数理解析研究所講究録
1485巻 2006年 110-119

力学系により生成される二分的部分基

立木 秀樹　(京都大学大学院 人間・環境学研究科)
山田修司　(京都産業大学 理学部)

Abstract

テント関数の旅程の 1/2 における値を不定 ($\perp$) としたものは、$\mathbb{I}=[0,1]$ の二分的部分基 (dyadic subbase) を生成し、この旅程文字列を用いて、多ヘッド非決定性マシンで $\mathbb{I}$ 上の計算を定義することが出来る。このことを一般の力学系に拡張し、力学系により生成される二分的部分基の性質について調べる。また、$\mathbb{I}$ や $\mathbb{I}^2$ といった基本的な空間の上に定義される二分的部分基を具体的に求める。最初に、テント関数の旅程による実数計算や、それを一般化した二分的部分基の理論を概観してから、反転的な二分的部分基、および、力学系により生成される二分的部分基について調べる。

1　テント関数の旅程と実数計算

実数集合 $\mathbb{R}$ 上の計算を考える時、非加算集合である $\mathbb{R}$ の各点に有限文字列でコードを与えることは不可能であり、無限文字列 ($\in \Sigma^\omega$) としてコードを与えることとなる。そして、無限列を無限列に変換するタイプ2マシン（すなわちストリームプログラム）により、$\mathbb{R}$ 上の計算を導入することができる。

しかし、2進展開などで無限列コードを与えたのでは、引数を3倍するといった基本的な関数も計算可能とならない。もし、引数を3倍する関数を実現しているタイプ2マシンに 1/6 の展開である 0.0010101... が入力として与えられたとする。マシンは、1/2 の展開、すなわち 0.10000... を出力しないといけないが、入力の有限部分だけを読んだ時点では、計算結果が 1/2 以上であることを判断できず、いつまでたっても 0. の後の1を出力することが出来ない。これは、言い換えれば、2進展開の関数 : $\mathbb{R} \to \Sigma^\omega$ が連続でないからである。一般に、実数（1次元、連結）からカントール集合（0次元、完全不連結）への位相的な埋め込みは存在しない。よって、2進展開以外のどんなコード関数でも、実数集合上に計算概念を導入できない。

これを解決して計算可能実関数の概念を導入するために、Weihrauch などの Type 2 theory of effectivity [6] では、コードに冗長性をもたせ、1つの数に対して、複数のコードを許している。それに対し、立木は、$\Sigma=\{0,1\}$ の無限列に対し、Σ に不定元 $\perp$ を加えた文字集合 $\mathbb{T}$ の無限

文字列であり、$\perp$ が高々1回だけ現れるものの集合 $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1} \subset \mathbb{T}^{\omega}$ を考え、実数集合を $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ に埋め込み、それと、$\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ 上で動くマシン (IM2-マシン) を考え、それにより、実数上に計算概念を導入する研究を行ってきた [2]。本論では、文字列の index は 0 からはじめ、p が長さ n のとき、その各文字を $p[0], ..., p[n-1]$ と表記する。

$\mathbb{R}$ 全体を考えると複雑になるので、ここでは、基本閉区間 $\mathbb{I} = [0,1]$ を考えることにする。[2] で用いられた $\mathbb{I}$ の $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ への埋め込みは、実は、テント関数の旅程に他ならない。すなわち、テント関数 $t : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, $t(x) = \begin{cases} 2 * x & (0 \le x \le 1/2) \\ 2 * (1-x) & (1/2 < x \le 1) \end{cases}$ と、引数が 1/2 より大きいかどうかを判断する関数 $P : \mathbb{I} \to \mathbb{T}$, $P(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1/2) \\ \perp & (x = 1/2) \\ 1 & (x > 1/2) \end{cases}$ を考える。

