数理解析研究所講究録
1485巻 2006年 69-78

一般化大域結合写像における分岐構造

ー　GCMからCMLに至るカオス的遍歴領域の変化　ー

帝京科学大学　小室　元政（KOMURO Motomasa）
Teikyo University of Science & Technology

§0　はじめに

大域結合写像(Globally Coupled Map (GCM))は、カオス力学系を平均場で結合させたシステムである。結合写像格子(Coupled Map Lattice (CML))は、カオス力学系を隣接結合で結合させたシステムである。どちらも、カオス力学系の高次元結合系としての典型的なモデルであり、複雑力学系を理解する手法を確立する上で、重要なモデルシステムである。この報告では、GCM と CML をパラメータ σ で結び、$\sigma=1$ の時には GCM、$\sigma=0$ の時には CML となるようなシステム（一般化大域結合写像(Generalized GCM (GGCM))を考え、分岐集合、安定周期点領域、カオス的遍歴領域などが変化する様子を解明する。

GCM においては、カオス的遍歴を特徴付ける量として、有効次元の時間変動が用いられたが、GGCM においては、この量ではカオス的遍歴に相当する振る舞いを特徴付けることができない。ここでは、その代わりに、「偏差の絶対値の分散の時間変動」という量を提案する。

§1　一般化大域結合写像

カオス力学系　$x(t+1)=g_a(x(t))$　を次の仕方で結合させたシステムを一般化大域結合写像(Generalized GCM (GGCM))という。

$$\begin{bmatrix} x^1(t+1) \\ x^2(t+1) \\ \vdots \\ x^N(t+1) \end{bmatrix} = [(1-\varepsilon)I+\varepsilon C] \begin{bmatrix} g_a(x^1(t)) \\ g_a(x^2(t)) \\ \vdots \\ g_a(x^N(t)) \end{bmatrix}$$

$$C=\frac{1}{(N-2)\sigma+2}\begin{bmatrix} \sigma & 1 & \sigma & \cdots & \sigma & 1 \\ 1 & \sigma & 1 & \sigma & \cdots & \sigma \\ \sigma & 1 & \sigma & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma & 1 & \sigma \\ \sigma & \cdots & \sigma & 1 & \sigma & 1 \\ 1 & \sigma & \cdots & \sigma & 1 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{cases} c_{ij}=1 \ (i-j=1 \ \mathrm{mod}\, N) \\ c_{ij}=\sigma \ (otherwise) \end{cases}$$

ここでは、カオス力学系として、ロジスティック写像 $g_a(x)=1-ax^2$ を用いる。パラメータ a は、カオス性の強さを表し、パラメータ ε は結合の強さを表すと考えられる。パラメータ σ は 1 のときは平均場結合となり、0 のときは隣接結合となる。

§2　分岐曲線の追跡

GGCM では、$\varepsilon=0$ の時には、単なる直積力学系である。直積力学系の安定周期点は、$g_a(x)$ の安定周期点の組み合わせによって得られる。直積系の安定周期点を初期値に取り、パラメータ ε を

徐々に変化させることにより、安定周期点領域の境界、すなわち分岐曲線を探索する。

図1は$N=10, \sigma=1$のGGCMにおいて、g_aの安定2周期点（これを記号0,1で表す）を組み合わせた安定2周期点(0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)から出発して、εを上方に0.001づつ変化させ、サドルノード分岐曲線を追跡する様子を示したものである。分岐点に到達したときは、aを変化（たとえば、0.001）させる。このときの初期値は、分岐曲線の点のεよりも、下方（たとえば 0.001 下方）に設定する。そして再び、上方に分岐点を探索する。このプロセスの繰り返しにより、分岐曲線のデータを得ることができる。この分岐曲線のデータは、0.001の精度で、最後の安定2周期点に属しており、この点を初期値にεを下方に変化させることにより、安定周期点領域を描画することができる。図2は$N=10, \sigma=1$のGGCMにおいて、安定2周期点(0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)が属する安定2周期点領域を描画したものである。aを0.1刻みで、0.08から1.9まで変化させたときの分岐図（横軸$-2 \le x \le 2$、縦軸$0 \le \varepsilon \le 0.5$）を重ねがきしたものである。この場合、安定2周期点領域の下の境界は、ナイマルク・サッカー分岐曲線によって区切られていることが分かる。

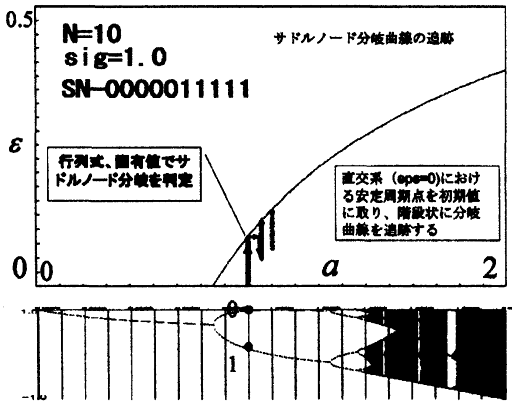

図1

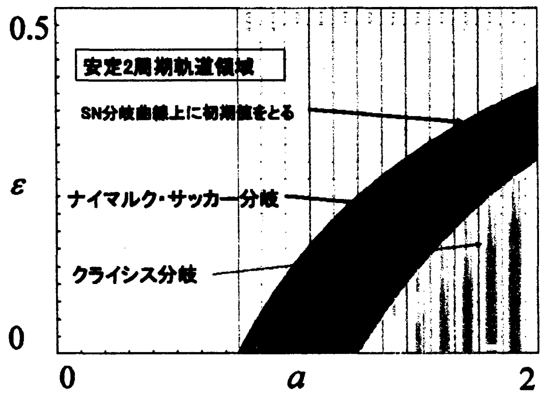

図2

§3　4次元GGCM

4次元 GGCM に対して分岐曲線の変化を追跡する。パラメータ平面は横軸$0 \le a \le 2$、縦軸$0 \le \varepsilon \le 0.5$である。

