数理解析研究所講究録
1479 巻 2006 年 87-102

摩擦項を持つ波動方程式の二次元逆散乱問題

北海道大学　渡辺道之（COE 研究員）
Michiyuki Watanabe (COE Researcher)
Hokkaido University

1　問題と結果

次の波動方程式

$$w_{tt}-\Delta w+b(x)w_t=0, \qquad (x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R} \tag{1.1}$$

において，$b(x)w_t$ の項は $b\geq 0$ のとき摩擦を表す．以下，$b(x)$ は次を満たすものとして話を進める．

$$\begin{cases} b(x)\geq 0 \text{ (or } b(x)\leq 0), \\ \operatorname{supp} b(x)\subset B_R:=\{x\in\mathbf{R}^n\ ;\ |x|<R\}. \end{cases} \tag{1.2}$$

考える問題は，摩擦効果によって乱された波の振幅を観測し，そのデータからどのような摩擦が働いているかを，つまり $b(x)$ を決定したい．

定式化にはいろいろあるが，(例えば逆境界値問題 [14]，[15], [16] を参照のこと.）ここでは逆散乱問題を考える．摩擦項を持つ波動方程式の散乱問題及び逆散乱問題に関してはいくつか結果がある．望月 [8] は 3 次元以上の場合で，小さい摩擦 $b(x)$ に対して波動方程式(1.1) の散乱振幅を構成し，さらにその散乱振幅から摩擦項 $b(x)$ を再構成できることを示している．一方で，2 次元の場合は中澤（[17], [18]）がやはり小さい摩擦に対して波動方程式(1.1) の散乱問題を解いている．しかし，2 次元での逆散乱問題については何の結果も無かった．そこで，私が目標とするのは 2 次元での逆問題，つまり $b(x)$ を再構成することにある．

まず問題を設定する．(1.1) の定常問題を考える．$w(x,t)=e^{i\sqrt{E}t}u(x)$ を代入すると，$u(x)$ は次のようなエネルギーに依存した複素数値ポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式をみたす．

$$-\Delta u(x)+i\sqrt{E}b(x)u(x)=Eu(x), \qquad x\in\mathbf{R}^2. \tag{1.3}$$

これを満たす解は無数にあるが，その中で今興味があるのは散乱現象を表すもので，それは次のように記述される．

$$u(x) = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{1/2}}A(E,\theta,\omega) + o(r^{-1/2}), \qquad r = |x| \to \infty. \tag{1.4}$$

左辺第1項は ω 方向から入射する平面波を，第2項は θ 方向に散乱される球面波を表している．$A(E,\theta,\omega)$ を散乱振幅という．考える問題は，

(*) $A(E,\theta,\omega)$ から $b(x)$ を決定せよ．($E>0$ は固定)

である．

> 注意 *1.* この問題は3次元と2次元とでは問題の構造が異なることを注意しておく．3次元の場合，散乱振幅 $A(E,\theta,\omega)$ は E を固定しているので ω, $\theta\in S^1$ の4変数の関数であり，求めたい関数 $b(x)$ は3変数である．一方で，2次元の場合は散乱振幅は2変数であり，また求めたい関数 $b(x)$ も2変数である．この問題構造の違いから2次元逆問題は3次元の場合とは違った困難さがある．

今回得られた結果は簡単に言うと**低周波数の場合（E が小さい場合）は問題 (*) は一意的に解ける**である．以下，得られた定理を述べる．まず，逆問題を考える前に順問題，すなわち方程式(1.3), (1.4) を満たす解がただ1つ存在することを示す必要がある．$L^{2,s}$ を重みつき L^2 空間

$$u \in L^{2,s} \iff \|(1+|x|^s)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} < \infty, \qquad s\in\mathbf{R}$$

とする．

定理 1.1. 十分小さい $E>0$ に対して，(1.3), (1.4) を満たす解 $u\in L^{2,-s}$, $s>1/2$ がただ1つ存在する．さらに散乱振幅は次のように表現される．

$$A(E,\theta,\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x} i\sqrt{E}b(x)u(x)dx.$$