P は、引数が 1/2 のときに、不定元 $\perp$ となることに注意されたい。そして、埋め込み $\varphi_G : \mathbb{I} \to \mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ を、$\varphi_G(x)[n] = P(t^n(x))$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と定義する。実際、φ_G は、$\mathbb{I}$ から $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ への位相的な埋め込みとなる。ここで、$\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ 上の位相は、まず、$\mathbb{T} = \{0, 1, \perp\}$ 上に $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \mathbb{T}\}$ を開集合とする位相を考え、$\mathbb{T}^{\omega}$ にその積位相を考え、その部分位相を $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,1}$ に考える。$\mathbb{T}^{\omega}$ の位相は、ドメイン上の Scott 位相という、計算概念と関連した位相と一致し、IM2 マシンの入出力は、この位相に関する近似計算と見ることができる。IM2 マシンは、その動作に非決定性を持っている。よって、IM2 マシンにより実現される関数は、一般に多値関数である。

2 一般の位相空間への拡張

この研究ののち、立木は、この計算概念を他の位相空間に拡張することを二つの方向から考えてきた。一つは、位相空間の次元とその空間を表現するのに必要な $\perp$ の個数との関係である。

Theorem 1 *[1, 3]* X が可分距離空間の時、X の次元（*small inductive dimension*）と X を $\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,n}$ に埋め込める最大の n は等しい。

ここで、$\mathbb{T}^{\omega}_{\perp,n}$ は、$\mathbb{T}^{\omega}$ の要素の中で、高々 $\perp$ が n 個までしか現れないものの集まりである。

もうひとつは、この埋め込みと二進的部分基との関係に関するものである。通常の計算の理論で、$\perp$ はとまらない計算、あるいは計算によって求めることのできない値のことを意味する。位相空間 X の $\mathbb{T}^{\omega}$ への埋め込みでの $\perp$ も、このような意味を持っていることが望ましい。すなわち、あるビットの値が $\perp$ であることと、計算によってそのビットの値が 0 であることも 1 であることも決定できないし否定することも出来ないことと同値となるような埋め込み (*) を考える。

そのような埋め込みを考えることと、以下のように定義される二分的部分基を考えるのは等価となる。

Definition 1 正規開集合 *(regular open set)* の列 $S = S_0^0, S_0^1, S_1^0, S_1^1, \ldots, S_n^0, S_n^1, \ldots$ は、ハウスドルフ空間 X の部分基であり、S_n^0 と S_n^1 がお互いに外部 *(exterior)* である時、二分的部分基 *(dyadic subbase)* という。

上記 (*) の性質をもつ埋め込み φ から、

$$\begin{aligned} S_n^0 &= \{x \mid \varphi(x)[n] = 0\}, \\ S_n^1 &= \{x \mid \varphi(x)[n] = 1\} \end{aligned}$$

と定義することにより二分的部分基 S が生成される。また、逆に、二分的部分基 S が与えられたとき、

$$\varphi_S(x)[n] = \begin{cases} 0 & (x \in S_n^0) \\ \perp & (x \in \mathrm{Bd}\ S_n^0 = \mathrm{Bd}\ S_n^1) \\ 1 & (x \in S_n^1) \end{cases}$$

と定義することにより、(*) の性質をもつ X の $\mathbb{T}_{\perp,1}^{\omega}$ への埋め込み φ_S が生成される。よって、そのような埋め込みを考える代わりに、その位相空間の二分的部分基という、より位相空間論的な対象を考えればいいことになる。

S が二分的部分基のとき、$d \in \mathbb{T}^n$ に対し、d に対応する開領域 $\psi_S(d)$ と閉領域 $\overline{\psi}_S(d)$ を

$$\begin{aligned} \psi_S(d) &= \cap_{i=0}^{n-1} S_i^{d[i]} \\ \overline{\psi}_S(d) &= \cap_{i=0}^{n-1} \overline{S_i^{d[i]}} \end{aligned}$$

と定義する。ここで、$S_i^{\perp} = X$ とする。$\{\psi_S(d) \mid d \in \mathbb{T}^*\}$ は、まさに、S により導出される開基である。任意の $d \in \mathbb{T}^n$ に対し $\overline{\psi}_S(d) = \overline{\psi_S(d)}$ が成り立つとき、二分的部分基 S は真性 (proper) であると定義する。