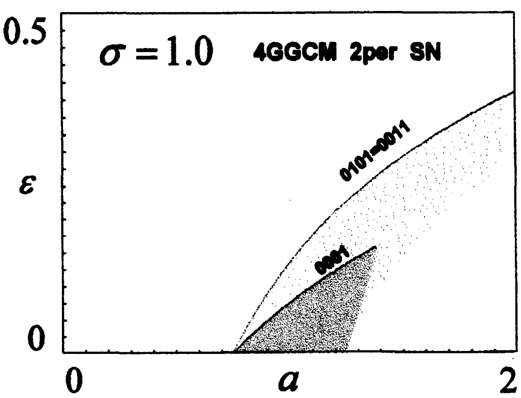

図3(1)

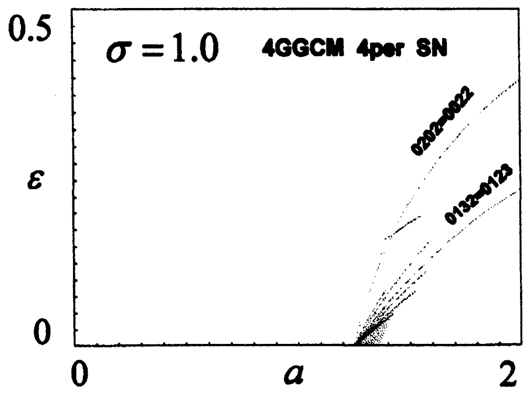

図3(2)

図3(1),(2)は、$\sigma=1$のとき（すなわち、GCM）に、直積系から出発して得られる、2周期，4周期の安定周期点の境界（サドルノード分岐、周期倍分岐）を重ねて描いたものである。GCMは変数の任意の置換に対して、不変であるために、たとえば、安定2周期点(0,1,0,1)と(0,0,1,1)の分岐曲線は同一である。図4(1)-(4)は2周期と4周期の分岐曲線、安定周期点領域を重ね書きした図である。((1):$\sigma=1.0$, (2):$\sigma=0.5$, (3):$\sigma=0.3$, (3):$\sigma=0.0$）σを1から0に向けて変化させると、同一であった分岐曲線が分離していく様子が分かる。

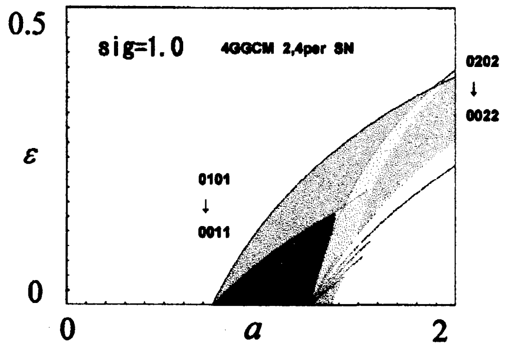

図4(1)

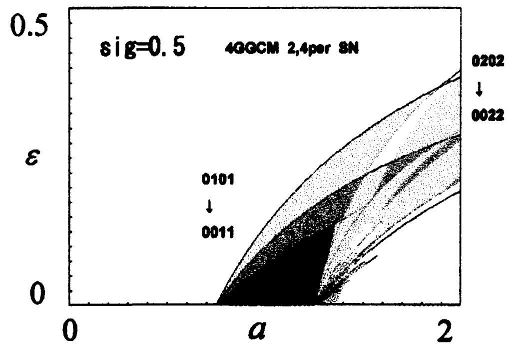

図4(2)

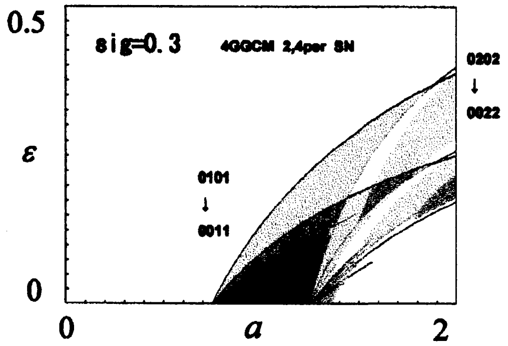

図4(3)

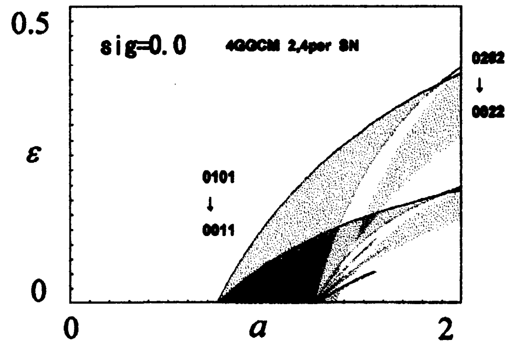

図4(4)

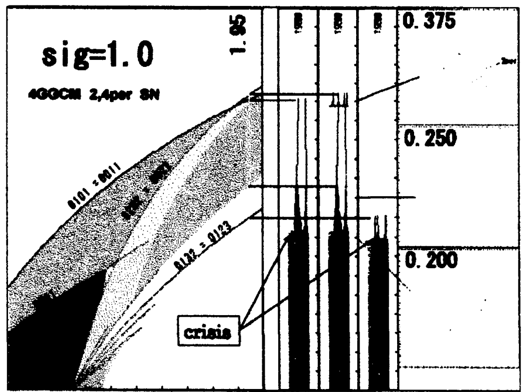

図5(1)

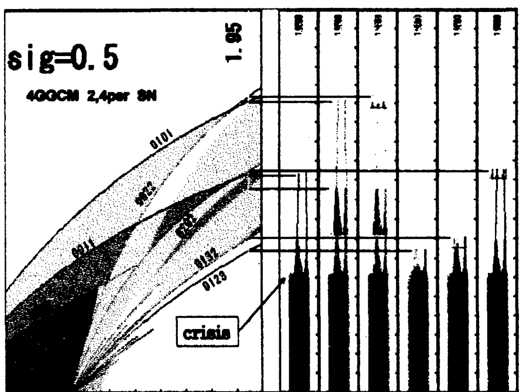

図5(2)

また、図5(1)-(3)は$\sigma=1.0,\ 0.5,\ 0.0$の場合に、左側には、分岐曲線と安定周期点領域（横軸$1\leq a\leq 2$、縦軸$0\leq \varepsilon\leq 0.5$）の図を配し、右側には、$a=1.95$で切ったときの分岐図（横軸$-2\leq x\leq 2$、縦軸$0\leq \varepsilon\leq 0.5$）を配したものである。一番大きな安定2周期点領域が、σの減少に伴って、上方に点(0,1,0,1)の領域、下方に上方に点(0,0,1,1)の領域というように、2つに分離していく様子が分かる。

