数理解析研究所講究録
1486 巻 2006 年 41-51

非可換 L_p-空間

京都大学大学院理学研究科 太田 崇啓 (Takahiro Ohta)
Graduate School of Science,
Kyoto University

1 Haagerup L_p-空間

この回は Q. Xu [6] の結果について少し紹介する. 半有限 von Neumann 環 M 上のトレースからできる L_p-空間 に対する Grothendieck 不等式は Lust-Piquard と Kwapien の各結果から導かれる. Lust-Piquard の結果とは, $2<p\leq\infty$, H を Hilbert 空間とするとき任意の有界線型写像 u: $L_p(M)\rightarrow H$ に対し正の単位元 $f_1, f_2\in(L_{p/2}(M))^*$ で $a\in L_p(M)$ ならば

$$\|u(a)\|\leq K_0\|u\|[f_1(aa^*)+f_2(a^*a)]^{1/2}$$

を満たすものが存在するというものである [2]. ここで K_0 は p, M, H, u に依存しない定数である. また, Kwapien の結果とはここでは $L_p(M)$ の場合のみ述べるが, $1\leq p\leq 2\leq q\leq\infty$ ならば任意の有界線型写像 v: $L_q(M)\rightarrow L_p(M)$ はある Hilbert 空間 H を通るように有界線型写像の積に分解されるというものである [4, Corollary 3.6]. これら 2 つの結果を用いると容易に以下のことがいえる; 任意の有界双線型形式 u: $L_p(M)\times L_q(M)\rightarrow \mathbb{C}$ $(2<p, q\leq\infty)$ に対し正の単位元 $f_i\in(L_{p/2}(M))^*$ と $g_i\in(L_{q/2}(M))^*$ $(i=1,2)$ で $a\in L_p(M)$, $b\in L_q(M)$ ならば

$$|u(a, b)|\leq K\|u\|[f_1(aa^*)+f_2(a^*a)]^{1/2}[g_1(b^*b)+g_2(bb^*)]^{1/2}$$

をなるものが存在する. ここで K は p, q, M, u に依らない定数である. ここからはこの不等式を一般の M とその閉部分空間に対象を変えて考察していく.

まずは半有限とは限らない一般の von Neumann 環に対する Haagerup の L_p-空間について述べる. 詳しいことは [5] に書いてある. M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環, ϕ を M 上の正規忠実半有限重みとする. そのとき, M 上のモジュラ自己同型群 $(\sigma_t^{\phi})_{t\in\mathbb{R}}$ が定まる. 接合積 $N=M\rtimes_{\sigma_t^{\phi}}\mathbb{R}$ は $L_2(\mathbb{R};H)$ 上の作用素

$$\pi(x)\xi(t)=\sigma_{-t}^{\phi}(x)\xi(t), \qquad x\in M,\ \xi\in L_2(\mathbb{R};H)$$
$$\lambda(s)\xi(t)=\xi(t-s), \qquad s\in\mathbb{R},\ \xi\in L_2(\mathbb{R};H)$$

によって生成される von Neumann 環である. M の元 x と $\pi(x)$ とを同一視することで M を N の部分 von Neumann 環とみなす. そのとき, N 上の双対作用と呼ばれる自己同型群 $(\theta_s)_{s\in\mathbb{R}}$ が

$$\begin{aligned} &\theta_s(x) = x, && x \in M \\ &\theta_s\lambda(t) = e^{-ist}\lambda(t), && s,t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

によって定まる. このとき, 双対作用で不変なものは M である, すなわち

$$M = \{x \in N \colon \forall s \in \mathbb{R},\ \theta_s(x) = x\}.$$

N は半有限 von Neumann 環でありその上の正規忠実半有限トレース τ で

$$\theta_s \circ \tau = e^{-s}\tau$$

を満たすものが存在する.

定義 1.1. M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環とする. H 上の作用素 a が M に加わっているとは, 任意の $y \in M'$ に対し $ya \subseteq ay$ であることをいう.

