数理解析研究所講究録
1491 巻 2006 年 1-11

On heat convection equations in a half space with non-decaying data

Yasushi Taniuchi (谷内　靖)
Department of Mathematical Sciences
Shinshu University
Matsumoto 390-8621, Japan
信州大学理学部数理自然情報科学科

1 Introduction

$n(\geq 2)$ 次元半空間 $\mathbb{R}^n_+ = \{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ 上の非圧縮性粘性流体による熱対流を記述する次の Boussinesq 方程式を考える。本稿では遠方で減衰しない初期条件と境界条件に対する時間局所可解性について議論する。

$$
\text{(B)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = g\theta, \qquad t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \\ \partial_t \theta - \Delta\theta + u \cdot \nabla\theta = 0, \qquad t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \\ \quad \operatorname{div} u = 0, \qquad t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \\ \quad u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0, \quad \theta|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = S(\tilde{x}, t), \\ \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \end{cases}
$$

ここで、$u = (u^1(x,t), u^2(x,t), \cdots, u^n(x,t))$, $\theta = \theta(x,t)$, $p = p(x,t)$ はそれぞれ流体の未知速度場、未知温度分布、および未知圧力場を記述する。また、$g = (0, 0, \cdots, 0, g^n)$ は与えられた一様な重力加速度であり、$S(\tilde{x}, t)$ は境界 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上で与えられている熱源の温度分布である。

これまで、多くの研究者により、様々な領域 Ω 上の熱対流が研究されてきた。(例えば、[2],[9] 等を参照) しかし、それらの結果は初期条件 u_0, θ_0 に q-乗可積分性 $(q < \infty)$ が課せられている。考える領域が全空間や半空

間、外部領域などの非有界領域の場合、この仮定は、荒っぽく言うと、初期条件 $u_0(x), \theta_0(x)$ が空間遠方で減衰することを意味している。

一方、初期値に空間遠方での減衰を仮定しない場合の結果として、次のようなものが知れれている。Cannone[4], Giga-Inui-Matsui[10] は、初期速度場 u_0 に遠方での減衰を仮定せずに、$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\mathrm{div}\, u_0 = 0$ in $\mathcal{D}'$ に対して、全空間上の Navier-Stokes 方程式の時間局解を構成している。(一意性に関しては、Giga-Inui-Kato-Matsui[11], J.Kato[17] を参照せよ。) さらに、次元が2次元の時、Giga–Matsui–Sawada[12] はこの Navier-Stokes 方程式の解が時間大域解になる事を証明している。また、全空間上の Boussinesq 方程式に対しても類似の結果が成り立つことがわかっている。(Sawada との共同研究 [28]) [28] において、$\mathrm{div}\, u = 0$ in $\mathcal{D}'$ をみたす初期条件 $(u_0, \theta_0) \in (L^\infty(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$(u, \theta, \nabla p) \in C_w([0,T); L^\infty(\mathbb{R}^n)) \times C([0,T); \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)) \times C((0,T); \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n))$$

を満たす一意な局所解の存在を示した。ここで、$\dot{B}^0_{\infty,1}$ は空間遠方で減衰しない関数を含んでいる。例えば、$\sin x_n$, $\frac{1}{1+x_n^2}$ などが含まれる。さらに、2次元の時は、この Boussinesq 方程式の局所解が時間大域解になることもわかっている。([31] を参照せよ。) これらの結果は全空間 $\mathbb{R}^n$ 上の初期値問題にたいする結果であるが、半空間上 $\mathbb{R}^n_+$ の問題に関しても、Inui-Matsui[14] は Navier-Stokes 方程式の局所可解性を初期条件 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し示している。(Shimizu[29],Solonnikov[30] も類似の結果を示している。)

本稿では、負ベキの Besov 空間を利用し、空間遠方で減衰しないデータにたいする半空間上の Boussinesq 方程式の初期値境界値問題の局所可解性を議論する。

2 準備

問題を扱いやすくするために、次のような変形を行う。関数 $h(x_n) = \begin{cases} 1 & (0 \le x_n < 1) \\ 0 & (x_n > 2) \end{cases} \in C^\infty([0,\infty))$ を導入し、$(\tilde{x}, t) \in \partial\mathbb{R}^n_+ \times [0,\infty)$ の関数 $S(\tilde{x}, t)$ を、次のように $(x,t) = (\tilde{x}, x_n, t) \in \mathbb{R}^n_+ \times [0,\infty)$ の関数 $\bar{S}(\tilde{x}, x_n, t)$ に拡張する。

$$\bar{S}(x,t) = S(\tilde{x}, t) h(x_n)$$

また、$\bar{\theta} = \theta - \bar{S}$, $\bar{\theta}_0(x) = \theta_0(x) - \bar{S}(x,0)$ とおくと、(B) は次のような方程式に変形される。

$$
\text{(B')}\begin{cases}
\partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = g(\bar\theta + \bar S),\\
\partial_t\bar\theta - \Delta\bar\theta + u\cdot\nabla\bar\theta = -\partial_t\bar S + \Delta\bar S - u\cdot\nabla\bar S,\\
\quad \operatorname{div} u = 0, \qquad t>0, \quad x = (\tilde x, x_n)\in\mathbb{R}^n_+,\\
\quad u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0, \quad \bar\theta|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0,\\
\quad u|_{t=0} = u_0, \quad \bar\theta|_{t=0} = \bar\theta_0
\end{cases}
$$

