

周期的拡大縮小管路内を伝わる波動

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

同志社大学工学部 吉田 成希 (Shigeki Yoshida)

同志社大学工学部 佐野 太郎 (Taro Sano)

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

1 はじめに

これまで、平行平板間流れが一様性をもつ最も単純な流れの代表例の1つとしてしばしば研究されてきたのに対して、1部分だけ広い流路幅をもつ管路を流れる流れは一様性をもたない流れの例として調べられてきた。平行平板間流れは、層流状態では平面ポワズイユ流と呼ばれ、これまでに完成された平行流の安定性理論が適用されて、その線形安定性や弱非線形安定性のみならず、乱流への遷移についてもその性質がよくわかっている [1, 2]。この流れの不安定性と遷移において重要な役割を果たすのは、トルミン・シュリヒティング波 (Tollmien-Schlichting wave, TS波) であり、平面ポワズイユ流が不安定となると、その一様性が失われて、流れの中に波動が生じる。そのとき成長する攪乱の形はおおよそ2:3程度の長短軸比をもつ流れの方向に長い楕円形の渦形であり、隣り合う渦同士は互いに逆の渦度をもっていて、ある速度(主流の最大流速の2~3割程度の伝播速度)で下流に伝播する。

一方、平行平板間管路の1部分が急拡大している管路は急拡大管路と呼ばれ、急拡大部が対称である対称急拡大管路と管路の片側にだけ拡大部をもつバックステップ管路あるいはキャビティをもつ管路とに分類される。これらの流れには従来の平行流の安定性理論が適用できないため、主に数値シミュレーションや実験により研究が行われてきたが、最近では Mizushima, Okamoto and Yamaguchi[3], Mizushima and Shiotani[4], Hawa and Dusak[5] などにより、その安定性と遷移が調べられるようになってきた。彼らが調べたのは主に急拡大部をもつ対称管路流であり、この流れの特徴は低いレイノルズ数で定在波攪乱による不安定性が生じることである。低レイノルズ数で実現される対称定常流はこの不安定性により、ピッチフォーク分岐を生じ、急拡大部で流れと垂直な方向に曲がった非対称な流れ(偏流)となる。また、そのときの攪乱の流れ場は急拡大部に楕円形の渦をもっている。ただし、この楕円形の渦は平面ポワズイユ流の場合のTS波とは異なり下流へは伝播せずに急拡大部に留まっている。

急拡大部が1つではなく、周期的にいくつもの急拡大部をもつ管路は熱交換機や化学反応器に見ることができる。急拡大部が比較的長い間隔をおいて存在するとき、

すなわち、狭い流路部が長い場合には流れの遷移の性質は1つだけの急拡大部をもつ管路流れとほぼ同様の性質をもつことが推測される。しかし、狭い流路部が短いときには、不安定性により急拡大部で発生する渦形の攪乱同士が相互作用をする結果、平面ポワズイユ流の不安定攪乱であるTS波のように攪乱の流れ場は隣り合う急拡大部で逆の渦度をもつ可能性もある。ただし、これらの渦はTS波とは異なり、下流へ伝播することはない。一般には、管路が周期構造をもっている場合、攪乱はどのような周期性をもつか予測できないが、隣り合う急拡大部で逆の渦度をもつ攪乱は管路の2倍周期の攪乱である。現実にはこのような不安定性が生じるかどうかはまだ明らかではない。しかし、もしこのような不安定性が生じるとすれば、上流の1カ所でその渦度を反転すれば、下流にもその反転の影響が伝わる。そのとき、渦の回転方向を反転する攪乱が下流に伝わっていく過渡現象を生じ、その攪乱は振動をしながら、しかもその振幅はどこまでも減衰しないで伝わるのが予想される。

これまでも、ほとんど減衰することなく、しかも形を変えない波の例としてソリトンが研究されてきた。特に、水の表面波であるKdVソリトンは有名である[6]。しかし、通常ソリトンを支配する方程式の導出は波の拡散と非線形性との釣り合い条件によって行われ、粘性の効果は無視されている。もし、粘性の影響を考慮に入れば、ソリトンも伝播するにしたがって減衰することを逃れられない。減衰を食い止めるには何かの外力が必要である。周期的急拡大部をもつ管路流れにおいて、攪乱流れ場の渦列の渦度が反転するときに過渡的に伝わる波は減衰しない可能性がある。

ここでは、急拡大部を1つ含むユニット管が周期的につながった長い管路を考える。この管路を流れる流れがピッチフォーク分岐を生じたとき、隣り合うユニット管内において偏流の方向が互いに逆になる流れ場が生じる条件について調べる。この条件を満たす流れが不安定となって、管路内を各ユニットの急拡大部で交互に蛇行しながら流れる流れを実現した後、流れの流入条件を変えることにより、各ユニットの急拡大部で逆方向に偏流する流れ場を実現し、そのときに過渡的に伝わる波について詳しく調べ、その波の振幅が減衰せずに下流へ伝わる可能性について考える。すなわち、不安定性の結果、隣り合うユニット内急拡大部で逆方向に回転する攪乱場の反転について調べる。