定義 1.2. M を Hilbert 空間 H 上の 半有限 von Neumann 環, τ を M 上の正規忠実半有限トレースとする. H 上稠密なところで定義された M に加わっている閉作用素 h が τ-可測であるとは, 任意の $\delta > 0$ に対し M の射影 p で

$$pH \subseteq D(a),\ \tau(1-p) \le \delta$$

なものが存在するときをいう. $L_0(M,\tau)$ を τ-可測な作用素の集合とする. これの原点の基本近傍系を

$$\begin{aligned} N(\varepsilon,\delta) = \{a \in L_0(M,\tau) \colon \exists p \in \mathrm{proj}(M) \text{ s.t.} \\ pH \subseteq D(a),\ \|ap\| \le \varepsilon,\ \tau(1-p) \le \delta\} \end{aligned}$$

で定義すると, $L_0(M,\tau)$ は位相的 $*$-環になる.

今, $0 < p \le \infty$ に対し

$$L_p(M,\phi) = \{h \in L_0(N,\tau) \colon \theta_s h = e^{-s/p}h\}$$

と定義する. そのとき $L_\infty(M,\phi) = M$ であり, $L_p(M,\phi)$ は $L_0(N,\tau)$ の自己共役な閉部分空間であり, 同型を除いて ϕ によらない. よって以降問題が無いときは $L_p(M,\phi)$ を $L_p(M)$ とかく.

命題 1.1. 作用素 $h \in L_0(N,\tau)$ に対し, $h = u|h|$ をその極分解とすると,

$$h \in L_p(M) \Leftrightarrow u \in M \text{ かつ } |h| \in L_p(M)$$

定理 1.2. M_* から $L_1(M)$ への同相写像 $\varphi \mapsto h_\varphi$ で

$$h_{x\cdot\varphi\cdot y^*} = xh_\varphi y^*, \quad \varphi \in M_*, \ x, y \in M$$

なものが存在する.

この同型写像により $L_1(M)$ 上にノルムが

$$\|h_\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{M_*}$$

によって入る. さらに $L_1(M)$ 上の正線型汎関数 tr が

$$\mathrm{tr}(h_\varphi) = \varphi(1), \ \varphi \in M_*$$

で定義される.

定理 1.3. $0 < p < \infty$ に対し, N_+ 上の写像 $x \mapsto x^p$ は $L_0(N,\tau)_+$ 上に拡張され,

$$h \in L_p(M) \Leftrightarrow h^p \in L_1(M), \ \forall h \in L_0(N,\tau)_+$$

である. さらに, $1 \leq p < \infty$ のとき $h \in L_p(M)$ に対し $\|h\|_p = \||h|^p\|_1^{1/p}$ とすると, これにより $L_p(M)$ は Banach 空間になる.

定理 1.4. $1 \leq p, q \leq \infty$ とする. $h \in L_p(M)$, $k \in L_q(M)$ に対し, $hk \in L_r(M)$ $(1/r = 1/p + 1/q)$ で, なおかつ $\|hk\|_r \leq \|h\|_p\|k\|_q$ が成り立つ.

定理 1.5. $p \neq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ ならば, $L_p(M)$ の双対空間は $L_{p'}(M)$ である.

ここで作用素空間の複素補間空間について述べる. E_0, E_1 が作用素空間であって Banach 空間のカテゴリーでは両立対であるとき, $0 < \theta < 1$ に対し複素補間空間エントリーの行列 $M_n((E_0, E_1)_\theta)$ に同一視

$$M_n((E_0, E_1)_\theta) = (M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta$$

によって行列ノルムを入れると複素補間空間 $(E_0, E_1)_\theta$ には作用素空間の構造が入る.

以上のことから非可換 L_p-空間に作用素空間としての構造が以下のようにして入る. まず $L_\infty(M) = M$ は von Neumann 環として作用素空間の構造を持っている. また $L_1(M) = M_*$ には $(M^{op})^*$ の部分空間としての作用素空間であるとする. ここで M^{op} とは M の積順序を逆にした von Neumann 環である. すると一般の p に対しては作用素空間の構造を複素補間空間

$$L_p(M) = (L_\infty(M), L_1(M))_{1/p}$$

として入れることができる. なぜ M のかわりに M^{op} を考えるかというと以下のよい性質がいえるからである.

補題 1.6. von Neumann 環 M に対し完全等長的に $S_1^n \otimes_\wedge L_1(M) = L_1(M_n \otimes M)$ が成り立つ.