真性二分的部分基 (proper dyadic subbase) は、いい性質をもつ。例えば、X はハウスドルフ空間を考えているので、$x \neq y$ なら、x と y を分離する開集合がとれるが、S が真性二分的部分基の時には、ある i に対する S_i^0 と S_i^1 として、その様な開集合がとれる。また、$\{0,1\}$-無限列 p のいくつかの文字を $\perp$ に置き換えることにより $\varphi_S(x)$ になるときに、p が x を意味していると考えるのは自然である。真性二分的部分基は、任意の p に対し、そのような x は高々 1 つ存在しており、このような $\{0,1\}$-無限列による点の表現が可能であることを意味している。

二分的部分基について、さらに、その部分基に対応する埋め込みが導出する $\{0,1,\perp\}$-コードが効率的であるということを示す性質を [4] で 3 つ定義した。そのうちの 2 つをあげる。

- 独立部分基 (Independent subbase) 任意の $d \in \Sigma^n$ に対し、$\psi_S(d)$ が空集合とならない。
- 全表現的部分基 (Full-representing subbase) 真性二分的部分基であり、上記で $\{0,1\}$-無限列 p に対して 高々一つ存在しているとのべた x が常に存在している。すなわち、$\perp$ を 0 と 1 の両方を意味していると考えれば、full-shift の様に、全ての無限文字列がコードとして用いられている。

一般には、全表現的部分基なら独立部分基であり、真性二分的部分基に対し、X がコンパクトなら同値になる [4]。立木と山田は、これらの性質を満たす 二分的部分基の存在する空間を決定する、次の結果を得た [5]。

Theorem 2 X を可分距離空間とする。
(1) X が独立部分基を持つことと、X が孤立点を持たないことは同値である。
(2) X が全表現的部分基を持つことと、X が孤立点を持たないコンパクト空間であることは同値である。

3 力学系により生成される二分的部分基

この様に、計算に使えるような、位相空間 X の $\{0,1,\perp\}$ 無限列でのコードの与え方を考える中で、コンパクト空間の全表現的部分基の概念に行き着いた。しかし、$\mathbb{I}$ の様なもっとも単純な空間の上でも、全表現的部分基は、$\mathbb{I}$ 上の同相写像や $\mathbb{T}^\omega$ 上の同相写像で移りあうものを除いても非可算無限個あることが容易に分かる。その中のほとんどは、計算に用いることができるとはいいがたい、複雑な構造を持つものである。

計算に用いるものとしては、以下の性質が必要であると考える。

1. 再帰的な定義をもつこと。ある点を計算で求めていて、1 ビット目が 0 および 1 と決定して、対象とする空間を S_0^0, および S_0^1 に絞ったときにも、同じ構造の部分基が存在し、それにより、(無限) 再帰的に関数を計算できること。
2. 1 bit のシフトが（単値）関数となること。全表現的部分基による $\{0,1,\perp\}$ のコードが与えられたときに、ある点のコードを 1 bit 左にシフトした文字列は、1つの点を特定するとは限らない。一般には、結果として得られた文字列の $\perp$ に 0 か 1 を埋めた複数の点を意味することになる。このように、一般に、シフトは多値関数となる。実数上の計算の理論は、一般に多値関数を対象とするので、これは、致命的な欠点とはいえない。しかし、シフトの様な単純な演算は、できるだけ分かりやすい関数を意味するべきであり、それは、単値関数であることがふさわしい。
3. 1 ビット反転が、（単値）関数となること。シフトと同様に、無限文字列に対する単純な操作として、ビット反転がある。これも、単値関数となるべきである。

次のように、この最後の条件を満たす二分的部分基を、反転的部分基と定義する。

Definition 2 S を二分的部分基とする。それぞれの n と $d \in \Sigma^n$ に対し、$\overline{\psi_S}(d)$ 上で n 番目の文字の反転が同相写像となる時、すなわち、$\overline{\psi}_S(d)$ から $\overline{\psi}_S(d)$ への同相写像 f が存在し、$\varphi_S(f(x))[n]$ は $not(\varphi_S(x)[n])$ であり、$\varphi_S(f(x))$ と $\varphi_S(x)$ は $n+1$ ビット目から先が一致するとき、S