2 基礎方程式

2.1 定式化

急拡大部をもつ対称なユニット管が N 個つながっている周期的管路を考える (Fig. 1(a)). そのうちの1つのユニット管を拡大した図が Fig. 1(b) である。流れは幅 $2d$ の流入入口 A_1A_2 から流入し、同じ幅 $2d$ をもつ長さ l の導入部を経て、幅 $2D$ をもつ長さ L の急拡大部 $C_1D_1D_2C_2$ に流入したのち、導入部と同じ幅 $2d$ をもつ長さ l の導出部の出口 F_1F_2 より流出する。第1番目の管路の流入入口の中心を原点 O とし、流路の中心軸に沿って流れ方向に x 軸、それと垂直方向に y 軸をとる。この管路の形状を特

(a)



(b)

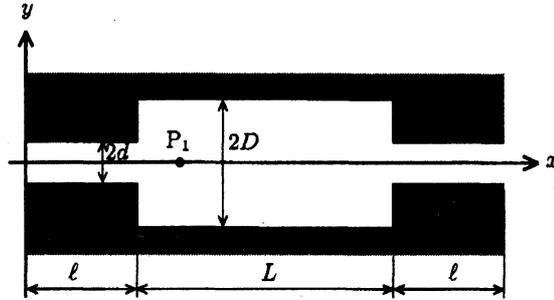


Fig. 1: Channel geometry and coordinates. (a) Whole channel, (b) channel unit.

徴づけるパラメータは次の3つである。

$$\begin{aligned} \text{流路拡大比: } E &= \frac{D}{d}, \\ \text{急拡大部アスペクト比: } A &= \frac{L}{2D}, \\ \text{無次元流入部長さ: } s &= \frac{\ell}{d}. \end{aligned}$$

無次元導出部長さも導入部長さと同じ s である。ユニット管を連結したとき、管路の縮小部は前方の導出部と後方の導入部が繋がるのでその無次元長さは $2s$ 、拡大部の長さは EA であり、各ユニット管の無次元長さ、すなわち管の空間的な周期 \mathcal{L} は $2s + EA$ と表される。

流れは2次元非圧縮性流れであり、温度は一定とする。流れを支配する方程式は、ナビエ・ストークス方程式と連続の式で、代表速度を第1番目のユニット管の流入口 A_1A_2 に流入する x 方向の流速の最大値 U 、代表長さを流入口の幅の半分 d にとり、無次元化を行うと次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (2)$$

ここで、流れ場を特徴づけるパラメータであるレイノルズ数は次のように定義される。

$$Re = \frac{Ud}{\nu}. \quad (3)$$

ただし、 ν は流体の動粘性係数である。ここでは2次元非圧縮性流れを考えているので、速度 $u=(u, v)$ は、流れ関数 ψ を用いて、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

と表せる。方程式(1)と(2)を流れ関数 $\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を用いて書き改めると次の渦度輸送方程式とポアソン方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \Delta \omega, & (5) \\ \Delta \psi &= -\omega, & (6) \\ J(f, g) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

すべての壁面境界では次の滑りなし条件を用いる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

第1ユニット管の流入口($x=0$)には完全に発達したポアズイユ流が流入するが、その流速の y 成分 v は x 方向流速 u の α 倍の流速をもつと仮定し、

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = (1 - y^2), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha(1 - y^2), \\ \psi &= y(1 - \frac{y^2}{3}), \quad \omega = 2y \end{aligned} \quad (8)$$

とおく。ただし、通常は $\alpha=0$ であり、強制的に偏流の方向を変えると時のみ α に小さな値(0.02)を与える。最後尾(N 番目のユニット)の流出口($x=N\mathcal{L}$)での流出条件には、ゾンマーフェルト放射条件を用いる。これは流出境界において移流方程式を用いる方法であり、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

と表される。ここで、 c は流出口を通過する波の位相速度であるが、本研究ではこの位相速度 c として、その位置での流れ方向の局所流速 u を用いる。

また、周期的な流れ場の安定性と遷移を調べるために、管路と同じ周期をもつ流れ(1周期流れ、モード1)と2ユニット管で1周期となる流れ(2周期流れ、モード2)を考える。そのときの流入口と流出口における境界条件には周期境界条件を用いる。したがって、1周期流れと2周期流れの境界条件は、 n を1または2として

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \psi(x + n\mathcal{L}, y), \\ \omega(x, y) &= \omega(x + n\mathcal{L}, y) \end{aligned} \quad (10)$$

と表せる。一般には2周期流れは ψ と ω が $2\mathcal{L}$ の周期をもつ流れであるが、ここで注目する2周期流れは、隣り合うユニット管の急拡大部で逆に曲がった流れなので、縮小部中心を通る y 軸に平行な直線に対して反対称、すなわち縮小部中心について点対称である条件

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -\psi(x + \mathcal{L}, -y), \\ \omega(x, y) &= -\omega(x + \mathcal{L}, -y) \end{aligned} \quad (11)$$

