

円筒内に励起される非線形共鳴波のふるまいと 音場の幾何学的性質

北大・工 栗原 央流 (Eru Kurihara)

北大・工 矢野 猛 (Takeru Yano)

Graduate School of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

近年、航空機のエンジンや発電所のガスタービンなどの高性能化・高効率化が進む中で、安定した燃焼の実現や騒音の低減の観点からこのような複雑な形状をもった系における音場(圧力場)のふるまいの解析が望まれている。ガスタービン燃焼機内の乱流燃焼場のような複雑な系に対する解析を行なうためには、平面波や球面波、円筒波といった基礎的な音場のふるまいを知ることが必要不可欠である。閉じた管内に励起される平面音波の共鳴現象やそれに付随する衝撃波の形成、音響流の発生などの現象は、非線形音響学における重要な研究テーマとして古くから研究がなされている(たとえば、参考文献 [1] や [2] など)。その一方で、円筒音波や球面音波の非線形共鳴現象については、その問題の重要性にもかかわらず、いまだ十分な研究がなされているとはいえない。

円筒内や球殻内に励起される共鳴音波のふるまいに見られる平面音波の共鳴現象との相違は波面の収束による振幅の局所的な増大のみに留まらず、多くの特徴的な現象が現れる。例えば、円筒波や球面波の共鳴現象においては、粘性による散逸を考慮しない場合でも音源の振幅が十分に小さいならば衝撃波が形成されないこと、そのとき共鳴波の振幅は音源の音響 Mach 数 M の $1/3$ 乗に比例することが知られている^{3,4}。このことは平面音波の共鳴現象では、散逸を考慮しない場合必ず衝撃波が形成されること、そのときの振幅は M の $1/2$ 乗程度であること²とは極めて対照的である。また、著者らの研究により、円筒波の共鳴現象において衝撃波が形成されないケースでは共鳴波の振幅がゆっくりとした周期的な変調を行なうことが数値的に示された⁵。

円筒波の共鳴現象では、平面波のそれと比較してより大きな振幅の音場を得られる可能性があるという点から熱音響エンジンなどへの応用が期待される一方で、共鳴音波の工学的な応用を考える場合、共鳴波の振幅が大きく変動することは装置・機器の不具合や破壊にもつながることからこれを抑制する方法を考える必要がある。そこで、本研究では多重尺度法を用いて同軸円筒内の気体中に励起される共鳴円筒波の弱い散逸を含む弱非線形問題に対する解析を行ない、振幅の変調を伴う共鳴波のふるまいをあきらかにする。また、外側の円筒と内側の円柱の中心軸が異なっている偏心円筒内に励起される共鳴波の非線形発展について、線形解と非線形問題に対する数値シミュレーションの結果を比較し、そこに現れる現象の特徴をあきらかにする。

2 問題の定式化

図1に示すように、軸方向に無限の長さをもつ平均半径 r_b の円筒(以後、外部円筒とよぶ)とその内側に半径 $r_a (< r_b)$ の剛体円柱(以後、内部円柱とよぶ)があり、ふたつの円筒の間の環状領域に理想気体が満たされているものとする。外部円筒の中心軸を O 、内部円柱の中心軸を O' とし、ふたつの軸は x 方向に δ^* だけ離れている。ここで、“*”のついた量はそれが有次元の量であることを示す。外部円筒の半径 r^* が $r^* = r_b$ を中心に振幅 a^* 、角振動数 ω^* で変動(脈動)することによって円筒内に音波を放射する。音源である外部円筒の脈動の振動数 ω^* がある値に近付くとき、円筒内に励起される音波の振幅は a^* が十分に小さかったとしても極め

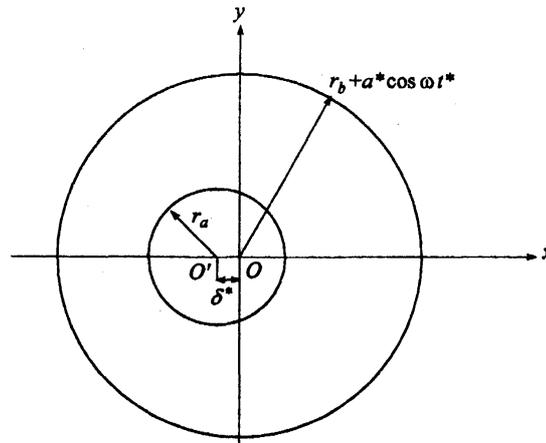


図 1: 二重円筒の概念図

て大きく成長することがある。この現象を共鳴と呼び、そのときの振動数を共鳴振動数とよぶ。具体的な共鳴の条件は次節以降で示される。本報告では、はじめに $\delta^* = 0$ の同軸円筒についての解析を行ない、4 節において $\delta^* \neq 0$ の場合についての数値解析の結果を示す。