は反転的であるという。ここで、*not* は、$not\bot = \bot$ と $\mathbb{T}$ に拡張して考える。

また、次のように、最初の2つの条件を満たす二分的部分基を、力学系から生成された(二分的)部分基と定義する。

Definition 3 S を二分的部分基とする。S が *2-1* 写像 $f : X \to X$ の旅程となっているとき、すなわち、互いに外部 *(exterior)* になる開集合 X_0, X_1 *(*その境界を B とする*)* および連続な自己写像 $f : X \to X$ で、$X_0 \cup B$ と X, および $X_1 \cup B$ と X がそれぞれ f により同相となるものが存在し、 $S_n^c = f^{-n}(X_c)$ のとき、S は力学系 f から生成されているという。

この定義は、純粋に力学系の概念となっていることに注意されたい。

4 反転的な subbase の性質

Proposition 3 反転的な部分基は、独立部分基である。

Proof. $d \in \Sigma^n$ に対し、$\psi_S(d)$ が空集合ではなく、$\psi_S(d0)$ が空集合だとする。すると、$\psi_S(d1)$ も空集合なので、$\psi_S(d)$ という開集合が、$\{p \mid p[n] = \bot\}$ という nowhere dense な集合と一致し、矛盾である。 ■

$B_k = \overline{S_n^0} \cap \overline{S_n^1}$ とする。

Proposition 4 反転的な部分基は、真性である。

Proof. $d \in \mathbb{T}^n$ に対し、$\overline{\psi}_S(d) \supset \overline{\psi_S(d)}$ とする。x を、$x \in \overline{\psi}_S(d)$ かつ、$x \notin \overline{\psi_S(d)}$ となる点とする。 のとき、$d[i] = \bot$ のとき、 $d[i]$ に、$\varphi(x)[i]$ が 0 または 1 ならその値を、$\varphi(x)[i]$ が $\bot$ の時には 0 か 1 を任意に与えた文字列 e に対して、$x \in \overline{\psi}_S(e)$ かつ、$x \notin \overline{\psi_S(e)}$ となる。よって、$d \in \Sigma^n$ としてよい。n は、そのようなものの中で最小とする。$d = 0^n$ として一般性を失わない。$x \in \overline{\psi_S(0^{n-1})} = \overline{\cap_{i=0}^{n-2} S_i^0}$, $x \notin S_{n-1}^0$ より、$x \in B_n$ である。x のある近傍 P が、$\psi_S(0^n)$ と交わらないとする。P の中で、$\psi_S(0^{n-1})$ と S_{n-1}^0 は交わらない。つまり、P の中で、$\psi_S(0^{n-1})$ は S_{n-1}^1 の中にある。S が反転的であることより、n ビット目の反転は $\psi_S(0^{n-1})$ での同相写像となる。P を、この同相写像で不変なようにとる。この同相写像で x は不変であり、P の中で、$\psi_S(0^{n-1})$ は S_{n-1}^0 の中に移される。よって、$\psi_S(0^n)$ は空集合ではなく、x をその境界点としてとる。つまり、$x \in \overline{\psi_S(0^n)}$ となり、矛盾である。 ■

さらに、反転的部分基を持つ多様体については、向き付け可能性との関係がいえる。このことを、より弱い条件のもとで示す。

Definition 4 S を二分的部分基とする。十分大きな n があり、任意の $d \in \Sigma^n$ に対し、$k < n$ である任意の k ビット目の反転写像 $f_{k,\overline{\psi}_S(d)}$:

$\overline{\psi}_S(d) \to \overline{\psi}_S(neg(d,k))$ が同相写像となるとき、S は局所反転的であるという。ここで、$neg(d,k)$ は、d の k ビット目の 0,1 を反転した文字列である。

Proposition 5 反転的な部分基は、局所反転的である。

Theorem 6 N 次元コンパクト多様体 X が、局所反転的な二分的部分基 S で、任意の $k_1 \neq k_2$ に対して、 $B_{k_1} \cap B_{k_2}$ の次元が $N-2$ 以下であるようなものをもつとき、X は向き付け可能である。