逆問題の定理を述べる．実数 p に対し，$W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ を一回微分までが $L^p(\mathbf{R}^n)$ である Sobolev 空間とする．$b(x)$ は仮定(1.2) を満たし，さらに

$$\|b\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^2)} \le M, \qquad p>2, \quad j=1,2$$

を満たすとする．ここで $M>0$ は定数である．

定理 1.2. 次を満たすような p, M, R に依存する正の数 $N = N(p, M, R)$ が存在する．もし全ての方向 θ, $\omega \in S^1$ に対して

$$A_1(E, \theta, \omega) = A_2(E, \theta, \omega)$$

が 1 つの固定した $E < N$ に対して成り立つならば $\mathbf{R}^2$ において

$$b_1 = b_2$$

である．

2 証明概略

定理 1.1 の証明

次の作用素が十分小さい $E > 0$ に対して $L^{2,s}$ から $L^{2,-s}$ への有界作用素として定義されることが本質的に重要である．

$$R(E + i0) = (I + i\sqrt{E}R_0(E + i0)b)^{-1}R_0(E + i0). \tag{2.1}$$

ここで，$R_0(E + i0) = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\Delta - (E + i\varepsilon))^{-1}$ であり，この極限は $\mathcal{B}(L^{2,s}, L^{2,-s})$, $s > 1/2$ で存在することはよく知られている．また，2 次元の場合は，$R_0(E + i0)f(x)$ は Hankel 関数を用いて次のように表示される．

$$R_0(E + i0)f(x) = \int_{\mathbf{R}^2} G_0(x - y)f(y)dy, \tag{2.2}$$

$$G_0(x) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{E}|x|). \tag{2.3}$$

Hankel 関数の漸近展開公式を用いると，

$$G_0(x) \sim \begin{cases} -\dfrac{i}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{E}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi|x|}}e^{i(\sqrt{E}|x| - \pi/4)}, & |x| \to \infty, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log(\sqrt{E}|x|), & |x| \to 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

であることがわかる．このことから十分小さい $E > 0$ に対しては $\|\sqrt{E}R_0(E + i0)b\|_{\mathcal{B}(L^{2,-s})} < 1$ となり，Neumann 級数が収束することから $R(E + i0)$ が(2.1) の形で定義できることがわかる．

$$u(x) = e^{i\sqrt{E}\omega \cdot x} - i\sqrt{E}(R(E + i0)be^{e\sqrt{E}\omega \cdot})(x)$$

とおくと $u(x)$ は(1.3) を満たし，さらに(2.1) から得られるレゾルベント方程式

$$R(E+i0)=R_0(E+i0)-i\sqrt{E}R_0(E+i0)bR(E+i0) \tag{2.5}$$

と，Hankel 関数の漸近展開公式(2.4) から $u(x)$ は(1.4) を満たすこともわかる．

定理 1.2 の証明

証明の第一段階は逆散乱問題を逆境界値問題に帰着させることである．つまり，散乱振幅から Dirichlet-Neumann（D-N）写像を一意的に決定できることを示す．そこでまず D-N 写像を定義する．以下，$\Omega=B_R$, $\Omega^e=\mathbf{R}^2\setminus\bar{B}_R$，$\alpha=(p-2)/p$ と書くことにする．Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+i\sqrt{E}b(x)u(x)=Eu(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x)=f(x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

を考える．$q_E(x)=i\sqrt{E}b(x)-E$ とおく．まず 0 はすべての $E>0$ に対して Ω における $-\Delta+q_E$ の Dirichlet 固有値ではないことを注意しておく．$-\Delta u+q_E(x)u=0$ の両辺に $\bar{u}$ を掛け，Ω 上で積分し Green の公式を用いると

$$\int_\Omega|\nabla u|^2dx+i\sqrt{E}\int_\Omega b(x)|u(x)|^2dx=E\int_\Omega|u(x)|^2dx \tag{2.7}$$