ここで、以下の無次元変数を定義する。

$$r = \frac{\omega^* r^*}{c_0}, \quad t = \omega^* t^*, \quad u_r = \frac{u_r^*}{c_0}, \quad \Phi = \frac{\omega^* \Phi^*}{c_0^2} \quad (1)$$

r^* は中心軸 O からの距離 (動径), t^* は時刻, u_r^* は動径方向の流速, Φ^* は速度ポテンシャルであり, c_0 は初期の静止一様状態における音速である。

続いて、円筒内に励起される共鳴波のふるまいを特徴づけるいくつかの重要な無次元パラメータを導入する。第 1 のパラメータは音響 Mach 数 M であり、次のように定義される。

$$M \equiv \frac{a^* \omega^*}{c_0} = \epsilon^3 \ll 1 \quad (2)$$

M は音源 (外部円筒) から放射された音波の非線形性の強さを表すパラメータである。共鳴現象においては、音源の振幅と比較して極めて大きな振幅の音波が励起される。このため、音波の共鳴現象では、 $M \ll 1$ であってもさまざまな非線形現象が現れる。

第 2 のパラメータは内部円柱と外部円筒の半径の比 α で、

$$\alpha \equiv \frac{r_a}{r_b} \quad (3)$$

と定義される。 α は音場の幾何学的な形状を示すパラメータであり、 α を変化させることにより、平面波から (内部に円柱が存在しないような) 単純な円筒波の共鳴問題までをひとつの枠組のなかで取り扱うことができる。具体的には、本研究で扱う問題は $\alpha \rightarrow 0$ の極限で単純な円筒波の問題に帰着し、 $\alpha \rightarrow 1$ の極限で平面波の共鳴問題に帰着する。

第 3 のパラメータは Reynolds 数 Re は以下のように定義される。

$$Re \equiv \frac{c_0^2}{\delta \omega} \quad (4)$$

ここで、 δ は音の拡散率と呼ばれ、

$$\delta = \nu \left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\mu} + \frac{(\gamma-1)}{Pr} \right] \quad (5)$$

と表される。ただし、 μ は粘性係数、 ζ は体積粘性率、 $\nu = \mu/\rho_0$ は動粘性係数、 $Pr = \mu c_p/\kappa$ (c_p は定圧比熱、 κ は熱伝導率) はプラントル数であり、いずれも定数であるとする。

レイノルズ数 Re は、後述する速度ポテンシャルに関する弱非線形の支配方程式において、非線形効果と気体のもつ粘性と熱伝導性による散逸効果との比を表しているパラメータである。

最後に、無次元化された外部円筒の平均半径 r_0 は次のように定義される。

$$r_0 \equiv \frac{r_b \omega^*}{c_0} \quad (6)$$

式(6)より、 r_0 は無次元化された音源の振動数とも見ることが出来る。いま、共鳴問題を考えているので、 α と共鳴モードを指定することによって r_0 が決定される(詳細は次節を参照)。

速度ポテンシャル Φ に関する非線形の波動方程式は以下の式で表される⁴。

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \\ & + (\gamma-1) \Delta \Phi \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right\} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi \end{aligned} \quad (7)$$

境界条件は、

$$r = \alpha r_0 \text{ において,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

$$r = r_0 - \epsilon^3 \cos t \text{ において,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \epsilon^3 \sin t \quad (9)$$

となる。

3 同軸円筒内に励起される弱非線形共鳴波の解析

ここでは、多重尺度法を用いて式(7)の解を求め、そのふるまいについて解析を行なう。まず、速度ポテンシャルを式(2)で示されるパラメータ ϵ によって次のように展開する。

$$\Phi = \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \epsilon^3 \Phi_3 + \dots \quad (10)$$

