta > 2$ とする。 $a^2 = \frac{1}{\alpha\beta-1} < r < 1$ のとき

$$\zeta_Q(3) = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \right\}^3 \\ \times \left[7\zeta(3) + \frac{3}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \int_{|z|=r} z^{-1} (1 + a^2 z^{-1})^{-1/2} v(z) dz \right].$$

• $w(z)$ と $v(z)$ の満たす微分方程式の違いは同次であるか非同次であるかのみである。では、この事実は

問題 C: $\zeta_Q(3)$ の $\zeta_Q(2)$ に対する表示を導き得るか? — きわめて難しい問題だと思われる。参考までに述べておくと、L. Euler [Opera Omnia, Ser. 1 Vol. 4, pp.143-144] は

$$\zeta(3) = r (\log 2)^3 + s \zeta(2) \log 2$$

となるような $r, s \in \mathbb{Q}$ が存在すると予想している。もちろん $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ である。

• 上記に現れた Heun DE の解の一般化として、次の積分を考える:

$$w_n(z) := 2^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \frac{1 - \prod_{j=1}^n x_j^2}{(1 - \prod_{j=1}^n x_j^2)^2 - (1 - x_1^4)(1 - \prod_{j=2}^n x_j^4)z}$$

このとき $w(z) = w_2(z), v(z) = w_3(z)$ であり $w_n(0) = (2^n - 1)\zeta(n)$ である。

問題 D: $w_n(z)$ は次のような形の微分方程式を満たすであろうか?

$$\tilde{D}w_n(z) = D_n \times {}_nF_{j_n}(a_n, b_n, c_n, \dots; z).$$

ここで \tilde{D} は、 D あるいはそれに似た微分作用素である。技術的なことに言及すると、 $w_2(z)$ が満たす Heun DE (むしろ、その展開係数 J_n が満たす漸化式) を利用することで、 $w_2(z)$ が非同次項をもつ同じ微分作用素による微分方程式 (その展開係数 J_n^1 が満たす漸化式) を

満たすことが示される。しかしながら、この方法で、 $w_4(z)$ (以降) が満たす微分方程式を求めるのは相当に難しそうである。

• $u(x, y; z) := \frac{1-x^2y^2}{(1-x^2y^2)^2 - (1-x^4)(1-y^4)z}$ とし

$$w(z, t) := \int_0^1 \int_0^1 y^{-t} u(x, y; z) dx dy$$

と定めるとき

補題 10:

$$w_n(z) = \frac{2^n}{(n-2)!} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-2} w(z, t) \Big|_{t=0}$$

が判る (Ichinose-W., 2004)。

• $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^1 z^n$ は次の 4 階の同次微分方程式を満たす⁷。

$$L := 8z^2(1-z)^3 \partial_z^3 - 4z(1-z)^2(14z-5) \partial_z^2 + 2(1-z)(40z^2 - 29z + 2) \partial_z - 16z^2 + 18z - 3$$

とおくとき、

$$Lv(z) = 2 \quad \text{or} \quad \partial_z Lv(z) = 0.$$

じっさい、 L は以下のように分解される：

$$L = 8BD.$$

ここで $B := z(1-z)\partial_z + \frac{1}{2} - z$ であり、定理 8 の Heun の方程式の非同次項を与えていた $\varphi(z) = \frac{1}{2} {}_2F_1(1, 1, 3/2; z)$ に対し $B\varphi(z) = \frac{1}{4}$ となる。

§3 J_n と J_n^1 の明示公式

• 前述の H. Ochiai が得た $w_2(z)$ の超幾何関数による表示から、次の J_n の明示公式を得ることは容易である：

$$J_n = 3\zeta(2) \sum_{j=0}^n (-1)^j 2^{-4j} \binom{2j}{j}^2 \binom{n}{j}.$$

• J_n^1 に対して上記のような表示を得るためには、原点での級数解 $w_3(z)$ を求めればよい。これはじっさいに求めることができ (脚注 7)

⁷K.Kimoto-W., Apéry-like numbers arising from special values of the spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators, Preprint 2005.

定理 11: 定理 8 で述べた非同次 Heun 方程式の解 $\tilde{v}(z)$ であって、 $\tilde{v}(0) = 0$, $\tilde{v}'(0) = \frac{1}{2}$ となる解は

$$\tilde{v}(z) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j 2^{-4j} \binom{2j}{j}^2 \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{2^{4k}}{(2k+1)^3} \binom{2k}{k}^{-2} \right) z^n$$

で与えられる。

• $w_3(z) = \frac{7\zeta(3)}{3\zeta(2)} w_2(z) + \tilde{v}(z)$ である。以上の表示を利用することで、 J_n および J_n^1 は Apéry 数と呼ばれる $\zeta(2)$ や $\zeta(3)$ の無理数性を証明 (1978 年, Astérisque 61 1979。直後の F. Beukers, Bull. London. Math. Soc. 11 1979 も参照⁸⁾) する際に R. Apéry が用いた数列と酷似した合同関係式 (Beukers, J. Number Theo. 25 1987 などを参照) を満たしていることが証明できる (脚注 7)。

§4 基本的問題に対するまとめと問題点:

(1) $\zeta_Q(s)$ は全平面で有理型: Bernoulli 数 B_n の類似である $C_{Q,n}$ の決定は? また、 $\zeta(s)$ の正の偶数点での値が B_n で表示できる事実の類似が追えるだろうか?