を得る．$b(x)\geq 0$ であることから，左辺第二項は 0 でなければならない．従って $u\equiv 0$ がわかる．

$b\in L^p(\Omega), p>2$ とし，$f\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ とする．このとき十分小さい $E>0$ に対し，境界値問題(2.6) の解 $u\in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ が唯一つ存在する．この解 $u(x)$ に対し D-N 写像 $\Lambda_b: C^{1,\alpha}(\partial\Omega)\to C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ を

$$\Lambda_b f=\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}$$

で定義する．ここで ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．

実数値ポテンシャルの場合は，散乱振幅から D-N 写像を一意的に決定できることはよく知られている（[5], [11], [13] を参照のこと）．複素数値ポテンシャルの場合でも，$E>0$ が十分小さくまた，$b(x)$ のサポートがコンパクト，と制限を加えることにより Nachmann の方法が適用できる．

定理 2.1. $b_j \in L^p(\mathbf{R}^2)$ とし，$\operatorname{supp} b_j \subset \Omega$, $j = 1, 2$ と仮定する．もしすべての方向 $\omega, \theta \in S^1$ に対し

$$A_1(E, \theta, \omega) = A_2(E, \theta, \omega)$$

が十分小さい固定された $E > 0$ に対して成り立つならば

$$\Lambda_{b_1} = \Lambda_{b_2}$$

が成り立つ．

以下，概要を述べる．D-N 写像 Λ_b を散乱振幅 $A(E, \theta, \omega)$ を用いて表現するには二つの作用素が本質的に重要な役割を果たす．Single layer operator S_E と Far field operator F_E である．まず S_E から Λ_b が求まることを見てみよう．

2.1 S_E と Λ_b

外部 D-N 写像を

$$\Lambda^e f = \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\Omega}$$

で定義する．ここで w は次の外部 Dirichlet 問題の outgoing solution である．

$$\begin{cases} (\Delta + E)w = 0 & \text{in } \Omega^e, \\ w(x) = f(x) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

S_E を $\partial\Omega$ 上の single layer operator とする．

$$S_E f(x) = \int_{\partial\Omega} G_E(x, y) f(y) dy.$$

ここで $G_E(x, y)$ は $R(E + i0)$ の積分核である Green 関数である．レゾルベント方程式(2.5) から $R(E + i0)$ の $x = y$ での singularity は $R_0(E + i0)$ と同じであり，また，$R_0(E + i0)$ は Hankel 関数で表現できることからその singularity は $-\Delta$ の基本解，つまり $\dfrac{1}{2\pi} \log |x - y|$ に等しいことがわかる．このことから古典的なポテンシャル論により S_E は $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ から $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ へ有界作用素であることがわかり，また二重層ポテンシャルの

飛び公式も成り立つことがわかる（例えばColton-Kress [2, pp. 51–106] を参照）．さらに，Isakov-Nachman [5] の議論に従えば S_E は可逆であり次の公式が成り立つこともわかる．

補題 2.1.

$$S_E^{-1} = \Lambda_b - \Lambda^e.$$

2.2 $A(E,\theta,\omega)$ と S_E

散乱振幅 $A(E,\theta,\omega)$ から S_E が求まることを見よう．ここで重要な役割を果たすのが Far field operator F_E である．まずこの F_E を用いて散乱振幅を書き換える．Nachman [11] に従い Far field operator $F_E : C^{1,\alpha}(\partial\Omega) \to L^2(S^1)$ を次のように定義する．

$$F_E f(\theta) = w_\infty(\theta).$$

ここで w_∞ は次の外部 Dirichlet 問題の解に対する Far field pattern と呼ばれるものである．

$$\begin{cases} (\Delta + E)w(x) = 0 & \text{in } \Omega^e, \\ w(x) = f(x) & \text{on } \partial\Omega, \\ w(x) = \dfrac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{1/2}} w_\infty(\theta) + o(r^{-1/2}), & r = |x| \to \infty, \theta = x/r. \end{cases} \tag{2.8}$$