ここで、線形の波動方程式から求まる共鳴半径からのずれを表すパラメータ Δ と散逸の大きさを表すパラメータ η を次のように導入する。

$$r_0 = r_0 + \epsilon^2 \Delta, \quad \frac{1}{Re} = \epsilon^2 \eta \quad (11)$$

式(10)を支配方程式(7)および境界条件(8),(9)に代入し、 ϵ のオーダーごとに式を整理する。

3.1 $O(\epsilon)$

支配方程式は、

$$\Delta \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

となり, $O(\epsilon)$ において方程式 (7) は線形の波動方程式に帰着する. また, 境界条件は,

$$r = r_0, \alpha r_0 \text{ において, } \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad (13)$$

となる. いま, 式 (12) の解の形を

$$\Phi_1 = A(T) \exp(it) \phi_1(r) + c.c. \quad (14)$$

とおく. ここで, $A(T)$ は複素振幅, $c.c.$ は複素共役を表す. また, T はゆっくりとした振幅の変動を表す時間変数であり,

$$T = \epsilon^2 t \quad (15)$$

と表される. (12)–(14) より, 速度ポテンシャルの空間分布を示す関数 $\phi_1(r)$ は次のような形で表される.

$$\phi_1(r) = \frac{J_0(r)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_0(r)}{\sqrt{J_1^2(\alpha r_0) + N_1^2(\alpha r_0)}} \quad (16)$$

ここで, J_0, J_1, N_0, N_1 はそれぞれ 0 次, 1 次の Bessel 関数, Neumann 関数である. 境界条件より線形の共鳴半径 r_0 は,

$$J_0(r_0)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_0(r_0) = 0 \quad (17)$$

を満足する点 r_0 として求まる. 図 2 に式 (17) を満たす曲線群のグラフを示す (図中の実線で表記).

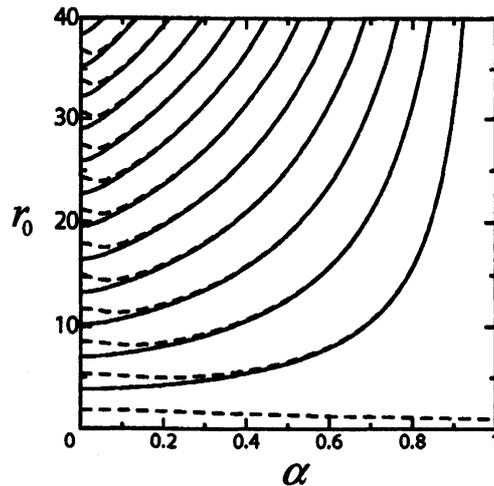


図 2: 共鳴半径 r_0 の α 依存性. 実線: 脈動モード, 破線: 振動モードを示す.

3.2 $O(\epsilon^2)$

$O(\epsilon^2)$ の問題に対する支配方程式および境界条件は

$$\Delta \Phi_2 - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + (\gamma - 1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0 \text{ において, } r = \alpha r_0, r_0 \quad (19)$$

となる。 $O(\epsilon)$ のときと同様に、

$$\Phi_2 = A^2 \exp(2it) \phi_2(r) + c.c. \quad (20)$$

とおいて ϕ_2 を求めると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \pi \frac{J_0(2r)N_1(2\alpha r_0) - J_1(2\alpha r_0)N_0(2r)}{J_1(2r_0)N_1(2\alpha r_0) - J_1(2\alpha r_0)N_1(2r_0)} \\ & \times \int_{\alpha r_0}^{r_0} \xi [J_1(2r_0)N_0(2\xi) - J_0(2\xi)N_1(2r_0)] R_{2C}(\xi) d\xi \\ & - \pi \int_{\alpha r_0}^r \xi [J_0(2r_0)N_0(2\xi) - J_0(2\xi)N_0(2r_0)] R_{2C}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_{2C}(\xi) = & [J_1(\xi)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_1(\xi)]^2 \\ & - \frac{\gamma-1}{2} [J_0(\xi)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_0(\xi)]^2. \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 ϕ_2 は純虚数であるため

$$\phi_2 = i\psi_2 \quad (23)$$

としている。

3.3 $O(\epsilon^3)$

支配方程式と境界条件は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_3 - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} = & 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial T} - \eta \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial t^3} \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \\ & + (\gamma-1) \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \right] + \Delta \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$r = \alpha r_0 \text{ において,} \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = 0, \quad (25)$$

$$r = r_0 \text{ において,} \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = \sin t - \delta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2}. \quad (26)$$