を満たす。

3 数値計算法

3.1 数値シミュレーション

渦度輸送方程式 (5) とポアソン方程式 (6) を初期値・境界値問題として解き、流れ場の数値シミュレーションを行う。計算領域 $x = [0, N\mathcal{L}]$, $y = [-3, 3]$ を x および y 方向共に等間隔 Δx および Δy で離散化し、計算格子を作る。時間 t についても Δt で離散化する。発展方程式 (5) の時間微分を 1 次精度の前進オイラー法で差分近似し、空間微分を 4 次精度の中心差分近似する。ポアソン方程式 (6) の空間微分も同様に 4 次精度の中心差分で近似し、その解法には SOR 法 (Successive Over Relaxation Method) を用いる。このとき、各格子点 $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ における流れ関数の k 回目の値 $\psi_{i,j}^k$ と $k-1$ 回目の値 $\psi_{i,j}^{k-1}$ の相対誤差の最大値が 10^{-7} より小さくなったときに解は収束したと見なす。すなわち、収束条件は $\max_{i,j} |\psi_{i,j}^k - \psi_{i,j}^{k-1}| < 10^{-7}$ である。また、時刻 $n\Delta t$ と $(n-1)\Delta t$ での各格子点における流れ関数の相対誤差が 10^{-10} 以下になったときに流れは定常状態に到達したと判断する。すなわち、 $\max_{i,j} |\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}| < 10^{-10}$ が流れの定常性の判定条件である。

3.2 SOR 法による定常解の計算

流れが定常になるときの定常解の計算は、数値シミュレーションだけでなく、渦度輸送方程式で時間微分項を 0 とおいて得られる定常方程式

$$J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0 \quad (12)$$

とポアソン方程式

$$\Delta \psi = -\omega \quad (13)$$

を直接に数値的に解くことによっても求める。これらの方程式 (12) と (13) の数値計算においても、空間微分を 4 次精度の中心差分で近似し、得られた差分方程式を SOR 法により数値的に解く。解の収束判定は、流れ関数だけでなく、渦度についても条件を設ける。すなわち、各格子点 $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ における流れ関数の k 回目の値 $\psi_{i,j}^k$ と $k-1$ 回目の値 $\psi_{i,j}^{k-1}$ の相対誤差の最大値と渦度の k 回目の値 $\omega_{i,j}^k$ と $k-1$ 回目の値 $\omega_{i,j}^{k-1}$ の相対誤差の最大値が共に 10^{-7} より小さくなったときに解は収束したと判定する。

3.3 線形安定性解析

この論文では主に流れと垂直方向に曲がった 2 周期流れとその偏曲方向の反転について調べているため、1 周期流れと 2 周期流れの生じる条件を線形安定性解析によって求める。したがって、線形安定性解析では境界条件 (10) または (11) のみを採用する。このような周期流れを考えると、対称で定常な流れはレイノルズ数によらず、基礎方程式 (5) と (6) の解である。しかし、対称で定常な流れは小さいレイノルズ数においては安定であるが、流れの中に含まれる微小な攪乱により不安定と

なり、ピッチフォーク分岐あるいはホップ分岐を生じて、非対称な定常流あるいは振動流へと遷移する。線形安定性を調べるために対称な定常流 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ に攪乱 (ψ', ω') が加わった状況を考える。このとき、渦度と流れ関数はそれぞれ $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ および $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ となる。これらの式を式(5)と式(6)に代入して、定常流が満たす方程式(12)と(13)を両辺からそれぞれ引くと次のようになる。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = J(\bar{\psi}, \omega') + J(\psi', \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \Delta \omega', \quad (14)$$

$$\Delta \psi' = -\omega'. \quad (15)$$

ここで、 ψ' と ω' に関する非線形項は無視した。次に、攪乱の時間依存性を $\psi'(x, y, t) = \hat{\psi} \exp \lambda t$, $\omega'(x, y, t) = \hat{\omega} \exp \lambda t$ と仮定して式(14)と式(15)に代入し整理すると、

$$\lambda \hat{\omega} = J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega}, \quad (16)$$

$$\Delta \hat{\psi} = -\hat{\omega} \quad (17)$$

となる。ただし、 λ は攪乱の複素線形増幅率である。

壁面での境界条件は流れ方向に平行な壁上で、

$$\hat{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

流れ方向に垂直な壁上で、

$$\hat{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

と表せる。

一般には、攪乱はどのような周期性も持ち得るが、ここでは1周期流れと2周期流れを生じる攪乱のみを取り扱う。したがって、式(18)と式(19)の境界条件と周期境界条件(10)または(11)のもとで、式(16)と式(17)をSOR法で解き、複素線形増幅率 λ を求める。 λ の実部 λ_r が攪乱の線形増幅率を表す。 $\lambda_r > 0$ のとき、対称で定常な流れは不安定であり、 $\lambda_r < 0$ のとき、対称で定常な流れは安定になる。そして、 $\lambda_r = 0$ のときのレイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c である。