$f(x)$ を $f(x) = u(x,\omega,E) - e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}$ ととる．ここで $u(x,\omega,E)$ は(1.3), (1.4) の解である．$\operatorname{supp} b(x) \subset \Omega$ であることから $A(E,\theta,\omega)$ は(2.8) の far field pattern となる．したがって F_E を用いて $A(E,\theta,\omega)$ を次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} -A(E,\omega,\theta) &= [F_E\{u(x,\omega,E) - e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}\}](\theta) \\ &= [F_E u(\cdot,\omega,E)](\theta) - A_\Omega(E,\theta,\omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで $A_\Omega(E,\theta,\omega)$ は境界値を $f(x) = e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}$ とした時の(2.8) の解に対する far field pattern であり，$b(x)$ には依存しない関数である．

$\phi^e(x,\omega,E)$ を $\phi^e(x,\omega,E) - e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}$ が outgoing solution となるような外部 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} (\Delta + E)\phi^e(x,\omega,E) = 0 & \text{in } \Omega^e, \\ \phi^e(x,\omega,E) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解とする．このとき[5]（または[11]）と全く同じ議論により，$u(x,\omega,E)$ の境界上 $\partial\Omega$ での値は

$$u(x,\omega,E)=S_E\left(\frac{\partial\phi^e}{\partial\nu}(\cdot,\omega,E)\right)(x),\qquad \text{on } \partial\Omega \tag{2.10}$$

であることがわかり，以下の等式を得る．

補題 2.2. $A(E)$ と $A_\Omega(E)$ を $C(E)A(E,\omega,\theta)$, $A_\Omega(E,\omega,\theta)$ を核に持つ $L^2(S^1)$ 上の積分作用素とする．このとき

$$A_\Omega(E)-A(E)=F_ES_E\tilde{F}_E$$

が成り立つ．ここで

$$(\tilde{F}_Eg)(x)=\int_{S^1}\frac{\partial\phi^e}{\partial\nu}(x,\omega,E)g(\omega)d\omega$$

である．

補題 2.1 と補題 2.2 により定理 2.1 を得る．

2.3 逆境界値問題

$q_E(x)=i\sqrt{E}b(x)-E$ とおく．E が小さければ $q_E(x)$ も小さくなる．従って十分小さい $E>0$ に対して(2.6) に対する逆境界値問題の Kang-Uhlmann [6] の一意性の結果が適用でき，つぎの定理を得ることができる．

定理 2.2. $b_j(x)\in W^{1,p}(\Omega)$，$p>2$ とし，また $\operatorname{supp} b_j(x)\subset\Omega$, $j=1,2$ とする．

$$\|b_j\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^2)}\le M,\qquad j=1,2$$

と仮定する．このとき $E<N(M,p,R)$ を満たす与えられた $E>0$ に対して，もし

$$\Lambda_{b_1}=\Lambda_{b_2}$$

ならば

$$b_1(x)=b_2(x)\qquad x\in\Omega$$

が成り立つ．

定理 2.1 と定理 2.2 により定理 1.2 が得られる．

3 今後の展望

今回得られた結果は$b(x)$に(1.2)という制限をつけている．これは逆散乱問題を逆境界値問題に帰着させているためである．この条件(1.2)を緩め，さらには$b(x)$を再構成するためには，逆境界値問題に帰着させないで解く方法が考えられる．

Novikov [20] の方法に従えば，$b(x)$が遠方で十分早く減衰していれば$E>0$が十分小さい限り散乱振幅から$b(x)$を再構成できるように思われる．以下その考えを述べようと思う．重要な点は，Faddeev's solution と呼ばれる特殊解が純虚数値ポテンシャルの場合は実数値ポテンシャルの場合と同じ性質を持つことにあるように思われる．

$z=x+iy$に対し$x=z_R=\Re z$, $y=z_I=\Im z$,

$$\partial=\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y),\qquad \bar\partial=\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$$

と書くことにする．これらの記号を用いて，$\mathbf{R}^2$におけるSchrödinger方程式を

$$(-4\partial\bar\partial+V)u(\lambda,z)=Eu(\lambda,z),\quad E>0,\quad \lambda\in\mathbf{C} \tag{3.1}$$

と書き直して考える．次のことは知られている（例えば[4]を参照のこと）．$V(z)$が小さい$C_0>0$に対して

$$|V(z)|\le C_0(1+|z|)^{-2-\varepsilon},\qquad \varepsilon>0$$

を満たすならば，次のような(3.1)の解が唯一つ存在する．

$$u(\lambda,z)=e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar z+\frac{1}{\lambda}z)}v(\lambda,z) \tag{3.2}$$