証明. [1] $x_{ij} \in L_1(M)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ とする. $(S_1^n \otimes_\wedge M_*^{op})^* = CB(M_*^{op}, M_n) = M_n(M^{op})$ より,

$$\begin{aligned}
\|[x_{ij}]\|_{S_1^n \otimes_\wedge M_*^{op}} &= \sup_{\|(y_{ij})\|_{M_n(M^{op})} \leq 1} \left| \sum_{i,j=1}^n x_{ij}(y_{ij}) \right| \\
&= \sup_{\|(y_{ij})\|_{M_n(M)} \leq 1} \left| \sum_{i,j=1}^n tr(y_{ji} x_{ij}) \right| \\
&= \sup_{\|(y_{ij})\|_{M_n(M)} \leq 1} |tr_n \otimes tr([y_{ij}][x_{ij}])| \\
&= \|[x_{ij}]\|_{L_1(M_n \otimes M, tr_n \otimes \phi)}
\end{aligned}$$

□

2 ベクトル値 Schatten クラス

これ以降は, $1 \leq p \leq \infty$ に対し p' を $1/p + 1/p' = 1$ なる数とする. 作用素空間 E に対し, $S_1[E] = S_1 \otimes_\wedge E$, $S_\infty[E] = S_\infty \otimes_{\min} E$ とする. $1 < p < \infty$ に対しては $S_p[E]$ を補間空間

$$(S_\infty[E], S_1[E])_{1/p}$$

と定義する. S_p^n $(n \in \mathbb{N})$ に対する $S_p^n[E]$ も同様にして定義する. 補間空間の反復定理により, E_0, E_1 が Banach 空間として両立対であるような作用素空間であるならば $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ と $0 < \theta < 1$ に対し

$$(S_{p_0}[E_0], S_{p_1}[E_1])_\theta = S_p[(E_0, E_1)_\theta], \ 1/p = 1/p_0 + p_1$$

が成り立つ. また, $1 \leq p < \infty$ に対し完全等長的に

$$(S_p[E])^* = S_{p'}[E^*]$$

である. この双対性は $x = (x_{ij}) \in S_p[E]$, $\xi = (\xi_{ij}) \in S_{p'}[E^*]$ に対し

$$\langle \xi, x \rangle = \mathrm{tr}(\xi x) = \sum_{ij} \xi_{ij}(x_{ij})$$

で与えられる.

特に, $E = L_p(M)$ $(1 \leq p < \infty)$ のときは $L_p(M_n \otimes M) = M_n(L_p(M))$ より

$$S_p^n[L_p(M)] = M_n(L_p(M))$$

である. 同様に

$$S_p[L_p(M)] = L_p(B(\ell_2)\bar{\otimes}M)$$

であり, また E が $L_p(M)$ の閉部分空間ならば $S_p[E]$ は $S_p \otimes E$ の $S_p[L_p(M)]$ での閉苞である.

写像の完全有界性は Schatten クラスを使って言いかえることができる.

補題 2.1. [3, Lemma 1.7] E, F を作用素空間, $u\colon E \to F$ とする. u が完全有界であるための必要十分条件は,

$$\sup_n \|I_{S_p^n} \otimes u\colon S_p^n[E] \to S_p^n[F]\| < \infty$$

である. さらにこのとき

$$\|u\|_{cb} = \sup_n \|I_{S_p^n} \otimes u\|$$

である.

定義 2.1. E を作用素空間とする. E が均質であるとは, 任意の E 上の有界線型写像 u に対し $\|u\|_{cb} = \|u\|$ なるときをいう.

定義 2.2. $1 \leq p \leq \infty$ とする. 作用素空間 C_p を S_p の部分空間で行列 $(e_{i1})_{i\geq 1}$ からなるものとする. 同様に, 作用素空間 R_p は 行列 $(e_{1i})_{i\geq 1}$ からなるものとする. 一般の Hilbert 空間 H に対しても同様に

$$H_p^c = S_p(\mathbb{C}, H),\ H_p^r = S_p(\bar{H}, \mathbb{C})$$

と定義する.

明らかに, C_p と R_p は S_p で完全な相補空間をもち, またそれらの双対空間は完全等長的に

$$(C_p)^* = C_{p'} = R_p$$
$$(R_p)^* = R_{p'} = C_p$$

であり, さらに $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ならば

$$C_p = (C_{p_0}, C_{p_1})_\theta,\ R_p = (R_{p_0}, R_{p_1})_\theta$$

が成り立つ. C_p と R_p は均質作用素空間で Banach 空間としては Hilbert 空間である.