式(24)-(26)の可解条件より、以下のような複素振幅 $A(T)$ のふるまいを支配する常微分方程式が得られる。

$$i\hat{P}(2A' + \eta A) + \hat{Q}A^2 \bar{A} + \hat{R}\delta A = \frac{i}{2}\hat{S}, \quad (27)$$

ここで、 \hat{P} , \hat{Q} , \hat{R} , \hat{S} は α と共鳴振動のモードによって決まる定数である。これらの定数は次のように定義される。

$$\hat{P} = \int_{\alpha r_0}^{r_0} r \phi_1^2 dr, \quad (28)$$

$$\hat{Q} = \int_{\alpha r_0}^{r_0} r \phi_1 \left\{ -2 \frac{d\phi_1}{dr} \frac{d\psi_2}{dr} + 3 \left(\frac{d\phi_1}{dr} \right)^2 \frac{d^2 \phi_1}{dr^2} + (\gamma - 1) \left[-2\phi_1 \psi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 \left(\frac{d\phi_1}{dr} \right)^2 \right] - (\gamma - 1)^2 \phi_1^3 \right\} dr, \quad (29)$$

$$\hat{R} = -r_0 \phi_1^2(r_0), \quad (30)$$

$$\hat{S} = -r_0 \phi_1(r_0). \quad (31)$$

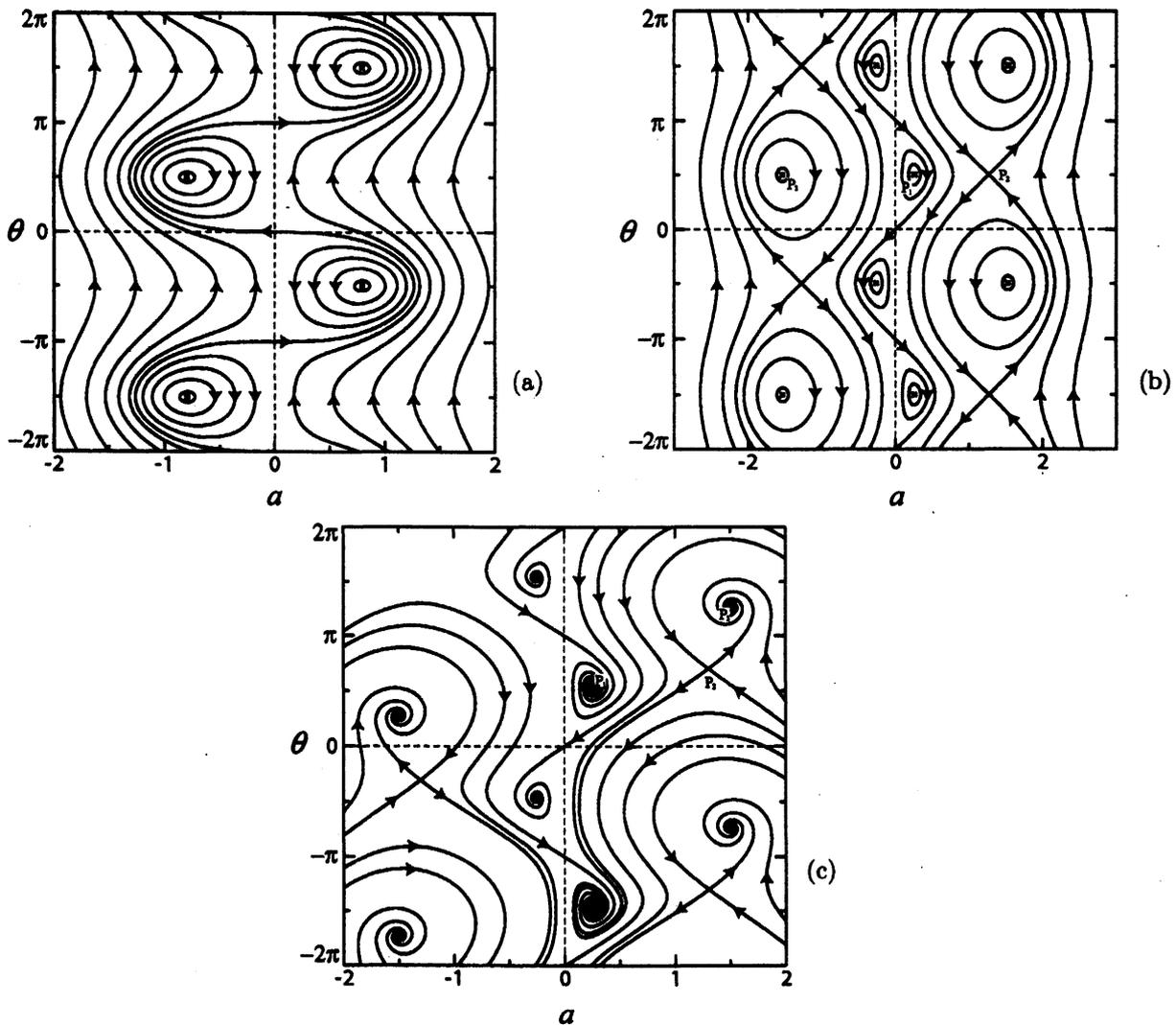


図 3: 相平面 $a-\theta$ における複素振幅 A の挙動

複素振幅 A の応答を表す方程式 (27) において,

$$A(T) = a(T)\exp(i\theta(T)) \quad (32)$$