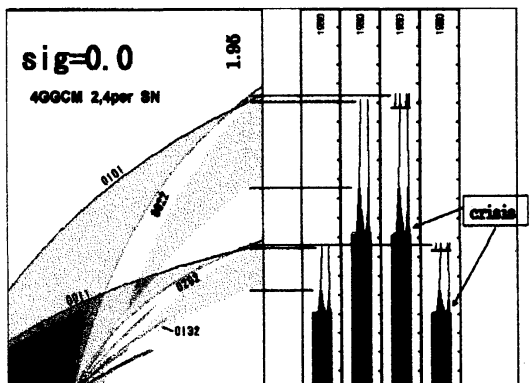

図5(3)

§4　カオス的遍歴の特性量

GCMにおいては、カオス的遍歴を特徴付ける量として、有効次元の時間変化が用いられる。これは、GCMが変数の任意の置換に対して不変であり、種々の次元の不変部部分空間を持つこと、カオス的遍歴は、種々の次元の不変部部分空間上でクライシスによって崩壊したアトラクタの残骸の間を軌道が経巡る振る舞いと解釈できることによる。しかし、$\sigma\neq 1$である、GGCMにおいてはこのような対称性は崩れており、カオス的遍歴と呼べる振る舞いが観測されるにもかかわら

ず、これを特徴付ける量として有効次元の時間変化の使用は有効ではない。ここでは、クライシスの前後を特徴付ける量として、「偏差の絶対値の分散(Variation of Absolute Deviation (VAD))」を、カオス的遍歴を特徴付ける量として、VAD の時間変化に関する分散を提案する。(図 6(1)-(2)参照)

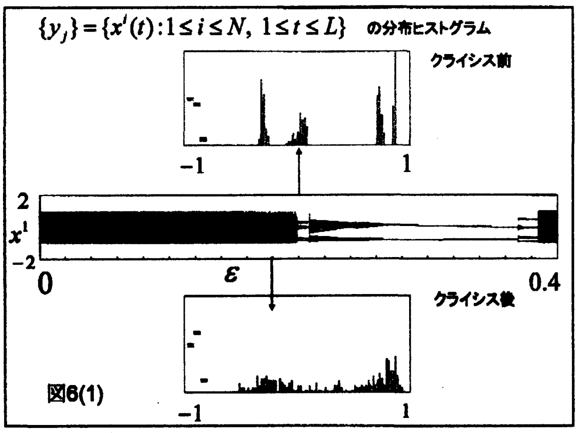

図6(1)

クライシスの前と後を区別する量

$x_i-\bar{x}$ 　偏差 (deviation)

$y_i=|x_i-\bar{x}|$ 　偏差 (deviation)の絶対値

$$V(\{|x_i-\bar{x}|\})=V(\{y_i\})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

偏差 の絶対値の分散
(Variation of Absolute Deviation, VAD)

図6(2)

図 7(1)は 4 次元の GCM($\sigma=1$)において、$a=1.95$ を固定したとき、ε 毎に長さ 1000 の軌道を取り VAD を計算したものである。図 7(2)は、同様に、ε 毎に、長さ 1000 の軌道を 1 ステップづつ、16 ステップまで移動させたときの VAD の時間変化の分散(Variation of VAD(VVAD)) を計算したものである。クライシスを境に VAD の時間変化の分散が大きくなっていることが分かる。

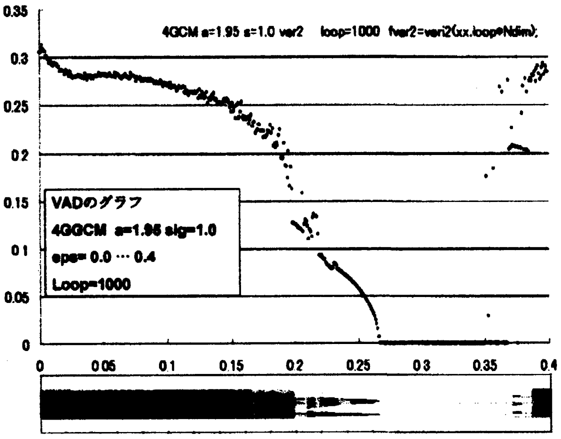

図7(1)

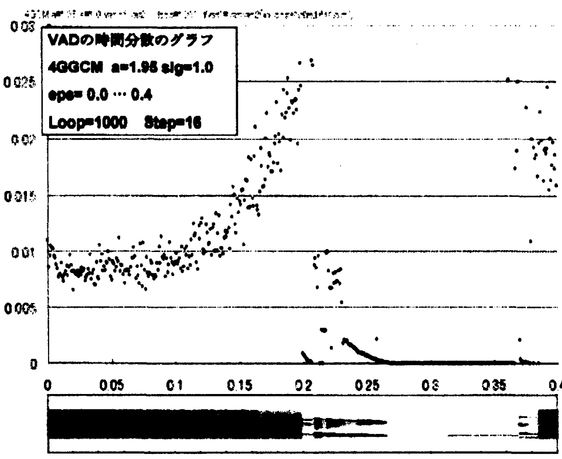

図7(2)

図 8 は 4 次元の GCM($\sigma=1$)において、VVAD が大きい (0.013 以上) パラメータ領域と、分岐曲線を重ねた図である。VVAD が大きいのは、1 次元部分空間が横断的に安定となるコヒーレント領域とカオス的遍歴に対応する領域とにおいてであることが分かる。図 9(1)-(6)は σ を変化させたときの、VVAD が大きい (0.013 以上) 領域の変化を示している。σ の減少に伴って、一番大きな安定 2 周期点領域が、2 つに分離していくことを前節で述べたが、これと呼応して、カオス的遍歴領域が 2 つに分離していく様子が分かる。