作用素空間 E に対し $C_p[E]$ を $C_p \otimes E$ の $S_p[E]$ での閉苞とする. $R_p[E]$ も同様に定義する. $E \subseteq L_p(M)$ ならば, C_p の自然な基底を (e_k) とすると E の任意の有限列 (x_k) に対し,

$$\left\|\sum_k x_k \otimes e_k\right\|_{C_p[E]} = \left\|\left(\sum_k x_k^* x_k\right)^{1/2}\right\|_{L_p(M)}$$

が成り立つ. 同様に $a_k \in C_p$ ならば

$$\left\| \sum_k x_k \otimes a_k \right\|_{C_p[E]} = \left\| \left(\sum_{j,k} \langle a_k, a_j \rangle x_k^* x_j \right)^{1/2} \right\|_{L_p(M)}$$

である.

定義 2.3. 作用素空間 X, E, F に対し, 空間 $\Gamma_X(E,F)$ を完全有界写像 $\alpha\colon E \to X$ と $\beta\colon X \to F$ で $u = \beta\alpha$ なるものが存在する写像 $u\colon E \to F$ からなるものとする. この空間上にノルムを

$$\gamma_X(u) = \inf\{\|\alpha\|_{cb}\|\beta\|_{cb}\colon u = \beta\alpha,\ \alpha \in CB(E,X),\ \beta \in CB(X,F)\}$$

で入れると Banach 空間になる. また,$\Gamma_{C_p}(E,F)$ をある Hilbert 空間 H からなる H_p^c によって完全有界写像の積に分解される写像の空間とし,

$$\begin{aligned}\gamma_{C_p}(u) = \inf\{&\|\alpha\|_{cb}\|\beta\|_{cb}\colon \\ &\text{Hilbert 空間 } H,\ u = \beta\alpha,\ \alpha \in CB(E,H_p^c),\ \beta \in CB(H_p^c,F)\}\end{aligned}$$

と定める. Γ_{R_p} も同様に定める.

3 Haagerup テンソル積

定義 3.1. E, F を作用素空間, $1 \le p,q \le \infty$ とする. $x \in E \otimes F$ に対し,

$$\|x\|_{h_{p,q}} = \inf\{\|a\|_{R_p[E]}\|b\|_{C_q[F]}\colon x = a \odot b,\ a \in R_p[E],\ b \in C_q[F]\}$$

と定義する. これは一般にはノルムとならない.

定義 3.2. E を作用素空間, $1 \le p \le \infty$ とする. E が R_p-2-凸であるとは, 任意の $a,b \in R_p[E]$ に対し

$$\|(a,b)\|_{R_p[E]} \le (\|a\|_{R_p[E]}^2 + \|b\|_{R_p[E]}^2)^{1/2}$$

なるときをいう. 同様に, E が C_p-2-凸であるとは, 任意の $a,b \in R_p[E]$ に対し

$$\|{}^t(a,b)\|_{C_p[E]} \le (\|a\|_{C_p[E]}^2 + \|b\|_{C_p[E]}^2)^{1/2}$$

なるときをいう. これらの性質は部分空間や商空間をとる操作に関して閉じている.

$E \subseteq L_p(M)$ で $p \ge 2$ ならば,

$$\begin{aligned}\|(a,b)\|_{R_p[E]} &= \|aa^* + bb^*\|_{L_{p/2}(M)}^{1/2} \\ &\le (\|a\|_p^2 + \|b\|_p^2)^{1/2}\end{aligned}$$

なので E は R_p-2-凸であり, また同様にして C_p-2-凸であることも示される.

命題 3.1. E, F を作用素空間, $1 \le p, q \le \infty$ とする.

(i) $\|\cdot\|_{h_{p,q}}$ は $E \otimes F$ 上の準ノルムであり, もし E が R_p-2-凸かつ F が C_p-2-凸であるならば $\|\cdot\|_{h_{p,q}}$ は $E \otimes F$ 上のノルムである.