の形をし，漸近的に

$$v(\lambda,z)\longrightarrow 1,\qquad \text{as } |z|\to\infty. \tag{3.3}$$

を満たす．さらにこの解$u(\lambda,z)$は$|\lambda|\ne 1$に対して，いわゆる$\bar\partial$-方程式を満たす．

$$\frac{\partial u}{\partial\bar\lambda}(\lambda,z)=\begin{cases}T(\lambda)u\left(-\frac{1}{\bar\lambda},z\right), & V\text{ が複素数値の場合},\\ T(\lambda)\overline{u(\lambda,z)}, & V\text{ が実数値の場合}.\end{cases} \tag{3.4}$$

ここで

$$T(\lambda)=\frac{\operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda}-1)}{\bar{\lambda}}S(\lambda) \tag{3.5}$$

であり，$S(\lambda)$ は scattering transform と呼ばれている次の関数である．

$$S(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\bar{\lambda}z+\frac{1}{\lambda}\bar{z})}V(z)u(\lambda,z)dz_R dz_I. \tag{3.6}$$

一般に generalized Cauchy-Riemann 方程式

$$\bar{\partial}u=au+b\bar{u}$$

を満たす関数は generalized analytic function （または pseudo-analytic functions）と呼ばれている．(3.4) の性質から $V(z)$ が実数値の場合は Faddeev's solution $u(\lambda,z)$ は $\lambda\in\mathbf{C}$ に関して generalized analytic function である．この性質が $V(z)$ を再構成するための重要な役割を果たす．複素数値ポテンシャルの場合は(3.4) からもわかるように Generalized analytic function とはならないが，実は純虚数値ポテンシャルの場合は実数値の場合と同様に $\lambda\in\mathbf{C}$ に関して Generalized analytic function となるのである．このことを摩擦項を持つ波動方程式から得られるポテンシャル $V(z)=i\sqrt{E}b(z)$ の場合で見てみる．

定理 3.1. $b(z)$ は実数値関数で

$$|b(z)|\le M(1+|z|)^{-\alpha},\qquad M>0 \tag{3.7}$$

を満たすとする．ここで $\alpha>7/2$ である．$V(z)=i\sqrt{E}b(z)$ とおく．もし $E>0$ が十分小さければ(3.2) と(3.3) を満たす(3.1) の解 $u(\lambda,z)$ が唯一つ存在する．さらに $u(\lambda,z)$ は次の方程式を満たす．

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{\lambda}}(\lambda,z)=T(\lambda)\overline{u(\lambda,z)},\qquad |\lambda|\ne 1. \tag{3.8}$$

ここで $T(\lambda)$ は(3.5) で与えられる関数である．

証明概略

以下証明の概略を述べる．まず，Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$$

を次のように書き換える．

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}e^{-\frac{i}{2}(\bar{k}z+k\bar{z})}f(z)dz_Rdz_I$$

ここで $z=x_1+ix_2, k=\xi_1+i\xi_2$ である．簡単な計算により

$$\widehat{\partial f}(k)=\frac{i}{2}\bar{k}\hat{f}(k),\quad \widehat{\bar{\partial}f}(k)=\frac{i}{2}k\hat{f}(k),\quad \widehat{\partial\bar{\partial}f}(k)=-\frac{1}{4}k\bar{k}\hat{f}(k)$$

がわかる．

(3.2) を(3.1) へ代入すると

$$(P_0(\lambda)+V)v(\lambda,z)=0 \tag{3.9}$$

となる．ここで

$$P_0(\lambda)=-4\partial\bar{\partial}-2i\sqrt{E}\lambda\partial-\frac{2i\sqrt{E}}{\lambda}\bar{\partial}$$

である．

$$P_0(\lambda)\phi(\lambda,z)=f(z)$$

を考える．両辺 Fourier 変換すると

$$(k\bar{k}+\sqrt{E}\lambda\bar{k}+\frac{\sqrt{E}}{\lambda}k)\hat{\phi}(\lambda,k)=\hat{f}(k)$$