Proof. X 内の任意のループ ℓ は、向きを保存するループであることを示す。n を十分大きくとり、$k < n$ である任意の k と、任意の $d \in \Sigma^n$ に対し、k-th ビットの反転写像 $f_{k,\overline{\psi}_S(d)} : \overline{\psi}_S(d) \to \overline{\psi}_S(neg(d,k))$ が同相写像となるようにとる。また、この n をさらに十分大きくとることにより、各 $\overline{\psi}_S(d)$ は向き付け可能であるようにできる。このとき、ℓ は、任意に小さい変形によって $B_{k_1} \cap B_{k_2} (k_1, k_2 < n)$ を避けて通るようにできる。ℓ が通る $\overline{\psi}_S(d)$ と B_k とを順次 $\overline{\psi}_S(d_0)$, B_{k_1}, $\overline{\psi}_S(d_1)$, B_{k_2}, ..., B_{k_m}, $\overline{\psi}_S(d_m)$ $(d_m = d_0)$ とする。1 ビットづつの反転でもとに戻るので、m は偶数である。$\overline{\psi}_S(d_{i-1})$ と $\overline{\psi}_S(d_i)$ は $f_{k_i,\overline{\psi}_S(d_i)}$ により同相であり、両者の共通部分があるとすれば、それに対しては、$f_{k_i,\overline{\psi}_S(d_i)}$ は恒等写像となる。よって、$f_{k_i,\overline{\psi}_S(d_i)}$ とその逆写像を合わせることにより、$\overline{\psi}_S(d_{i-1}) \cup \overline{\psi}_S(d_i)$ 上の自己同相写像 f_{k_i} が定義される。f_{k_i} は向きを反転される同相写像であり、これらを全て合成すると、$\overline{\psi}_S(d_0)$ 上の恒等写像となる。したがって、ℓ は向きを保存するループである。 ∎

5 力学系により生成される部分基の性質

以下、力学系により生成される二分的部分基 S に対し、f, X_0, X_1 はこの定義の中のものとし、$X_0 \cup B$ と X の同相に関する逆写像を g_0, $X_1 \cup B$ と X の同相に関する逆写像を g_1 とする。 力学系により生成された二分的部分基については、次のようなことがわかる。

Lemma 7 力学系により生成される二分的部分基 S において、B は f の一価な点集合、すなわち $\{x \mid |f^{-1}(f(x))| = 1\}$ と一致する。

Proof. $x \in B$ に対し $f(x) = f(y), x \neq y$ とする。$y \in X_0 \cup B$ として一般性を失わない。$f(x)$ の任意の近傍 O に対し、$g_0(O)$ と O は同相であるが、$g_0(O)$ は必ず x, y の両方を含むので、矛盾である。 ∎

Proposition 8 力学系により生成される二分的部分基は、反転的である。

Proof. X 上で、1 ビット目の反転を考えると、それは、X_0 の点に対しては $g_1 \circ f$, X_1 の点に対しては $g_0 \circ f$, B に対しては恒等写像であり、

明らかに X の同相写像である。$\overline{\psi}_S(d)$ 上では、$d = a_0 \ldots a_{n-1}$ とすると、$\overline{\psi}_S(d) = g_{a_{n-1}} \circ \ldots \circ g_{a_1} \circ g_{a_0}(X)$ であり、これは X と同相であり、その上の $n+1$ ビット目の反転は、この同相により、X 上の 1 ビット目の反転に移される。 ∎

命題 3 で述べたように、反転的な部分基は、真性の独立部分基である。よって、力学系により生成される二分的部分基は、独立的であり、X がコンパクトなときには、全表現的でもある。

6 力学系による二分的部分基の分類。

前章でみたように、力学系により生成される部分基は、よい性質をかね備えている。$\mathbb{I}$ と $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ について、力学系により生成される部分基の形を調べる。