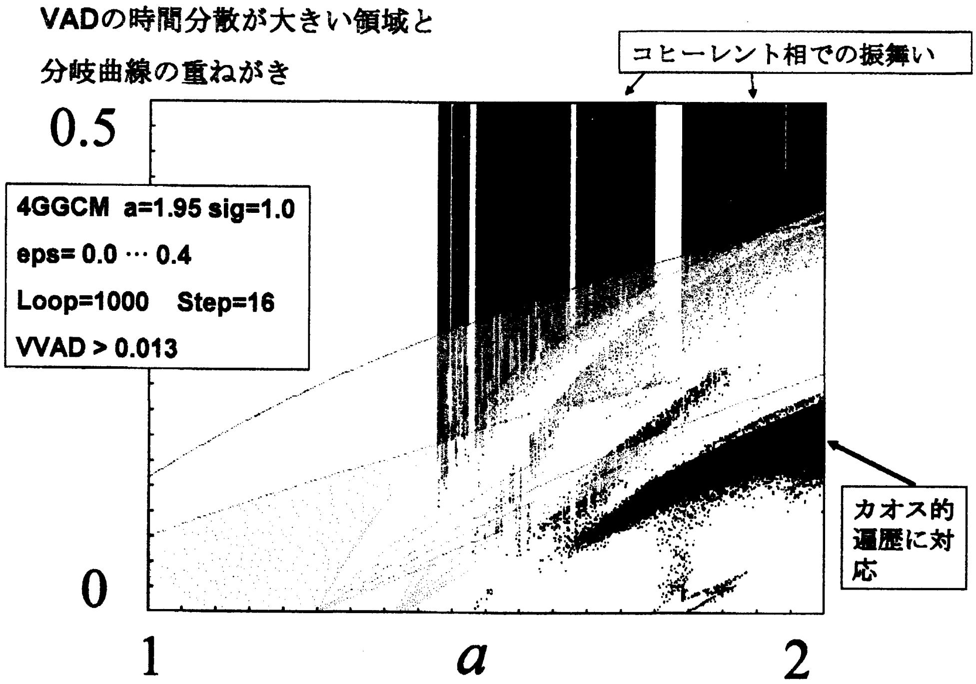

図8

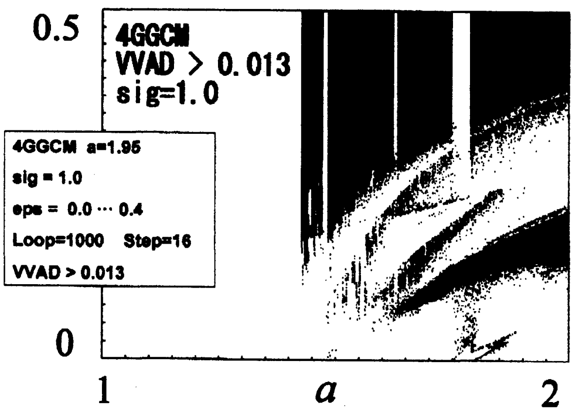

図9(1)

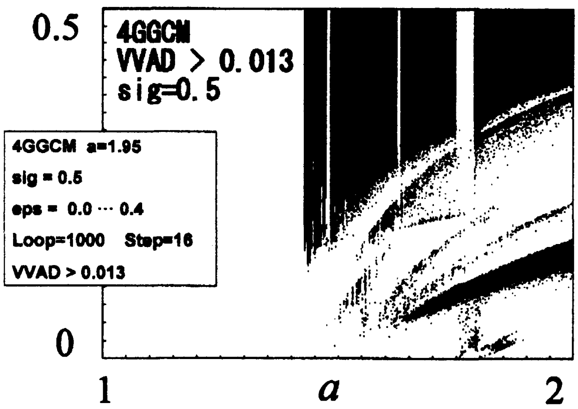

図9(2)

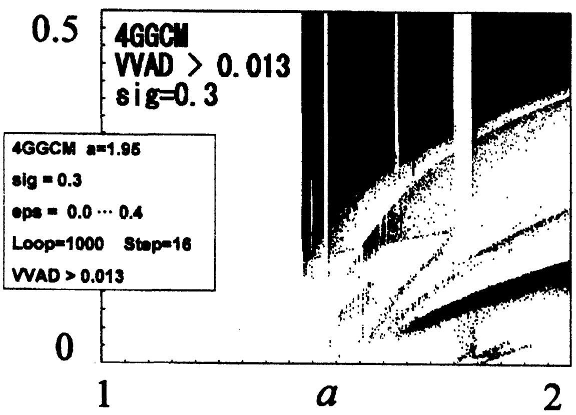

図9(3)

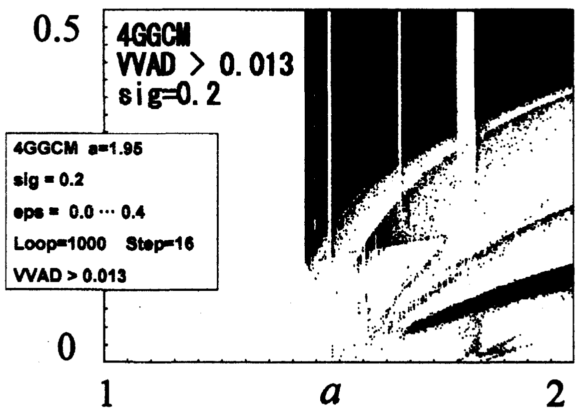

図9(4)

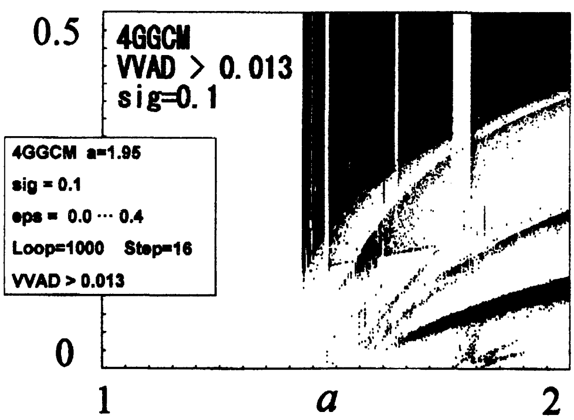

図9(5)