とし, 相平面 $a-\theta$ 上での $A(T)$ のふるまいを調べる. 図 3(a)-(c) にパラメータの異なる 3 つのケースについて, 相平面における複素振幅 A のふるまいを示す. 図 3(a) は, 散逸が無く円筒の半径が線形の共鳴半径に一致する場合 ($\alpha = 0.1, \Delta = 0, \eta = 0$) における A の挙動である. 閉じた軌道 (振幅 a と位相 θ がともに周期的な変化を繰り返す軌道) と開いた軌道 (振幅は周期的な変動を繰り返すが, 位相は時間の経過とともに進む軌道) の 2 種類があることがわかる. 閉じた軌道の特別な場合として, 図中の \times で示された, 振幅も位相も変化しない定常解が存在する. 安定性解析により, この点は安定な特異点であることが確かめられている. 図 3(b) に, 外部円筒の半径が線形の共鳴半径からずれた場合 ($\alpha = 0.1, \Delta = 5, \eta = 0$) の結果を示す. 図 3(a) のときと同様に閉じた軌道と開いた軌道の 2 種類が存在するが, 3 つのそれぞれ異なる特異点 (P_1, P_2, P_3) が存在していることがわかる. これらの特異点のうち, P_1 と P_3 は安定な特異点, P_2 は不安定な特異点 (Saddle point) である. 最後に散逸がある場合の A のふるまいを図 3(c) に示す ($\alpha = 0.1, \Delta = 5, \eta = 0.3$). 散逸がある場合, A はゆっくりとした振幅と位相の変調を繰り返しながら, ある特定の定常振動解 (図中の P_1 あるいは P_3) へと近づいていく. ここでも P_2 で示される点は不安定な特異点である.

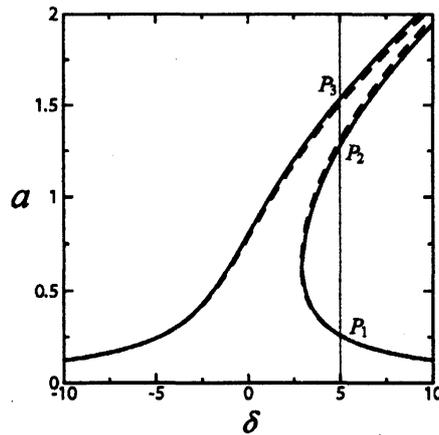


図 4: 定常解の振幅 a の Δ に対する応答

式 (27) で $dA(T)/dT = 0$ として, 線形の共鳴半径からのずれ Δ に対する振幅 a の定常解の応答を図 4 に示す. 図中の実線は散逸パラメータ $\eta = 0$, 破線は $\eta = 0.3$ の場合における a の応答曲線である. 図から Δ の値によって a がとりうる定常解の数が異なっていることがわかる. また, 図 4 の応答曲線と $\Delta = 5$ の直線との交点 P_1 - P_3 は, 実線と破線それぞれについて図 3(b) および (c) の特異点に対応している.