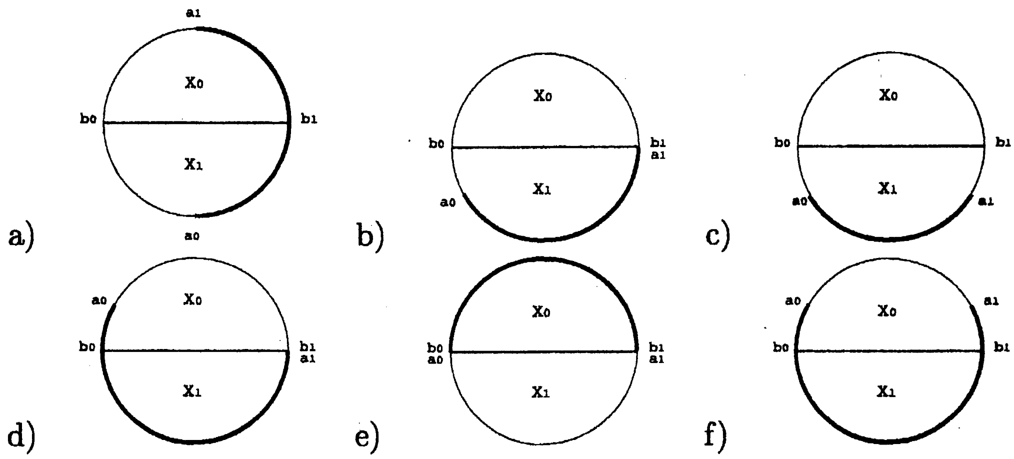
まず、力学系が部分基を生成するための条件を考える。連続な自己写像 $f : X \to X$ であり、互いに外部になる開集合 X_0, X_1 (その境界を B とする) に対し、$X_0 \cup B$ と X, および $X_1 \cup B$ と X がそれぞれ f により同相となるものが与えられたとする。この f から、$S_n^c = f^{-n}(X_c)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と定義したときに、これが X の二分的部分基をなす条件を求めたい。$P : X \to \mathbb{T}$ を、1 章で定義した関数とする。任意の点 x に対して、$\varphi_S(x) \in \mathbb{T}^\omega$ を、$\varphi_S(x)[n] = P(f^n(x))$ と定義する。$\varphi_S(x)$ の先頭の k 文字を、$\varphi_S(x)|_k \in \mathbb{T}^*$ と書くことにする。$k = 1, 2, \ldots$ に対し、$\psi_S(\varphi_S(x)|_k)$ が x の近傍系になればよい。よって、k を無限大にしたときに、$\overline{\psi_S(\varphi_S(x)|_k)}$ の直径が 0 に近づくということが、全ての x について成り立つことが、必要十分である。また、$d = \varphi_S(x)|_k$ に対し、d に含まれるすべての $\perp$ に 0 または 1 を代入することにより得られる Σ^k の要素 e に対する $\overline{\psi_S(e)}$ は x を含み、それらの和集合が $\overline{\psi_S(d)}$ と一致する。よって、$\overline{\psi_S(d)}$ の直径は、それらの直径の最大値の 2 倍で抑えられる。よって、k が無限大になるとき、$e \in \Sigma^k$ に対する $\overline{\psi_S(e)}$ の直径の最大値が 0 に収束することが S_n^c $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が二分的部分基となるための必要十分条件である。

Proposition 9 $\mathbb{I}$ 上の、力学系により生成される二分的部分基は、テント関数と共役なものしか存在しない。

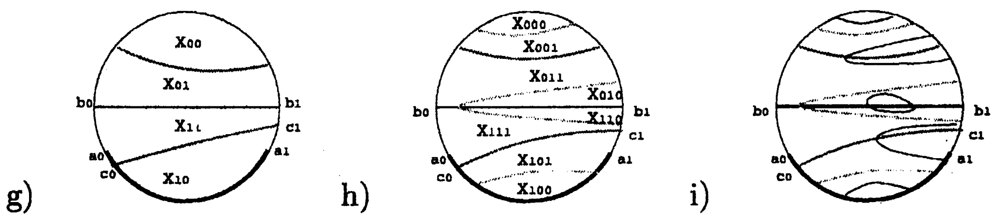
Proof. $\mathbb{I}$ 上の連続な 2-1 写像 f は、ある $c \in (0, 1)$ に対し、$f(0) = f(1) = 0$, $f(c) = 1$ で、$[0, c]$ で単調増加、$[c, 1]$ で単調減少となる単峰関数か、$f(0) = f(1) = 1$, $f(c) = 0$ で、$[0, c]$ で単調減少、$[c, 1]$ で単調増加となるものだけである。前者の場合には、$X_0 = [0, c)$, $X_1 = (c, 1]$ とし、旅程を考える。$S_n^c = f^{-n}(X_c)$ としたとき、これが二分的部分基になるためには、全ての点が異なる旅程をもつことが必要十分である。$f(c) = 1$ であることより、c の旅程は $\perp 10^\omega$ である。よって、旅程の集合はテント関数の場合と同じとなり、力学系 f は、テント関数と旅程が同じ点を対応付ける関数により共役となる。後者の場合は、反転関数