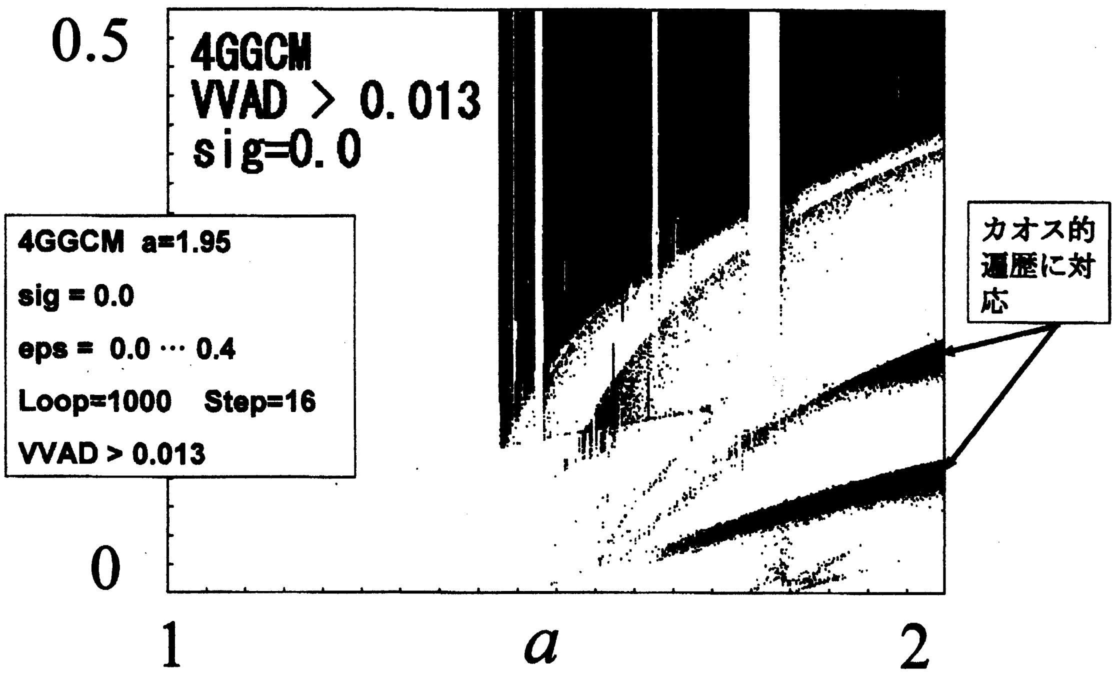

図9(6)

§6 10次元GGCM

図10(1)-(11)は、10次元GGCMに対して、直積系から出発して得られる2周期の安定周期点の境界（サドルノード分岐、周期倍分岐）曲線を、σを変化させて追跡したものである。((1):$\sigma=1.0$, (2):$\sigma=0.9$, (3):$\sigma=0.8$, (4):$\sigma=0.7$, (5):$\sigma=0.6$, (6):$\sigma=0.5$, (7):$\sigma=0.4$, (8):$\sigma=0.3$, (9):$\sigma=0.2$, (10):$\sigma=0.1$, (11):$\sigma=0.0$） 横軸$0\le a\le 2$、縦軸$0\le \varepsilon\le 0.5$である。

図11(1)-(11)は、10次元GGCMに対して、σを変化させたときの、VVADが大きい（0.013以上）領域の変化を示している。((1):$\sigma=1.0$, (2):$\sigma=0.9$, (3):$\sigma=0.8$, (4):$\sigma=0.7$, (5):$\sigma=0.6$, (6):$\sigma=0.5$, (7):$\sigma=0.4$, (8):$\sigma=0.3$, (9):$\sigma=0.2$, (10):$\sigma=0.1$, (11):$\sigma=0.0$） 横軸$1\le a\le 2$、縦軸$0\le \varepsilon\le 0.5$である。（横軸は図10と異なっている） 4次元GGCMと同様に、カオス的遍歴領域が2つに分離する様子が分かる。4次元GGCMの場合と比べると、上方のカオス的遍歴領域が大きくなっている。

図12(1)は、$\sigma=0.0$の場合に、分岐曲線に対応する直積系の2周期点のタイプを記したものである。図12(2)は、さらに、$\varepsilon=0.10$から0.05刻みで、0.35までの分岐図（縦軸$-2\le x\le 2$、横軸$0\le a\le 2$）とVVADが大きい（0.013以上）領域を重ねがきしたものである。

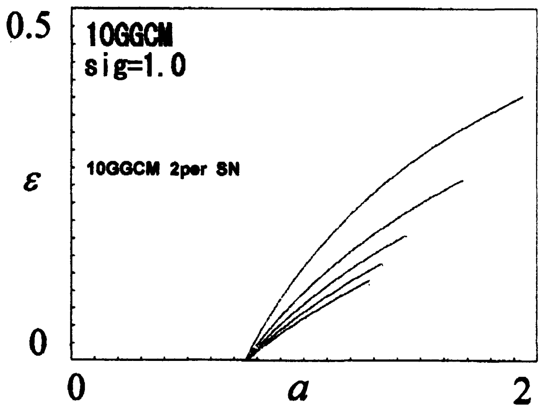

図10(1)

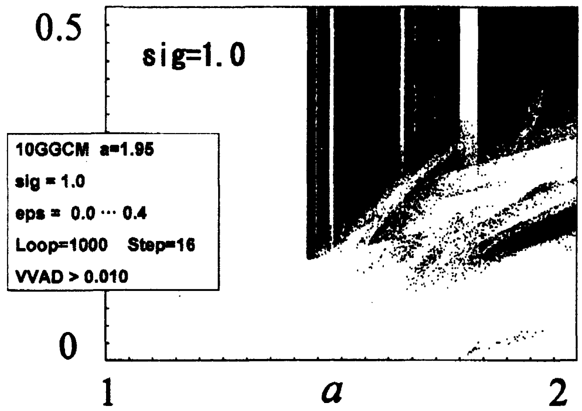

図11(1)

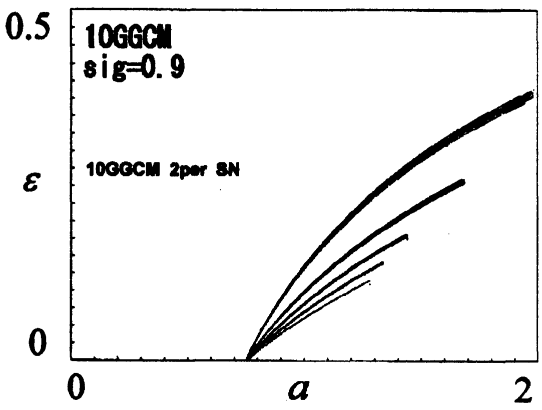

図10(2)