(ii) 任意の $x \in E \otimes F$ に対し, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R_p[E]$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in C_q[F]$ と正の対角行列 Δ で $(a_1, \ldots, a_n)$ と $(b_1, \ldots, b_n)$ はそれぞれ線型独立かつ

$$\|x\|_{h_{p,q}} = \|a\|_{R_p[E]} \|b\|_{C_q[F]}$$
$$\|{}^t x\|_{h_{p,q}} = \|{}^t b \Delta^{-1}\|_{R_p[F]} \|\Delta {}^t a\|_{C_q[E]}$$

を満たすものが存在する.

証明. (i) 一般に, $x, y \in E \otimes F$ に対し, $x = a \odot b$, $y = c \odot d$ かつ $\|a\|_{R_p[E]} = \|b\|_{C_q[F]}$, $\|c\|_{R_p[E]} = \|d\|_{C_q[F]}$ な表現をひとつとると

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{h_{p,q}} &\le \|(a, c)\|_{R_p[E]} \|{}^t(b, d)\|_{C_q[F]} \\
&\le (\|a\|_{R_p[E]} + \|c\|_{R_p[E]})^2 \\
&\le 2(\|a\|_{R_p[E]}^2 + \|c\|_{R_p[E]}^2)
\end{aligned}$$

なので, $\|x + y\|_{h_{p,q}} \le 2(\|x\|_{h_{p,q}} + \|y\|_{h_{p,q}})$ である. また E が R_p-2-凸かつ F が C_p-2-凸ならば,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{h_{p,q}} &\le (\|a\|_{R_p[E]}^2 + \|c\|_{R_p[E]}^2)^{1/2} (\|b\|_{C_q[F]}^2 + \|d\|_{C_q[F]}^2)^{1/2} \\
&= \|a\|_{R_p[E]}^2 + \|c\|_{R_p[E]}^2
\end{aligned}$$

であるから三角不等式が成り立つ. あと自明でないのは $\|x\|_{h_{p,q}} = 0$ ならば $x = 0$ を示すことである. それには $\|\cdot\|_{h_{p,q}}$ が Banach 空間の単射的ノルム $\|\cdot\|_\varepsilon$ よりも大きいことをいえばよい. $\xi \in E^*$, $\eta \in F^*$ が単位元ならば, 任意の $x \in E \otimes F$ に対し,

$$\begin{aligned}
|\langle \xi \otimes \eta, x \rangle| &= \left| \sum_k \xi(a_k) \eta(b_k) \right| \\
&\le \left(\sum_k |\xi(a_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |\eta(b_k)|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

がいえる. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_2$ を単位ベクトルで

$$\left(\sum_k |\xi(a_k)|^2 \right)^{1/2} = \sum_k \alpha_k \xi(a_k) \le \left\| \sum_k \alpha_k a_k \right\|$$

なるものとすると,

$$\left\| \sum_k \alpha_k a_k \right\| \le \|a\|_{R_p[E]} \|{}^t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)\|_{B(\ell_2)} \le \|a\|_{R_p[E]}$$

である. 同様に, $\left(\sum_k |\eta(b_k)|^2\right)^{1/2} \leq \|b\|_{C_q[F]}$ であることも示されるから $\|x\|_\epsilon \leq \|x\|_{h_{p,q}}$ がいえる.

(ii) は一般の Haagerup テンソル積のときの証明と同様にして示される. □

作用素空間 $E \otimes_{h_{p,q}} F$ を $(E \otimes F, \|\cdot\|_{h_{p,q}})$ の完備化とする. $p = q$ のときは単に h_p とかく. $\otimes_{h_{p,q}}$ は単射的かつ射影的である.

命題 3.2. $E \subseteq L_p(M)$ $(2 < p < \infty)$ を閉部分空間, H を Hilbert 空間とする. 写像 $u\colon E \to H_p^r$ に対し, 以下の諸条件は同値である.

(i) u は完全有界;

(ii) $I_{R_p} \otimes u$ は $R_p[E]$ から $R_p[H_p^r]$ への有界写像に拡張される;

(iii) 正数 c で任意の有限列 $(a_i) \subseteq E$ に対し,

$$\left(\sum_k \|u(a_k)\|^2\right)^{1/2} \leq c \left\|\left(\sum_k a_k a_k^*\right)^{1/2}\right\|_p$$

が成り立つ;

(iv) $(L_{p/2}(M))^* = L_{(p/2)'}(M)$ の正の単位元 f で任意の $a \in E$ に対し

$$\|u(a)\| \leq cf(aa^*)^{1/2}$$

なものが存在する.