$g(x)=1-x$ をかけ、テント関数と旅程が 01 反転の点を対応付けることにより共役となる。 ■

次に、$\mathbb{I}^2$ 上の力学系により生成される二分的部分基を考える。B は、$X=\mathbb{I}^2$ の境界の一部と同相である。$f(B)$ は 1 つの連結成分しかもたない。すなわち、$\mathbb{I}^2$ の境界上の区間と同相である。B は、$\mathbb{I}^2$ 上の曲線 ($\mathbb{I}$ の同相な像) であり、B の両端は X の境界上の点であり、曲線 B は、X を X_0 と X_1 に分断していることが分かる。よって、B と $f(B)$ の位置関係は、$\mathbb{I}^2$ を円板に同相変換して、B の両端を b_0, b_1, $f(B)$ の両端を a_0,a_1 とすると、下図の様に分類できる。ここで、b_0, b_1 のどちらが a_0,a_1 に対応するかで、それぞれに、2 つづつの場合がある。



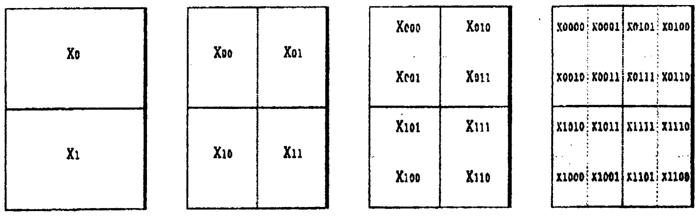
この中で、c) で $a_0=f(b_0)$ の場合について、S_n $(n=0,1,2,\ldots)$ への分割の形状を調べる。$\varphi_S(d)$ のことを、X_d と書くことにする。まず、X と $X_1\cup B$ の同相 g_1 による B の像 $g_1(B)$ は、B と交わることがない。よって、b_0, b_1 の像 c_0, c_1 は、b_0, b_1 の円弧上にあることになる。よって、これらと a_0, a_1 の位置関係は、a_0, a_1 と c_0, c_1 の位置関係により、6 通り考えられる。その中で、a_0, c_0, a_1, c_1 の順に並ぶ場合を図示したのが図の g) である。



この場合には、c_0 が $f(B)$ 上にのっていることにより、その g_1 による像は B に乗ることになる。g_1 による $g_0(B)$ の像については、c_0 から c_1 までの円弧上にあるが、それが a_1 との位置関係で 3 つの場合がある。両端ともに $f(B)$ 上にある場合を図示したのが h) であり、それについて、さらに f による逆像を図示したのが i) である。このように、分割を繰り返しても、$X_{111\ldots}$ の領域は半径が小さくならない。よって、これは部分基を生成しない。d), e), f) についても同様である。特に、これ