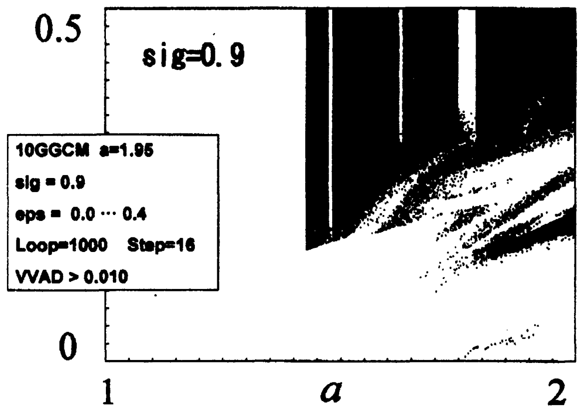

図11(2)

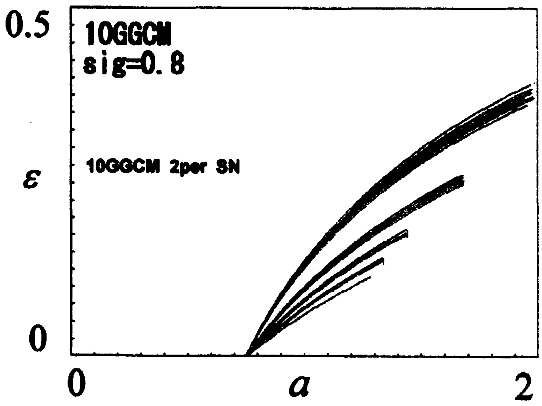

図10(3)

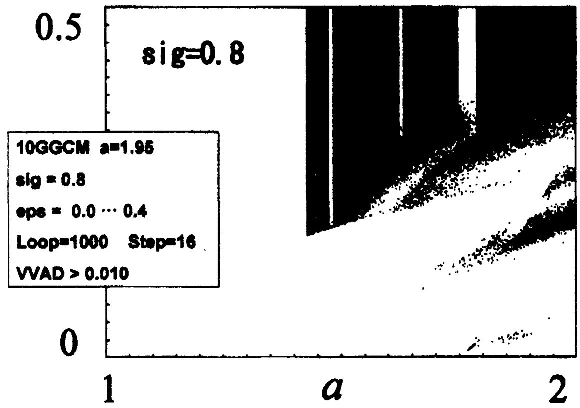

図11(3)

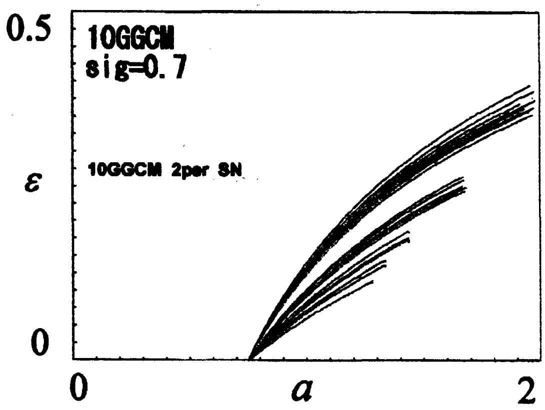

図10(4)

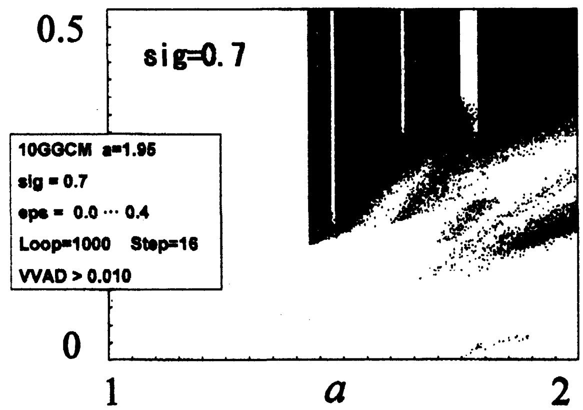

図11(4)

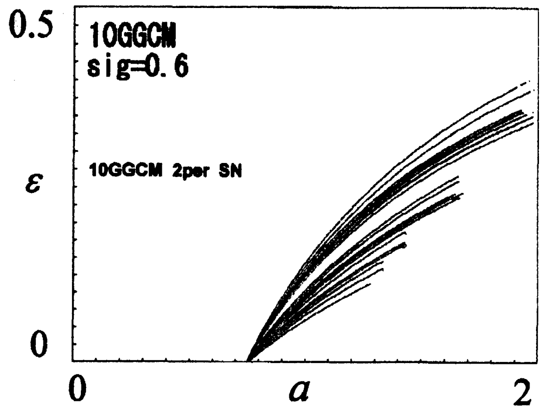

図10(5)

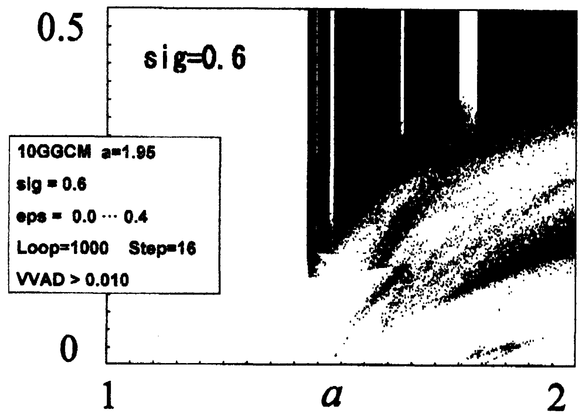

図11(5)

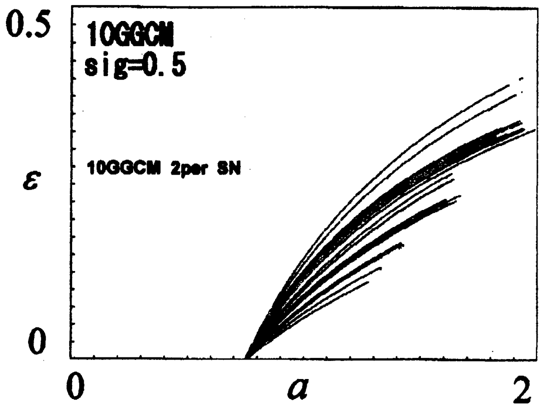

図10(6)