4 計算結果

4.1 計算精度

計算結果を示す前に、ここで用いた数値計算法の精度を確かめる。精度を確かめるために Mizushima & Shiotani の論文で取り扱われたのと同じ流れで計算を行った。すなわち、ただ1つの急拡大部をもつ流れであり、流路拡大比が $E = 3$ とアスペクト比が $A = 7/3$ の流路である。導入部と導出部の長さは Mizushima & Shiotani に合わせて共に $6d$ とした。格子間隔 Δx と Δy のいくつかの値について数値シミュレーションを行ない、流れが対称な定常流から非対称な定常流に遷移する臨界レイ

ノルズ数の値を比較する. 時間差分間隔 Δt はレイノルズ数によっても異なるが, 主に 0.01 ととり, その半分である $\Delta t = 0.005$ としても計算結果に変化がないことを確かめた. 表 1 はその結果であり, Re_{c1} は対称定常流が不安定となって偏流を生じるときの臨界レイノルズ数である. また, v_1 は $Re = 55$ のときの P_1 における y 方向速度である. この表より, 格子間隔 $\Delta x = \Delta y = 1/10$ と $\Delta x = \Delta y = 1/15$ では, 臨界レイノルズ数の相対誤差は 1% 未満であり, Mizushima & Shiotani[4] の結果 ($Re_{c1} = 47.7$) との相対誤差とは 3.2% 程度となった. したがって, 本数値計算において, 格子間隔は $\Delta x = \Delta y = 1/10$ を採用することにする.

Table 1: Accuracy assessment. Comparison of critical Reynolds number Re_{c1} and y -direction velocity v_1 for different order of accuracy in the finite difference approximation. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 6$.

Order of accuracy	Re_{c1}	v_1 ($Re = 55$)
2nd order ($\Delta x = \Delta y = 1/15$)	50.2	1.46×10^{-2}
4th order ($\Delta x = \Delta y = 1/10$)	49.3	1.73×10^{-2}
4th order ($\Delta x = \Delta y = 1/15$)	49.1	1.75×10^{-2}

4.2 2周期流れと1周期流れ

4.2.1 数値シミュレーション: 流れ場と解の分岐構造

非常に多くのユニット管が結合した管路流れでどのような流れが生じる可能性があるのかを調べるために, 境界条件 (10) で $n = 2$ とおいた境界条件の下で, 渦度輸送方程式 (5) とポアソン方程式 (6) を初期値・境界値問題として解き, 流れ場の数値シミュレーションを行う. 流路拡大比 E を 3 にとり, アスペクト比 A を $7/3$ として数値シミュレーションを行った.

導入部長さ s が比較的長い場合の代表として $s = 4$ の場合の流れを示そう. レイノルズ数が $Re = 45$ では流れは管路中心軸に対して対称な定常流 (Fig. 2(a)) であるが, レイノルズ数が $Re = 55$ になると非対称な定常流へと遷移する (Fig. 2(b)). この図では, 2つのユニット管路内で流れは共に上方に偏曲しているが, 1つのユニット管の両側で周期条件を適用して1周期流れを計算してもほぼ同じ流れが再現できることから, これら2ユニット管内で流れが偏曲する方向は偶然にのみよって決まっており, 第1ユニット管内で上方に偏曲し, 第2ユニット管内で下方に偏曲する流れも可能である. 実際, いろいろな初期条件を選んで数値シミュレーションを行うことにより, これら2つの流れを含む4つの異なる流れ場が生じることを確認した. したがって, Fig. 2(b) の流れは1周期流れであると結論する. レイノルズ数をさらに大きくして $Re = 70$ とすると, 流れは再び対称で定常な流れ場に回帰する. 流れのこのような振る舞いは Mizushima & Shiotani が調べた1つの急拡大部のみをもつ管路流れの性質と同じである.

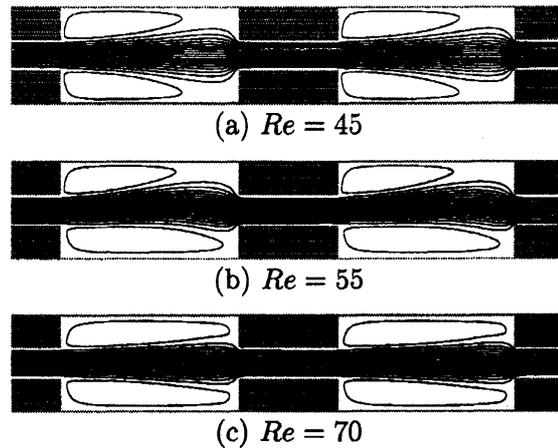


Fig. 2: Flow pattern (stream lines). $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 4$. Periodic boundary condition ($n = 2$).

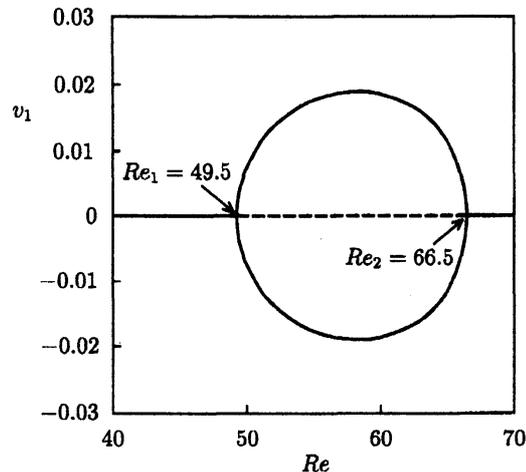


Fig. 3: Bifurcation diagram. v_1 : velocity in the y -direction at the location indicated by P_1 in Fig. 1. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 4$, $Re_1 = 49.5$, $Re_2 = 66.5$.