となる．Green 関数 $G(\lambda,z)$ を

$$G(\lambda,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{e^{\frac{i}{2}(\bar{k}z+k\bar{z})}}{k\bar{k}+\sqrt{E}\lambda\bar{k}+\frac{\sqrt{E}}{\lambda}k}dk_Rdk_I$$

で，また Green 作用素 $G_0(\lambda)$ を

$$G_0(\lambda)f(z)=\int_{\mathbf{R}^2}G(\lambda,z-k)f(k)dk_Rdk_I$$

で定義すると $\phi(\lambda,z)$ は

$$\phi(\lambda,z)=G_0(\lambda)f(z)$$

と書ける．このように Green 作用素を用いると(3.9) は積分方程式

$$v(\lambda,z)=1-G_0(\lambda)Vv(\lambda,z),\qquad |\lambda|\neq 1 \tag{3.10}$$

に書き換えられる．

Green 関数 $G(\lambda,z)$ は次の性質を持つ．

命題 3.1 ([4], [20]). $|\lambda| \neq 1$ に対して，$G(\lambda, z)$ は次の性質を持つ．

$$|G(\lambda, z)| \leq \frac{C}{\sqrt[4]{E}\sqrt{|z|(|\lambda| + |1/\lambda|)}}, \tag{3.11}$$

$$G\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}\{(\bar{\lambda}+1/\lambda)z+(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z}\}}G(\lambda, z), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{\lambda}}(\lambda, z) = -\frac{\operatorname{sgn}(\bar{\lambda}\lambda - 1)}{4\pi\bar{\lambda}}e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}\{(\bar{\lambda}+1/\lambda)z+(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z}\}}. \tag{3.13}$$

これらの性質を用いて定理3.1を示す．まず積分方程式(3.10)は唯一つの解を持つことを示そう．もし $[I+G_0(\lambda)V]^{-1}$ が有界連続関数の集合（それを $\mathcal{B}^0(\mathbf{R}^2)$ と書くことにする.）上で存在すれば積分方程式の解は次のように構成できる．

$$v(\lambda, z) = [I + G_0(\lambda)V]^{-1}(1).$$

従って $[I + G_0(\lambda)V]$ の可逆性を示せばよい．

$f \in C(\mathbf{C})$ とする．次の評価式

$$\max_{z\in\mathbf{C}} |V(z)f(z)| \leq \sqrt{E}M \max_{z\in\mathbf{C}} |f(z)|,$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} |V(z)f(z)|dz_Rdz_I \leq \sqrt{E}\tilde{M} \max_{z\in\mathbf{C}} |f(z)|$$

から $Vf \in C(\mathbf{C}) \cap L^1(\mathbf{C})$ がわかる．

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{|f(\zeta)|}{\sqrt{|z-\zeta|}}d\zeta_Rd\zeta_I &\leq \left(\int_{|z-\zeta|\geq 1} + \int_{|z-\zeta|\leq 1}\right) \frac{|f(\zeta)|}{\sqrt{|z-\zeta|}}d\zeta_Rd\zeta_I \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^2} |f(z)|dz_Rdz_I + \frac{4\pi}{3}\max_{z\in\mathbf{C}} |f(z)|\end{aligned}$$

と評価式(3.11)から

$$\begin{aligned}|G_0(\lambda)Vf(z)| &\leq \frac{C}{\sqrt[4]{E}\sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|}}\left\{\int_{\mathbf{R}^2} |i\sqrt{E}b(z)f(z)|dz_Rdz_I \right. \\ &\qquad \left. + \frac{4\pi}{3}\max_{z\in\mathbf{C}} |i\sqrt{E}b(z)f(z)|\right\} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{E}\left(\tilde{M} + \frac{4\pi}{3}M\right)\max_{z\in\mathbf{C}} |f(z)|\end{aligned}$$

を得る．もし E が十分小さければ $G_0(\lambda)V$ の作用素ノルムは 1 より小さくなる．従って $I+G_0(\lambda)V$ は有界連続関数の集合上で可逆であることがわかる．