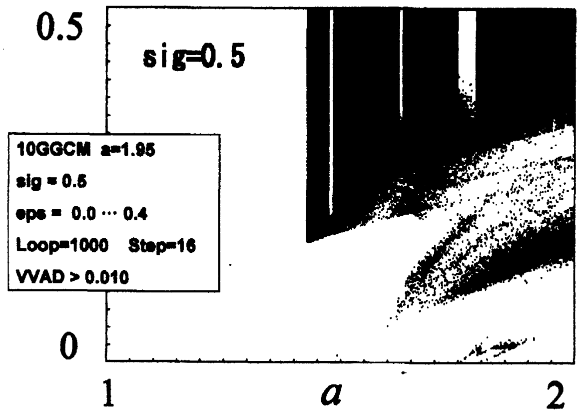

図11(6)

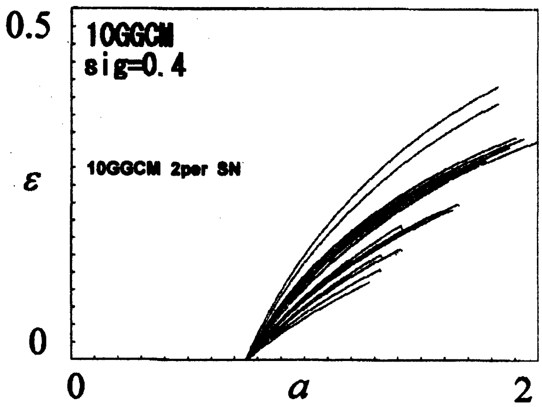

図10(7)

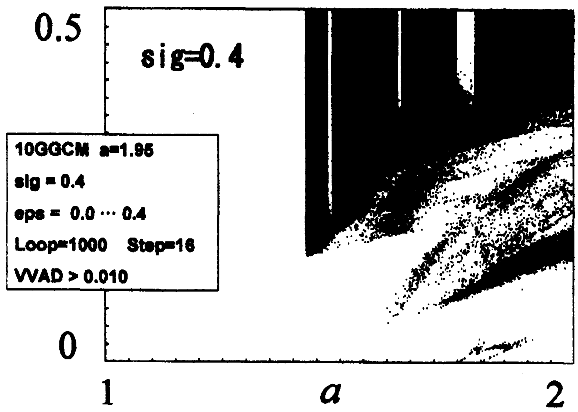

図11(7)

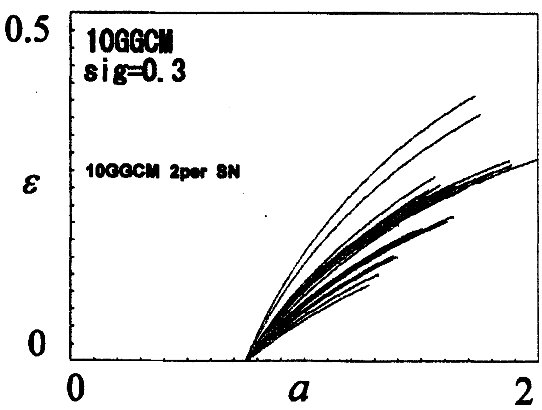

図10(8)

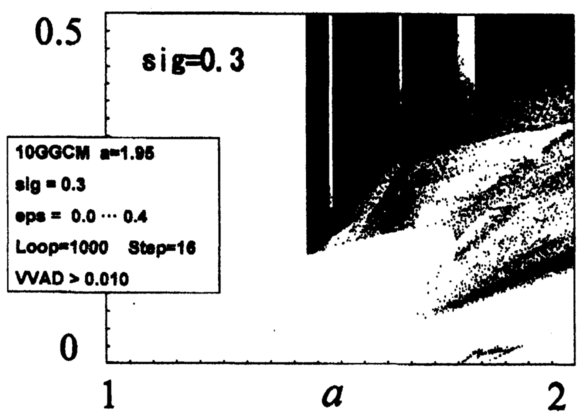

図11(8)

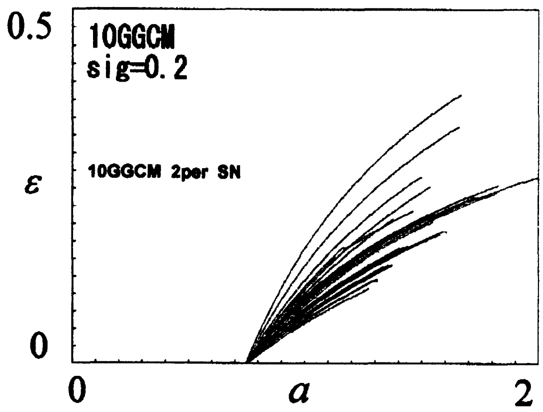

図10(9)

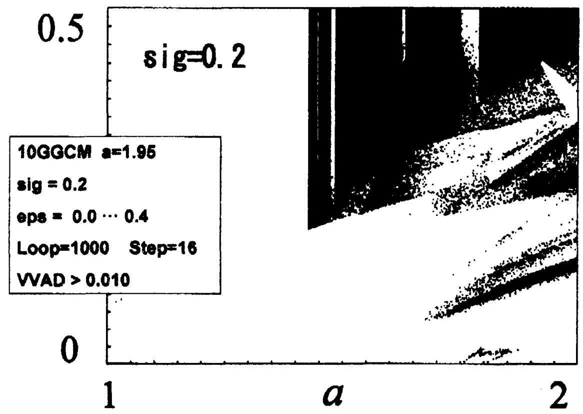

図11(9)

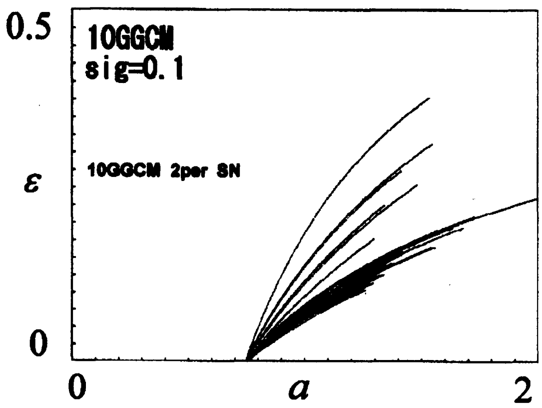

図10(10)