この流れの遷移を調べるために、流れ場を特徴づける物理量として中心軸上の点 $P_1(s+0.8, 0)$ における y 方向速度 v_1 を縦軸にとり、横軸にレイノルズ数 Re をとって、分岐ダイアグラムを描いた (Fig. 3)。この図で、実線は安定な定常流を表し、波線は不安定な定常流を表している。この図より、対称な定常流は $Re_1 = 49.5$ で不安定となり、ピッチフォーク分岐により偏曲した流れが生じていることがわかった。また、その臨界レイノルズ数は $Re_1 = 49.8$ である。不安定な対称定常流は、 $Re_2 = 66.5$ で安定となり、再びピッチフォーク分岐により2つの偏曲した流れが消滅している。このように、流れの分岐図もまた Mizushima & Shiotani が求めた図とほぼ同じ形である。

これに対し、導入部長さ s が短くなると、流れの性質は異なってくる。その代表例として $s = 0.5$ の場合について説明する。この場合も、レイノルズ数が小さいときは流れ場は管路中心軸に対して対称な定常流である (Fig. 4(a), $Re = 35$)。レイノル

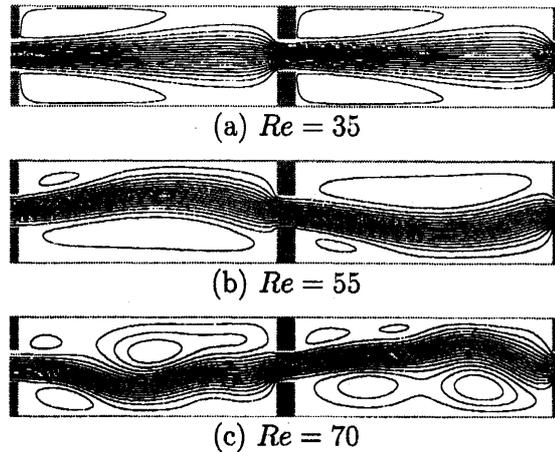


Fig. 4: Flow pattern (stream lines). $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$.

ズ数が大きくなって、 $Re = 55$ のときには流れは大きく蛇行する (Fig. 4(b)). この流れも定常流であり、偏向しているが、 $s = 4$ の $Re = 55$ (Fig. 2(b)) とは異なり、縮小部の中心について点対称な流れ場である。すなわち、境界条件 (11) を満たす 2 周期流れであり、この論文で注目する流れである。もう少しレイノルズ数を大きくしていくと、導入部長さ s が長いときに再び対称定常流に戻ったのとは対照的に、この場合には振動流へと遷移する。たとえば、 $Re = 70$ では Fig. 4(c) のような流れ場であり時間的に振動している。すなわち、数値シミュレーションにおいてレイノルズ数を少しずつ大きくしていくと、定常対称流から定常偏向流へ遷移し、その後に振動流へと遷移をする。振動流が定常対称流の不安定性により生じたのかあるいは定常偏向流の不安定性により発生したのかはまだ明確ではない。このことを調べるためには、流れの分岐構造解析と線形安定性解析が必要である。

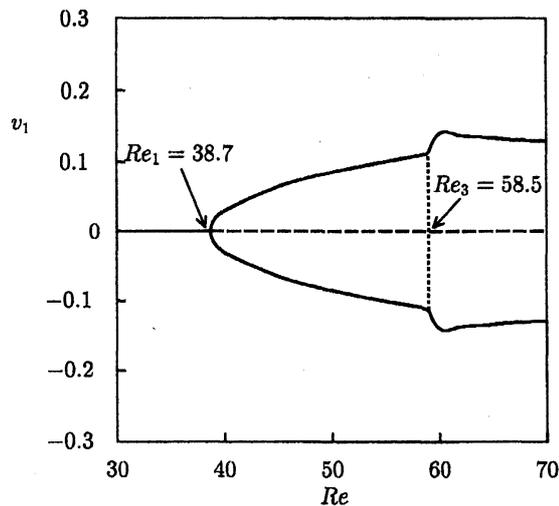


Fig. 5: Bifurcation diagram. v_1 : velocity in the y -direction at the location indicated by P_1 in Fig. 1. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re_1 = 38.7$, $Re_3 = 58.5$.