さらに, 上の条件の中の $\|u\|_{cb}$, $\|I_{R_p} \otimes u\|$ と (iii) を満たす最小の c はすべて等しく, また u は $L_p(M)$ への同じ完全有界ノルムでの拡張をもつ.

証明. (i)⇒(ii) 補題 2.1 より明らか.

(ii)⇒(iii) $I_{R_p} \otimes u$ が有界ならば任意の $a = (a_1, a_2, \dots) \in R_p[E]$ に対し $\|I_{R_p} \otimes u(a)\|_{R_p[H_p^r]} \leq c\|a\|_{R_p[E]}$ である. 一方

$$\|I_{R_p} \otimes u(a)\|_{R_p[H_p^r]} = \left(\sum_k \|u(a_k)\|^2\right)^{1/2}$$

かつ

$$\|a\|_{R_p[E]} = \left\|\left(\sum_k a_k a_k^*\right)^{1/2}\right\|_p$$

であるから (iii) が出る.

(iii)⇒(iv) 最大最小原理を使えばよい.

(iv)⇒(i) E 上の半内積を $\langle b, a\rangle = f(ab^*)$ で定義しその半内積からできる Hilbert 空間を K とすると自然な写像 $i_E\colon E \to K$ は縮小写像となる. (iv) から写像 $\hat{u}\colon K \to H$ で $\|\hat{u}\| \leq c$ かつ $u = \hat{u} \circ i_E$ なものがとれる. 均

質性より $\|\hat{u}\colon K_p^r \to H_p^r\|_{cb} = \|u\|$ だから補題 2.1 より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\|I_{S_p} \otimes i_E\colon S_p^n[E] \to S_p^n[K_p^r]\| \le 1$ を示せばよい. $x = (x_{ij}) \in S_p^n[E]$, $y = I_{S_p} \otimes i_E(x)$ とする. $K_p^r = S_p(\bar{K}, \mathbb{C})$ とみると $S_p^n[K_p^r] = S_p(\ell_2^n(\bar{K}), \ell_2^n)$ であって, $y = (y_{ij}) \in S_p^n[K_p^r]$ だから任意の $\beta = (\beta_k) \in \ell_2^n(\bar{K})$ と $\alpha = (\alpha_k) \in \ell_2^n$ に対し

$$y(\beta) = \left(\sum_j \langle \beta_j, y_{ij}\rangle\right)_{1 \le i \le n}$$

かつ

$$y^*(\alpha) = \left(\sum_i \alpha_i \overline{y_{ij}}\right)_{1 \le i \le n}$$

がいえる. 従って

$$yy^* = \left(\sum_k \langle y_{jk}, y_{ik}\rangle\right)_{1 \le i,j \le n} = \left(\sum_k f(x_{ik}x_{jk}^*)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

であり, 単位元 $z \in S_{(p/2)'}^n$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_n(zyy^*) &= \mathrm{tr}_n \otimes \mathrm{tr}((z \otimes f)(xx^*)) \\
&\le \|z \otimes f\|_{(p/2)'} \|xx^*\|_{p/2} \\
&\le \|xx^*\|_{p/2}
\end{aligned}$$

がいえるから, $\|yy^*\|_{p/2} \le \|xx^*\|_{p/2}$ でありよって $\|i_E\|_{cb} \le 1$ が示された.

最後に, 上の証明からすべての定数が等しいことは明らかである. また, Hilbert 空間 $\tilde{K}$ を $L_p(M)$ 上の半内積 $\langle b, a\rangle = f(ab^*)$ から構成されたものとし, $P_K\colon \tilde{K}_p^r \to K_p^r$ を直交射影とすると, 上と同様にして写像の分解

$$\begin{array}{ccccc}
L_p(M) & \overset{i_{L_p(M)}}{\to} & \tilde{K}_p^r & & \\
 & & \downarrow P_K & & \\
E & \overset{i_E}{\to} & K_p^r & \overset{\hat{u}}{\to} & H_p^r
\end{array}$$

ができ, このとき $U = \hat{u}P_K i_{L_p(M)}$ は u の拡張になっている. □

定理 3.3. $E, F \subseteq L_p(M)$ $(2 < p < \infty)$ を閉部分空間とする. 双線型形式 $u\colon E \times F \to \mathbb{C}$ と定数 $c > 0$ に対し, 以下の諸条件は同値である.