次に $v(\cdot,\lambda)-1\in L^1(\mathbf{C})$ であることをみる．$f\in\mathcal{B}^0(\mathbf{C})$ とする．このとき(3.11) により，

$$\|G_0(\lambda)Vf\|_{L^1(\mathbf{C})}\le C\max_{z\in\mathbf{C}}|f(z)|\int_{\mathbf{R}^2}Kg(x)dx$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}&Kg(x)=\int_{\mathbf{R}^2}K(x,y)g(y)dy,\\&K(x,y)=|x-y|^{-1/2}|y|^{-3/2},\qquad g(y)=(1+|y|)^{-(\alpha-3/2)}\end{aligned}$$

である．$\alpha>7/2$ とすると $g\in L^1(\mathbf{R}^2)$ となる．K は $L^1(\mathbf{R}^2)$ 上の有界作用素となることから ([19, Lemma 2.1] を参照のこと)，$G_0(\lambda)Vf\in L^1(\mathbf{C})$ がわかる．従って(3.3) を得る．

(3.8) 式を示そう．公式(3.13) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial\bar\lambda}(\lambda,z)&=-\frac{\partial G_0(\lambda)Vv}{\partial\bar\lambda}(\lambda,z)\\&=-\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\partial G}{\partial\bar\lambda}(\lambda,z-z')V(z')v(\lambda,z')dz_Rdz_I\\&\qquad\qquad-\left[G_0(\lambda)(V\frac{\partial v}{\partial\bar\lambda})\right](\lambda,z)\\&=T(\lambda)\tilde e(z,\lambda)-\left[G_0(\lambda)(V\frac{\partial v}{\partial\bar\lambda})\right](\lambda,z)\end{aligned}\tag{3.14}$$

がわかる．ここで $\tilde e(z,\lambda)=e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}\{(\bar\lambda+1/\lambda)z+(\lambda+1/\bar\lambda)\bar z\}}$ とおいた．さらに公式(3.12) により次を得る．

$$\begin{aligned}v\left(-\frac{1}{\bar\lambda},z\right)&=1-\left[G_0\left(-\frac{1}{\bar\lambda}\right)(Vv)\right]\left(-\frac{1}{\bar\lambda},z\right)\\&=1-\tilde e(-z,\lambda)[G_0(\lambda)(V\tilde v)](\lambda,z).\end{aligned}$$

ここで

$$\tilde v(\lambda,z)=\tilde e(z,\lambda)v\left(-\frac{1}{\bar\lambda},z\right)$$

である．簡単な計算により $\tilde{v}$ は積分方程式

$$\tilde{v}(\lambda, z) = \tilde{e}(z, \lambda) - [G_0(\lambda)(V\tilde{v})](\lambda, z)$$

を満たすことがわかる．$T(\lambda)$ は z に依らない λ だけの関数であることに注意し，両辺に $T(\lambda)$ を作用させると

$$T(\lambda)\tilde{v}(\lambda, z) = T(\lambda)\tilde{e}(z, \lambda) - \Big[G_0(\lambda)(VT(\lambda)\tilde{v})\Big](\lambda, z)$$

となる．この積分方程式は唯一つの解を持つ．従って方程式(3.14) の両辺を比較すると

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{\lambda}}(\lambda, z) = T(\lambda)\tilde{v}(\lambda, z)$$

がわかる．さらに

$$\tilde{v}(\lambda, z) = u\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial v}{\partial \bar{\lambda}}$$

であるから

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\lambda}}(\lambda, z) = T(\lambda)u\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right)$$

を得る．さて，

$$u\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = \overline{u(\lambda, z)}$$

が成り立つことを示そう．$V(z) = i\sqrt{E}b(z)$ であることから(3.2) により

$$u(\lambda, z) = \grave{e}_\lambda(z) - i\sqrt{E}\grave{e}_\lambda(z)(G_0(\lambda)b\grave{e}_\lambda u)(\lambda, z) \tag{3.15}$$