流入部長さが長い場合 ($s = 4$) と同様に短い場合 ($s = 0.5$) の流れの分岐構造を調

べる。流れを特徴づける物理量も前と同じ v_1 ，すなわち点 $P_1(s + 0.8, 0)$ における y 方向速度をとり，分岐図を描くと Fig. 5 のようになった。この図からも，レイノルズ数が Re_1 より小さいときには，流れは対称定常流であり， Re_1 より大きいとき v_1 は有限の値をもち，流れは非対称流へ遷移していることがわかるが，レイノルズ数が $Re_3 = 58.5$ になると振動流が現れるため，この振動流が生じる起源は不明である。その起源を探るため次節で対称定常流の線形安定性を調べる。

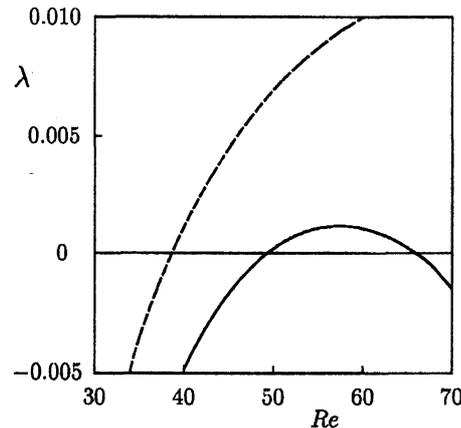


Fig. 6: Linear growth rate of disturbance λ . $E = 3$, $A = 7/3$. Solid line: $s = 4$ (stationary disturbance), Dashed line: $s = 0.5$ (stationary disturbance).

4.2.2 線形安定性解析と遷移図

前節で行った数値シミュレーションの結果だけでは流れの遷移と解の分岐をすべて知ることはできなかった。この節では定常対称流の線形安定性解析を行うことにより，遷移と解の分岐を詳しく調べる。また，遷移が導入部長さによってどのように影響を受けるかその依存性を調べる。定常対称流の線形安定性を $s = 4$ と 0.5 の場合について調べ，その複素線形増幅率を求めた結果 Fig. 6 のように得られた。この図で実線は $s = 4$ の場合に対応し，波線は $s = 0.5$ の場合に対応している。また，実線と波線は定常攪乱に対する線形増幅率であり，この場合は λ は実数 ($\lambda_i = 0$) である。このとき， $\lambda = 0$ となるレイノルズ数はピッチフォーク分岐の臨界点に対応している。

同様の線形安定性解析を $s = [0.1, 6.0]$ の範囲で行い，その結果をまとめると Fig. 7 のようになる。1 周期流れへの遷移点 (モード 1) と 2 周期流れへの遷移点 (モード 2) とはおよそ $s = 1.7$ で滑らかに接続しており， $s > 1.7$ では対称定常解の不安定性により 1 周期流れが生じ， $s < 1.7$ では 2 周期流れが生じる。この原因として， s の値が大きいこと，つまり，急拡大部をつなぐ急縮小部の長さが長いことにより，管路の縮小部で流れは管路と平行に近づくため，流速の y 方向成分がこの部分で減衰し，流れが管路と平行な流れになるためであると考えられる。したがって，モード 1 の流れ場が安定に存在する。逆に， s の値が小さいときは，縮小部で流速の y 方向成分は減衰せず，次の管路に流入する際に y 方向の速度をもって流入するためにモー

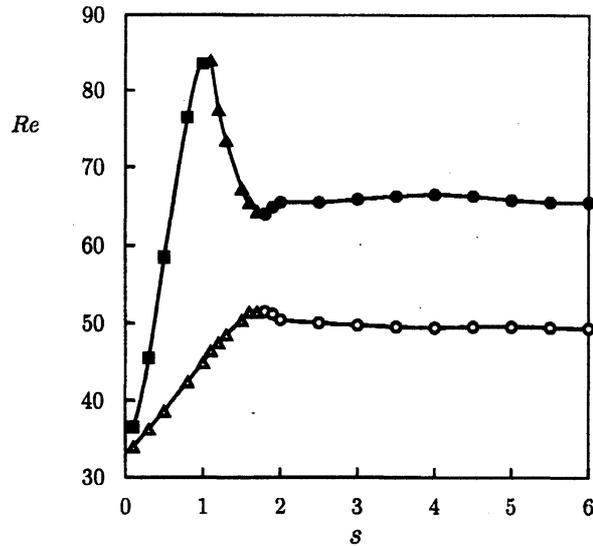


Fig. 7: Transition diagram. $E = 3$, $A = 7/3$. \circ : pitchfork bifurcation point (model1, Re_1), \bullet : inverse pitchfork bifurcation point (model1, Re_2), \triangle : pitchfork bifurcation point (mode2, Re_1), \blacktriangle : inverse pitchfork bifurcation point (mode2, Re_2), \blacksquare : Hopf bifurcation point (Re_3).

ド2の流れ場が安定に存在すると考えられる。また、 s の値が小さいときには、流れは非対称流から対称流に遷移するのではなく、振動流へ遷移している。この原因は、レイノルズ数が増加すること、あるいは、縮小部の長さが短くなることで、縮小部の領域で流れが振動し下流域に波として伝わることで起きると考えられる。

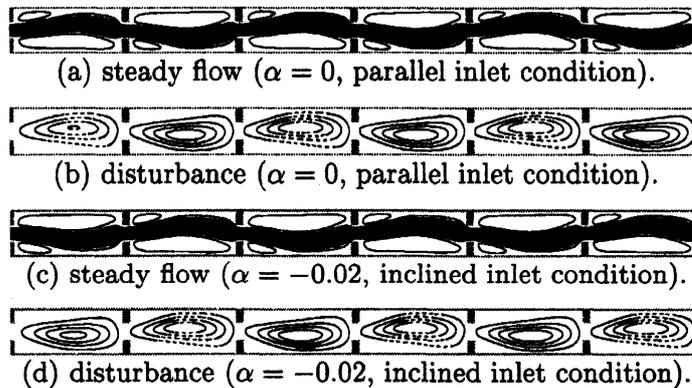


Fig. 8: Flow pattern (stream lines) in a channel with six units. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 55$.