(i) u が $E \otimes_{h_p} F$ から $\mathbb{C}$ へのノルムが c 以下な写像を定義する;

(ii) 任意の有限列 $(a_k) \subseteq E$ と $(b_k) \subseteq F$ に対し

$$\left|\sum_k u(a_k \otimes b_k)\right| \le c \left\|\left(\sum_k a_k a_k^*\right)^{1/2}\right\|_p \left\|\left(\sum_k b_k^* b_k\right)^{1/2}\right\|_p$$

が成り立つ;

(iii) $(L_{p/2}(M))^*$ の正の単位元 f, g で任意の $a \in E$, $b \in F$ に対し

$$\|u(a \otimes b)\| \leq c(f(aa^*)g(b^*b))^{1/2}$$

なものが存在する;

(iv) u から作られる写像 $\tilde{u}\colon E \to F^*$ は $\Gamma_{R_p}(E, F^*)$ に属し $\gamma_{R_p}(\tilde{u}) \leq c$ である.

さらに, u は $L_p(M) \otimes_{h_p} L_p(M)$ への同じ完全有界ノルムでの拡張をもつ.

証明. テンソル積 $\otimes_{h_p}$ の定義から (i) と (ii) の同値性は明らか. (ii)⇒(iii) は最大最小原理を使えばよく, また (iii)⇒(ii) は Hölder の不等式から出る.

(iii)⇒(iv) E 上の半内積を $\langle a, a' \rangle = f(a'a^*)$ として Hilbert 空間 H を構成し, また F 上の半内積を $\langle b, b' \rangle = g(b^*b')$ として Hilbert 空間 K を構成する. すると完全縮小写像 $i_E\colon E \to H_p^r$ と $i_F\colon F \to K_p^r$ ができる. (iii) より写像 $\hat{u}\colon H \to \bar{K}$ で $\|\hat{u}\| \leq c$ かつ任意の $a \in E$, $b \in F$ に対し

$$u(a, b) = \langle \overline{\hat{u} i_E(a)}, i_F(b) \rangle$$

なものがとれる. ゆえに $\tilde{u} = i_F^* \hat{u} i_E$ である. いま $i_F^*\colon \bar{K}_p^r \to F^*$ は完全縮小写像で $\|\hat{u}\colon H_p^r \to \bar{K}_p^r\|_{cb} = \|u\|$ である. 従って $\tilde{u} \in \Gamma_{R_p}(E, F^*)$ かつ $\gamma_{R_p}(\tilde{u}) \leq c$ がわかる.

(iv)⇒(ii) $\tilde{u} = \beta\alpha$, $\alpha \in CB(E, H_r)$, $\beta \in CB(H_r, F)$ で $\|\alpha\|_{cb}\|\beta\|_{cb} \leq c$ となるように分解されたとすると, 命題 3.1 から $(L_{p/2}(M))^*$ の正の単位元 f, g で $a \in E$ に対し

$$\|\alpha(a)\| \leq \|\alpha\|_{cb} f(aa^*)^{1/2}$$

かつ $b \in F$ に対し

$$\|\beta(b)\| \leq \|\beta\|_{cb} g(b^*b)^{1/2}$$

を満たすものが存在する. これより,

$$|u(a \otimes b)| = |\langle \alpha(a), \beta^*(b) \rangle| \leq c(f(aa^*)g(b^*b))^{1/2}$$

が示される. 上の証明からすべての定数がすべて等しいことがいえる. □

参考文献

[1] M. Junge, *A Fubini type theorem for non-commutative L_p-spaces*, Canad. J. Math., 56 (2004), 983-1021

[2] F. Lust-Piquard, *A Grothendieck factorization theorem on 2-convex Schatten spaces*, Israel J. Math., 79, 2-3 (1992), 331-365

[3] G. Pisier, *Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps*, Astérisque, 247 (1998)

[4] G. Pisier, *Factorixstion of linear operators and geometry of Banach spaces*, volume 60 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Washington, DC, (1986)

[5] M. Terp, *L_p-spaces associated with von Neumann algabras*, Notes, Math. Institute, Copenhagen Univ., (1981)

[6] Q. xu, *Operator space Grothendieck inequalities for noncommutative L_p-spaces*, math.FA/0505306