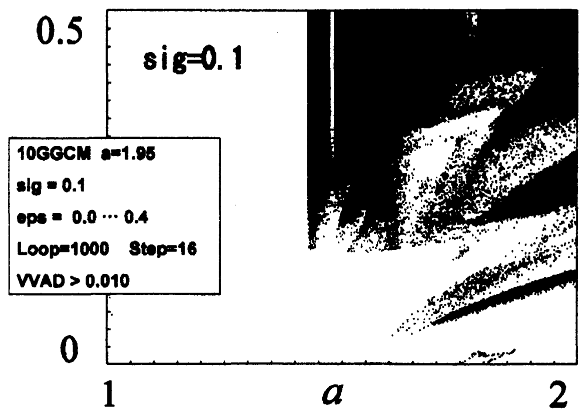

図11(10)

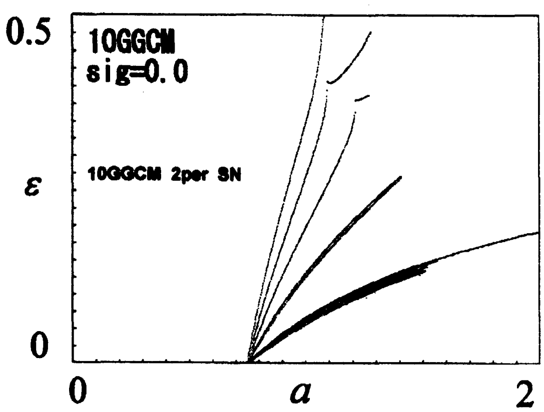

図10(11)

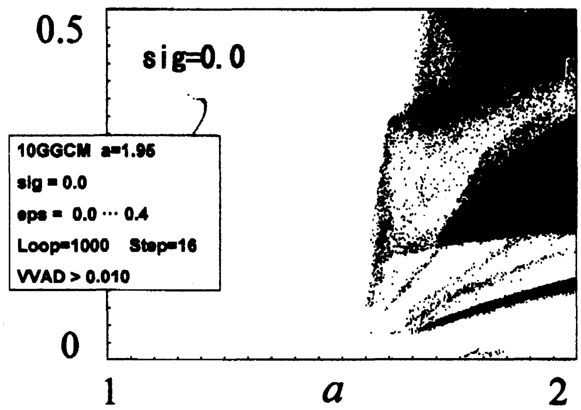

図11(11)

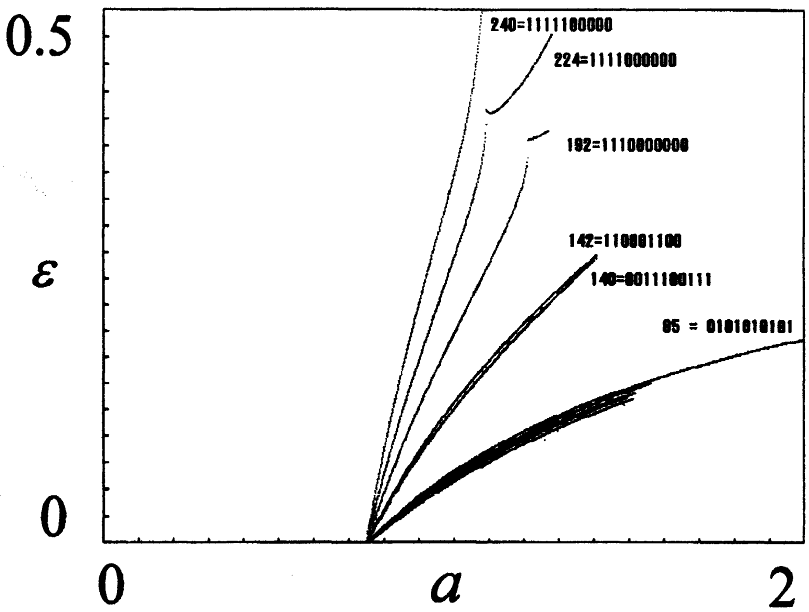

図12(1)

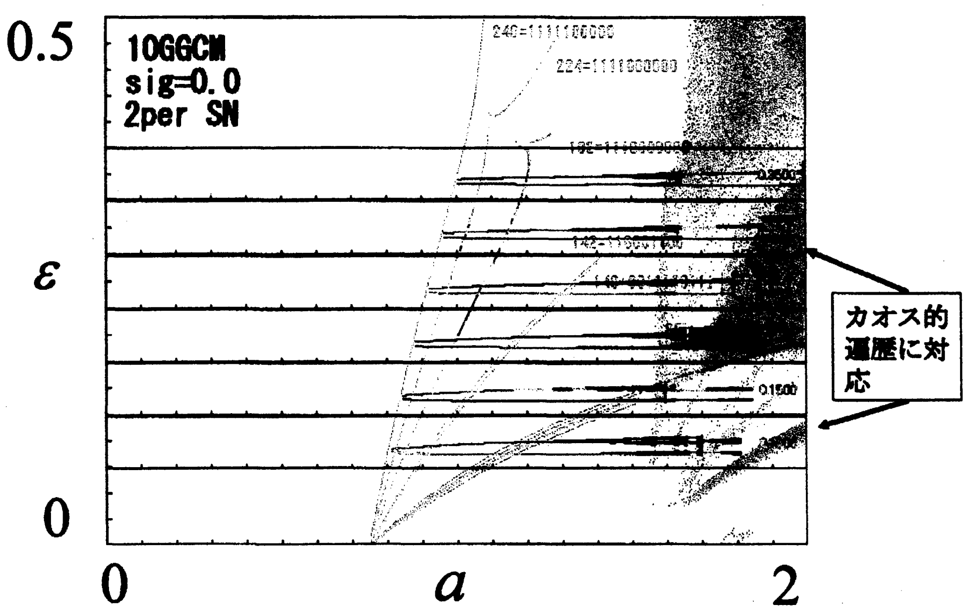

図12(2)

参考文献

[1] 金子邦彦・津田一郎著,「複雑系のカオス的シナリオ」複雑系双書 1, 朝倉書店 1996

[2] 小室元政「大域結合写像におけるカオス的遍歴の発生機構」物性研究 Vol.78, no.4 (2002 年 7 月) pp.397--411.