4.3 Nユニット連結管路流れ

4.3.1 流れ場と攪乱渦度

前節で2周期流れが生じるパラメータと原因を調べた。その結果、導入部長さ $s \lesssim 1.75$ において(反対称)2周期流れが最初のピッチフォーク分岐により生じるこ

とが明らかとなった。ここでは N 個のユニット管が連結した管路内を流れる流れを考える。その代表として、導入部長さ $s = 0.5$ をとりあげる。このパラメータでは定常対称流れが不安定となって隣り合うユニット管拡大部内で逆の方向に偏曲する流れとなることが予想される。このとき、流れの流入条件を変えることにより、すべてのユニット管拡大部で流れの偏曲方向を逆転することを試みる。この流入条件の変更により、各ユニット管内の偏曲が逆転する過渡的な変化がどのようにして生じ、その情報はどのように伝わっていくのか調べる。特に、流入条件の突然の変化が流路内を伝わる速度とその波の性質について考察し、この波がどこまでも減衰しないで伝わる可能性のあることを実証する。

非常に多くのユニット管を連結した管路の例として、6個のユニット管を連結した流路をとり、パラメータとして導入部長さ $s = 0.5$ の場合のレイノルズ数が $Re = 55$ における流れ場を計算した。流れの流入条件は $\alpha = 0$ であり、管路に十分発達したポワズイユ流が管路と平行に流入するとした。初期状態から十分時間が経過すると流れは初期条件に関わらず、Fig. 8 のようになる。流れ場はピッチフォーク分岐を生じ、蛇行した定常な流れとなっている。第1ユニット管内の偏流の向きは、初期条件あるいは流れ場に加わった攪乱に依存して決まるが、第2ユニット管以降は隣り合うユニット管内で互いに逆の方向に偏流し、期待通りの流れ場が得られた。

この流れ場から定常対称流を差し引いた流れ場、すなわち攪乱の流れ場は Fig. 8(b) のように、隣り合うユニット管内で時計方向に循環する渦度場(破線)と反時計方向に循環する渦度場(実線)が交互に現る。つまり、隣り合う楕円形の渦は互いに逆向きであることがわかる。

次に、この流れ場の偏流方向をすべて反転させることを考える。そのために、流入口で y 軸方向速度成分を与える。すなわち、Fig. 8 では第1ユニット管で流れは上に偏流しているので、これを下向きに変えるため、式(8)で α を小さな負の値 -0.02 とする。その後十分に時間が経過すると流れは再び定常流に至り、Fig. 8(c) のような流れとなる。この流れは期待した通り、各ユニット管内で偏流の方向が逆転しており、この流れ場から定常対称流を差し引いた攪乱場も Fig. 8(d) に見る通り、各ユニット管内の渦も逆方向となっている。次節ではこの逆転がどのようにして起こるのか、その過程について詳しく見ていく。

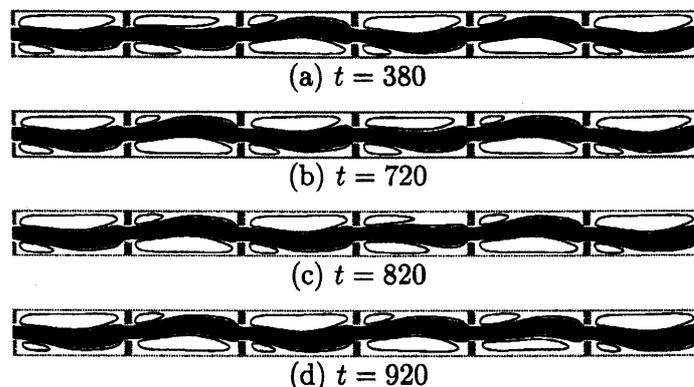


Fig. 9: Instantaneous flow patterns in the transient process by changing the value of α from 0 to -0.02 . $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 55$.

4.3.2 流れ場の偏曲方向逆転の過程: 減衰しない波

前節では流入口で y 方向流入速度を与えることにより, 各ユニット管拡大部内での偏流の方向を逆転した. 流入速度に y 方向成分を与えた時刻を $t = 0$ とおき, 流れの時間変化を描くと Fig. 9 のようになった. この図から, 流れの偏曲の方向が順次下流へと伝わって行き, 流れ場全体の偏流方向の反転が起こっている様子を見て取れる. 時刻 $t = 380$ には第 1 ユニット管内の反転がほぼ終わり, 次のユニット管の流れも遷移を始めている (Fig. 9(a)). 最終的に第 6 ユニット管の偏流が逆転するのは時刻 $t = 1360$ である.