(2) Weyl's law: 剰余項の評価は? $\zeta_Q(s)$ の zero-free region に関係するはずである。

(3) $\zeta_Q(s)$ の零点、極の位置: zero-free region について、たとえば $\zeta_Q(s) \neq 0$ ($\text{Re } s > 1$) などが成立するだろうか?; Lieb-Thirring の不等式が複素冪に対しても成立しないであろうか? (IW の疑問)。もし、何らかの条件下の複素冪で成立すれば、よい zero-free region の記述ができるだろう [IW:CMP, §2 Remark 4]。

(4) 正整数点における特殊値: 非同次 Heun 方程式の解からの特殊値の記述。解の代数幾何的な積分表示は?

(5) 上記 (1) に関連して: 関数等式; 上記の特殊値と $C_{Q,j}$ との関係は? また RH の類似については、固有関数の Mellin 変換に対する局所 RH を考え探るべきかもしれない (D. Bump et al, Math.Z. 233 2000 などを参照。)

• Hurwitz 型のスペクトルゼータ関数

$$\zeta_Q(s, x) := \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + x)^{-s}$$

⁸⁾この Beukers によるすっきりとした証明は、Andrews-Askey-Roy, "Special Functions", Encyclopedia Math. Appli. 71, Cambridge Univ. Press, 1999 などでも採録されている。

の解析接続を行い $s = 0$ で正則⁹であることを確認し、次のゼータ正規化積を計算せよ：

$$\prod_{n=0}^{\infty} (\lambda_n + x) := \exp \left[- \frac{\partial}{\partial s} \zeta_Q(s, x) \Big|_{s=0} \right].$$

ゼータ正規化積の一般論から、 $\det(Q + x) := \prod_{n=0}^{\infty} (\lambda_n + x)$ の零点は $x = -\lambda_n$ で与えられることが判る [A.Voros, Commun. Math. Phys. 110 1987, Kimoto-W., IMRN 17 2004]。したがってこの行列式 $\det(Q + x)$ が求まれば、スペクトルがすべて判ることになる。なお、 $\det(Q + x)$ に関数等式 (ladder relation) があることとなれば、それは、おおよそ (調和振動子のときのような) 生成消滅演算子の存在を示唆することになるだろう。

そこでまず、特別な場合として

問題 E: とくに、 $\zeta_Q(0)$ を計算し c_{-1} と比較せよ。 ($s \leftrightarrow 1-s$ の間の関係を探る。)

● 参考：ガンマ関数に関する Lerch の公式 (1894 年, Rozprawy Českę Akad. 3)：

$$\prod_{n=0}^{\infty} (n + s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(s)}.$$

さらに $\det(Q + s)$ は、 $\zeta_Q(s)$ の “ガンマ因子” のようなものかもしれない。ただし、 $\zeta(s)$ の場合、ガンマ因子とは $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$ で与えられる。 $\hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$ とおくと、対称な関数等式 $\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$ を満たす。

● $\zeta(s)$ の奇数点における値の無理数性の研究は、ごく最近になって進展し、 $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ のうち少なくともひとつは無理数であることが証明されている¹⁰。しかし Apéry 以降これまで、Apéry (& Beukers) の方針を踏襲した多くの $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ... の無理数性証明への試みは、重要な副産物はあるものの、ことごとく退けられてきた。その意味で、 $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性が同じ方法で示されるという事実は、未だ一種の miracle である。われわれの $\zeta_Q(s)$ について言えば、[IW:KJM] にあるように、 $w_3(z)$ が満たす微分方程式が、 $w_2(z)$ が満たす微分方程式を求める延長線上で求められる (だから同じ Heun 微分作用素が現れた)。つまり $\zeta_Q(2)$ と $\zeta_Q(3)$ に関係するそれぞれの積分が親戚筋にある。ところが、[問題 D] の直後に述べたように、 $n \geq 4$ では同じ方法が通用しない。この “2 と 3 だけは相棒” という現象の背後にある理由を知ることは、そんな意味でも面白い。□

⁹ おそらくそうであるし、たとえ $s = 0$ が極であっても、以下に述べることに変わりはない [N.Kurokawa-W., The Ramanujan J. (to appear) を参照.]

¹⁰ W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, J. Théor. Nombres Bordeaux 16 2004 およびその引用文献中の T. Rivoal の論文も参照。

交わっているかどうかは不明。