がわかる．ここで $\grave{e}_\lambda(z) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}z + \lambda\bar{z}\right)}$ である．$b(x)$ は実数値関数であることから(3.12) により

$$\overline{u\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right)} = \grave{e}_\lambda(z) + i\sqrt{E}\grave{e}_\lambda(z)\Big[G_0(\lambda)b\grave{e}_{-\lambda}\overline{u\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, \cdot\right)}\Big](z) \tag{3.16}$$

がわかる．$w(\lambda, z) = u(\lambda, z) - \overline{u(-1/\bar{\lambda}, z)}$ とおくと(3.15) と(3.16) から $w(\lambda, z)$ は

$$w(\lambda, z) = -i\sqrt{E}\grave{e}_\lambda(z)[G_0(\lambda)b\grave{e}_{-\lambda}w](\lambda, z)$$

を満たすことがわかる．従って

$$\Big[[I+i\sqrt{E}G_0(\lambda)b](\grave{e}_{-\lambda}w)\Big](\lambda,z)=0$$

を得る．$[I+i\sqrt{E}G_0(\lambda)b]$ が可逆であることから $w(\lambda,z)=0$ を得る．このようにして定理 3.1 が証明される．

定理 3.1 を利用し Grinevich [4]，Novikov [20] らの議論を応用することで，散乱振幅から $b(x)$ を再構成することができるのではないか？今後の研究課題である．

参考文献

[1] R. Brown and G. Uhlmann, Uniqueness in the conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions, *Comm. in PDE.* **22** (1997), 1009-1027.

[2] D. Colton and R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, Wiley, New York (1983).

[3] E. Francini, Recovering a complex coefficient in a planar domain from the Dirichlet-to-Neumann map, *Inverse Problems.* **16** (2000), 107-119.

[4] Grinevich P G 2000 Scattering transformation at fixed non-zero energy for the two-dimensional Schrödinger operator with potential decaying at infinity, *Russian Math. Surveys.* **55** 1015-1083.

[5] V. Isakov and A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional semilinear elliptic inverse problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3375-3390.

[6] H. Kang and G. Uhlmann, Inverse problems for the Pauli Hamiltonian in two dimensions, *J. Fourier Anal. Appl.* **10** (2004), 201-215.

[7] H. Kang, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* **270** (2002), 291-302.

[8] K. Mochizuki, Inverse scattering for a small nonselfadjoint perturbation of the wave equation, Analysis and Applications, Edited by H.G.W.Berger, R.P.Gilbert and M.W.Wong, Kluwer Academic Publishers, 2003, 303-316.

[9] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative term, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **12** (1976), 383-390.

[10] K. Mochizuki, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator with a complex potential and the scattering inverse problem, *Proc. Japan. Acad.* **43** (1967), 638-643.

[11] A. Nachman, Inverse scattering at fixed energy, *Proc. 10th International Congress on Math Phys.* Leipzig 1991, edited by K. Schmüdgen, Springer-Verlag, 1992, pp. 434-441.

[12] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **143** (1996), 71-96.

[13] A. Nachman, Reconstructions from boundary measurements, *Annals of Math.* **128** (1988), 531-576.

[14] S. Nakamura, Uniqueness for an inverse problem for the wave equation in the half space, *Tokyo J. Math* **19** (1996) No. 1, 187-195.

[15] S. Nakamura, Uniqueness for an inverse hyperbolic problem, *Japan. J. Math* **22** (1996) No. 2, 257-261.

[16] S. Nakamura, Uniqueness and stability estimates for inverse problems for the wave equation, *Adv. Math. Sci. Appl* **6** (1996) No. 2, 631-640.

[17] H. Nakazawa, The principle of limiting absorption for the nonselfadjoint Schrödinger operator with energy dependent potential, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), 519-536.

[18] H. Nakazawa, Scattering theory for nonconservative wave equations in $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, preprint (2000).

[19] Nirenberg L and Walker H F 1973 The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbf{R}^n$, *J. Math. Anal. Appl.* **42** 271-301.

[20] Novikov R G 1992 The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator, *J.Funct.Anal.* **103** 409-463.

[21] E.C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Vol. 2. Oxford, at the Clarendon Press 1958.

[22] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge, England; The Macmillan Company, New York, 1944.