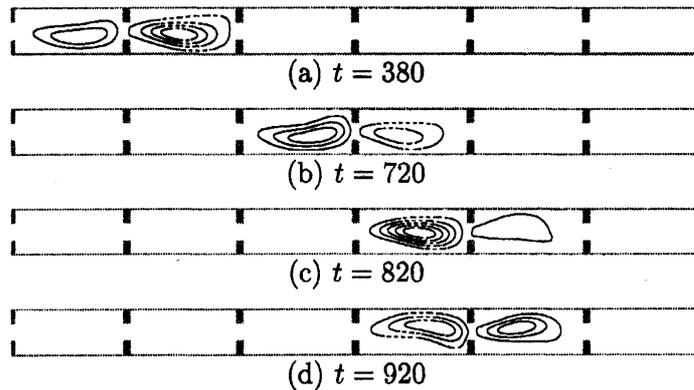


Fig. 10: Propagation of transient wave induced by changing the value of α from 0 to -0.02 . $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 55$.

このように偏流の方向が反転するのは上流の情報が下流へ波として伝わっていくからであると考えられる. この波の伝播の様子をより詳しく見るために, 流れ場の変動 $\partial\psi/\partial t$ の大きさの空間分布 (速度変動のつくる流線) を Fig. 10 に描いた. 速度の変化が伝播波のように, 次々と各ユニット管を伝わって行くのを見て取れる. 図中で実線が正の値を表し, 点線が負の値を表している. 変化率 $\partial\psi/\partial t$ は各ユニットの拡大部の中心で大きな値をとり, 縮小部で値が小さい値をとる. この波は下流に伝わって行っても少しも減衰をすることなくどこまでも伝わる事ができる. このような波はこの論文で探し求めていた波の性質をもっている.

この伝播速度を詳しく調べるために 12 個のユニットを連結した流路を考え, 横軸に時間 t をとり, 縦軸に偶数番目の縮小部の中心位置における速度の y 方向成分 v の時間微分をとったグラフを少しずつずらして描くと Fig. 11 のようになる. この図より, 流入口で y 方向に速度を与え, 流れ場を上下反転したことによる乱れの伝播は, 2 種類の速度で伝わっていることがわかる. 速い伝播速度 (図中の破線) は主流の最大値 U のおよそ 0.68 倍であり, 遅い伝播速度 (点線) は主流のおよそ 0.11 倍である. 先の Fig. 9 に示された偏りの反転が起こっているのは, 遅い伝播速度に相当する. 速い速度で伝播する細かい構造の攪乱は, x 方向にも y 方向にも局在した構造をもっており, 主流に乗ってパッシブスカラーのように伝わるだけで流れ場の構造を変えることはない. このことは, 速い伝播速度が主流のジェットの平均速度に近いことからわかる. この波が下流に伝播しながら成長するときは, これまで対流型不安定攪乱と呼ばれてきた波である.

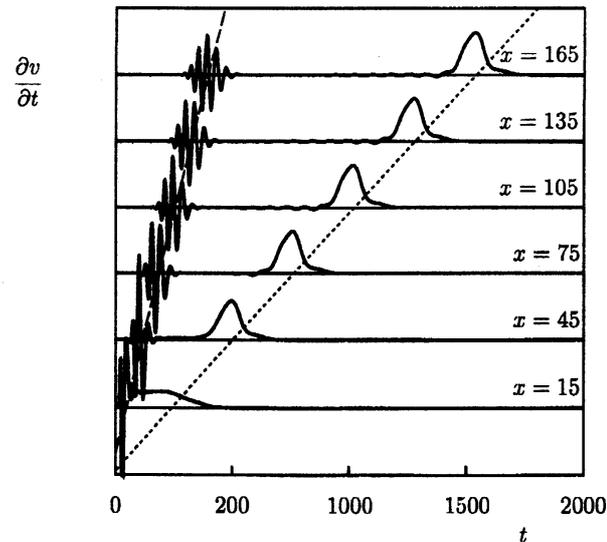


Fig. 11: Time development of $\partial v/\partial t$ in the transient process when the value of α is changed from 0 to -0.02 . $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 55$.

参考文献

- [1] P. G. DRAZIN AND W. H. REID (2004) *Hydrodynamic Stability, 2nd Edition* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), pp. 221-223.
- [2] 水島二郎, 藤村薫(2003) 流れの安定性 (朝倉書店, Tokyo), 第4章.
- [3] J. MIZUSHIMA, H. OKAMOTO AND H. YAMAGUCHI (1996) Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part. *Phys. Fluids* **8**, 2933-2942.
- [4] J. MIZUSHIMA AND Y. SHIOTANI (2001) Structural instability of the bifurcation diagram for two-dimensional flow in a channel with a sudden expansion. *J. Fluid Mech.* **434**, 355-369.
- [5] T. HAWA AND Z. DUSAK (2000) Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion. *Phys. Fluids* **12**, 2257-2267.
- [6] R. S. JHONSON (1977) *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), Chapter 3.