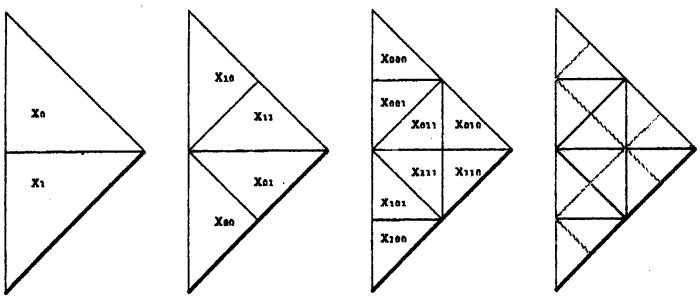
らの場合には、c_0, c_1 に相当する点が B 上にあり、c) のときのように、$f(B)$ との位置関係による場合分けが存在しないことに注意されたい。

a) と b) の場合には、部分基を生成するような力学系が存在する。a) の場合の代表が、下図のⅡの Gray-subbase の直積である。ここで、力学系 f は、長方形を下に折り返し、$\sqrt{2}$ 倍に拡大し 90 度右に回転する写像である。



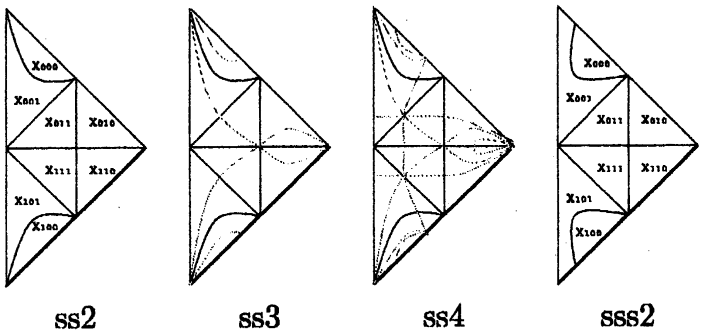
h0　h1　h2　h3

b) の場合の代表が、下図の Sierpinski の平面充填曲線に対応する分割である。ここで、力学系 f は、直角二等辺三角形を下に２つに折り返し、$\sqrt{2}$ 倍に拡大し、135 度右に回転する写像である。



s0　s1　s2　s3

もちろん、a), b) の場合の力学系により生成される二分的部分基が、これらと共役な写像で生成されるものだけではない。例えば、b) の場合で、s2 の絵が下 ss2 図のように、$f(B)$ の端点と $f^{-2}(B)$ の端点が重なる場合がある。このときには、$f^{-3}(B)$、$f^{-4}(B)$ は、位相的に、下 ss3, ss4 図のようになる。このように、これ以降の $f^{-n}(B)$ による分割の様子は位相的に一意に決まり、これにより導出される部分基が存在する。また、b) の場合で、s2 の絵は 下 sss2 図の様になる場合もある。この場合にも、これ以降の $f(B)$ の端点と $f^{-n}(B)$ の端点の位置関係で、様々な力学系が考えられ、その中で、部分基を生成するものと生成しないものがある。また、これらの力学系は、$f(B)$ の端点に与えられるコードで、共役を除いて一意的に決定されることが分かる。



ss2　ss3　ss4　sss2

a), b) の場合で、どのような力学系が考えられ、そのうちのどの場合に部分基が生成されるか、また、その部分基が、$f(B)$ の端点のコードによりどのように変化するか精密に調べることが、今後の課題である。また、竹内泉氏から、これらの $\mathbb{I}^2$ 上の二分的部分基を生成する力学系が、リーマン球面上の有理関数による力学系により統一的に取り扱えるとの指摘を頂いた。その方向で、研究をすすめていきたい。

謝辞 竹内泉氏に感謝します。また、立木は、科研費(課題番号 15500010)の補助を受けています。

References

[1] Hideki Tsuiki. Computational dimension of topological spaces. In *Computability and Complexity in Analysis*, *LNCS 2064*, 323–335, 2001.

[2] Hideki Tsuiki. Real number computation through gray code embedding. *Theoretical Computer Science*, 284(2):467–485, 2002.

[3] Hideki Tsuiki. Compact metric spaces as minimal-limit sets in domains of bottomed sequences. *Mathematical Structure in Computer Science*, 14:853–878, 2004.

[4] Hideki Tsuiki. dyadic subbases and efficiency properties of the induced $\{0, 1, \perp\}^\omega$-representations *Topology Proceedings*,28(2):673–687, 2004.

[5] Hideki Tsuiki, Shuji Yamada. Efficient Codings of Topological Spaces. In preparation.

[6] Klaus Weihrauch. *Computable analysis, an Introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.