4 偏心円筒内に励起される共鳴波に対する解析

外部円筒と内部円柱の中心軸が δ^* だけずれているような問題を考え, 無次元の偏心率を $\delta = \delta^*/r_0$ と定義する.

はじめに, δ が十分に小さいような場合について考える. $\delta \ll 1$ のとき, 線形の波動方程式 (12) と内部円柱

表面における境界条件

$$(r \cos \theta + \delta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (\alpha r_s)^2 \text{ 上において, } \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (33)$$

より, 共鳴条件として式(17)に加えて

$$J_1'(r_0)N_1'(\alpha r_0) - J_1'(\alpha r_0)N_1'(r_0) = 0 \quad (34)$$

が得られる. 偏心円筒内に励起される波形の空間的な特徴から, 式(17)を満たす α , r_0 によって励起される共鳴波のモードを脈動モード, 式(34)によるモードを振動モードと呼ぶこととする. 図2の破線で示された曲線群は式(34)を満足する曲線群(振動モードの共鳴半径)である. 図2より, $\alpha \ll 1$ の領域ではふたつのモードの共鳴半径はそれぞれ異なった値をとるが, $\alpha \sim 1$ ではこれらの共鳴半径は互いに極めて近い値をとり, それぞれを区別することはできなくなることがわかる.

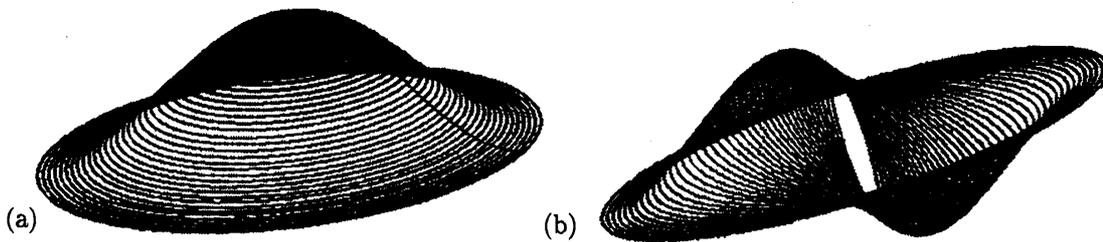


図5: 線形解析による偏心円筒内における圧力の空間分布 (a:脈動モード, b:振動モード)

図5(a)に $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.01$, $r_s = 3.94$ (脈動モード)の場合の偏心円筒内の圧力分布を, 図5(b)に $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.01$, $r_s = 5.14$ (振動モード)の場合の圧力分布を示す. 脈動モードの圧力分布は周方向にほぼ一様であるのに対し, 振動モードでは音源である外部円筒の半径が周方向に一様に変動しているにもかかわらず, y 軸を中心として左右反対称な圧力分布となっている. 図5(b)の圧力分布は, 外部円筒の振動(半径は一定で, 中心軸の位置が左右に変動するような運動)によって励起される共鳴波の圧力分布によく似ている. このことから, 図5(b)のようなモードを振動モードと呼んでいる.

次に, δ が有限の値をもつ場合の共鳴波のふるまいを, 流体力学の基礎方程式(連続の式, 運動方程式, エネルギー方程式)を数値的に解くことによって求める. ここでは, 気体の散逸性の影響は十分に小さいとし, $Re \rightarrow \infty$ と仮定する. このとき, 無次元化された支配方程式は次のように表される.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (35)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}. \quad (36)$$

ここで, p は圧力, u, v はそれぞれ x 方向 y 方向の速度成分, ρ は密度, E は単位体積あたりの気体の全エネルギーである. 数値計算には Chakravarthy-Osher⁶による3次精度 TVD スキームを採用した. 本報告では, 2つのケースについての計算結果を示す.

図6(a)に $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-2}$, $r_0 = 3.940$ (脈動モード)に対する圧力分布の計算結果を示す. α と r_0 は線形解析の場合と同じ値に選んであるが, 偏心率 δ が大きいので, 線形解とは異なり波形の非対称性

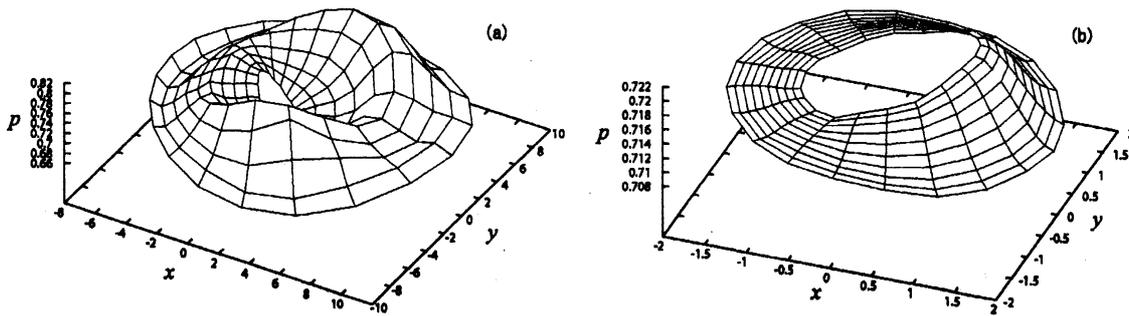


図 6: 偏心円筒内に励起された非線形共鳴波の圧力分布 (a): $\alpha = 0.1, \delta = 0.1, M = 1 \times 10^{-2}, r_0 = 3.940$ (脈動モード). (b): $\alpha = 0.5, \delta = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}, r_0 = 6.393$.

が強く現れていることがわかる。また、音源の Mach 数を $M = 1 \times 10^{-2}$ と比較的大きな値に選んであるため、非線形効果による波形の歪みが見られるが、同軸円筒内に励起される共鳴波では衝撃波が形成される⁵のに対し、偏心円筒の場合には内部円柱による音波の非一様な散乱の影響が強いため衝撃波の形成はおこらない。

図 6(b) は $\alpha = 0.5, \delta = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}, r_0 = 6.393$ における共鳴波の圧力分布である。このケースでは、脈動モードの共鳴半径と振動モードの共鳴半径を区別することができないため(図 2 参照)、共鳴波のふるまいはふたつのモードが混在した形となる。また、音源の Mach 数が $M = 1 \times 10^{-4}$ と比較的小さいために、図 6(a) に見られたような非線形効果による顕著な波形の歪みは見られない。このようなとき、共鳴波のふるまいには図 5 に示されている線形解のふるまいと定性的な類似が見られる。

5 結論

本研究では、二重円筒内部の気体中に励起される非線形共鳴音波のふるまいを解析的あるいは数値的手法を用いて調べ、音場の幾何学的な性質が共鳴波のふるまいに対して及ぼす影響を明らかにした。以下に、その結果をまとめる。

1. 同軸円筒内に励起される弱非線形共鳴波について、ゆっくりとした振幅と位相の変調を含む複素振幅 A の応答を記述する方程式を求めた。
2. 相平面上において、複素振幅 A のふるまいは閉じた軌道と開いた軌道の 2 種類に分類される。また、 Δ の値によって A がとり得る定常振動解の数が変化する。
3. 偏心円筒内の共鳴波のふるまいには脈動モードと振動モードの 2 種類の特徴的な共鳴モードが存在する。
4. 偏心円筒内の共鳴現象について、波動方程式により得られた線形解と非線形数値計算の結果には定性的な類似が見られる。
5. 内部円柱が偏心している場合、音波の非一様な散乱がおり、それが共鳴波の衝撃波への発展を抑制する。このため、同軸円筒内に励起される共鳴波が衝撃波へと発展するような音響 Mach 数 M であっても、偏心円筒では衝撃波が観測されない場合がある。

参考文献

1. J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vol. 2, (McGraw-Hill, New York, 1948).

2. W. Chester, Resonant oscillations in closed tubes, *J. Fluid Mech.* **18**, 44–64 (1964).
3. W. Chester, Acoustic resonance in spherically symmetric waves, *Proc. R. Soc. Lond.* **A434**, 459–463 (1991).
4. W. Ellermeier, Acoustic resonance of radially symmetric waves in a thermoviscous gas, *Acta Mech.* **121** 97–113 (1997).
5. E. Kurihara, Y. Inoue, and T. Yano, Nonlinear resonant oscillations and shock waves generated between coaxial cylinders, *Fluid Dyn. Res.* **36**, 45–60 (2005).
6. S. R. Chakravarthy and S. Osher, Numerical experiments with the Osher upwind scheme for the Euler equations, *AIAA J.* **21**, 1241–1248 (1983).