次に、Inui-Matsui[14] に従い、半空間上での Helmholtz 作用素を定義する。$\mathbb{R}^n_+$ 上で定義された関数 f の $\mathbb{R}^n$ への偶拡張、奇拡張、0 拡張をそれぞれ e^+f, e^-f, e^0f とおく。すなわち、$e^\pm f(\tilde x, x_n) = \begin{cases} f(\tilde x, x_n) & (x_n\ge 0)\\ \pm f(\tilde x, -x_n) & (x_n<0)\end{cases}$,
$e^0 f(\tilde x, x_n) = \begin{cases} f(\tilde x, x_n) & (x_n\ge 0)\\ 0 & (x_n<0)\end{cases}$. さらに、$\mathbb{R}^n_+$ 上で定義された n 次元ベクトル値関数 $u(\tilde x, x_n) = (u^1(\tilde x, x_n), u^2(\tilde x, x_n), \cdots, u^n(\tilde x, x_n))$ に対して鏡像による $\mathbb{R}^n$ への拡張を Eu とおく。すなわち、

$$
Eu = (e^+u^1, e^+u^2, \cdots, e^-u^n)
$$

とおく。半空間上での Helmholtz 作用素は $P_+ = PE$ で与えられる。(Inui-Matsui[14] を参照) ここで、P は行列作用素 $P = (P_{ij})_{1\le i,j\le n} = (\delta_{i,j} + R_iR_j)_{1\le i,j\le n}$ で、R_j は Riesz 変換 $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ である。

形式的に P_+ を (B') の第一式に作用させると、

$$
\text{(AB)}\begin{cases}
\partial_t u + Au + P_+(u\cdot\nabla u) = P_+(g(\bar\theta + \bar S)),\\
\partial_t\bar\theta - \Delta\bar\theta + u\cdot\nabla\bar\theta = -\partial_t\bar S + \Delta\bar S - u\cdot\nabla\bar S,\\
\quad u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0, \quad \bar\theta|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0,\\
\quad u|_{t=0} = u_0, \quad \bar\theta|_{t=0} = \bar\theta_0
\end{cases}
$$

ここで、$A = -P_+\Delta$ であり、Stokes 作用素とよばれる。(AB) の解の構成には、(AB) の第 1 式の左辺にあらわれる $P_+(g\bar S)$ が L^∞ に入ってくれないため、Inui-Matsui の方法が使えない。そこで、本稿では、$(-A)$ が適当な Besov 空間上で解析的半群を生成することを示すことにより、(AB) の解を構成する。

まず初めに、Besov 空間の定義を紹介する。

Littlewood-Paley 分解: $\varphi_j \in \mathcal{S}$ $(j = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$ $\hat\varphi_j(\xi) = \hat\varphi_0(2^{-j}\xi)$, $\operatorname{supp}\hat\varphi_0 \subset \{1/2 < |\xi| < 2\}$, $1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat\varphi_j(\xi)$ $(\xi\ne 0)$, $1 = \hat\psi(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty}\hat\varphi_j(\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R}^n)$ を用いて Besov space を定義する。

定義（全空間上の Besov space）
$s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ とする。

$$
\begin{aligned}
B^s_{p,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\equiv \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty\} \\
\dot{B}^s_{p,q} = \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\equiv \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty\} \quad (\mathcal{P}\text{ は多項式の全体}) \\
\|f\|_{B^s_{p,q}} &\equiv \|\psi * f\|_p + \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{js}\|\varphi_j * f\|_p\right)^q\right\}^{1/q}, \quad (q < \infty) \\
\|f\|_{B^s_{p,\infty}} &\equiv \|\psi * f\|_p + \sup_{j=0,1,\cdots} 2^{js}\|\varphi_j * f\|_p \\
\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\equiv \left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{js}\|\varphi_j * f\|_p\right)^q\right\}^{1/q}, \quad (q < \infty) \\
\|f\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} &\equiv \sup_{-\infty<j<\infty} 2^{js}\|\varphi_j * f\|_p.
\end{aligned}
$$

特に、(s, p, q) が

(1) $\qquad s < n/p \qquad$ または、$\qquad s = n/p,\ q = 1$

のとき、$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ は、次のように $\mathcal{S}'$ の部分空間と見なせる。すなわち、

(2) $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cong \left\{ f \in \mathcal{S}' ;\ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty \text{ and } f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j * f \text{ in } \mathcal{S}' \right\}$

が成り立つ。本稿では、(s, p, q) が (1) をみたすとき、(2) の右辺を $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ の定義とする。

定義（半空間上の Besov space）

$B^s_{p,q,+} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+) \equiv \{f; \exists g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } f = g \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)\}$, $\quad \|f\|_{B^s_{p,q,+}} = \inf \|g\|_{B^s_{p,q}}$

$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ も同様に定義される。

定義 $(B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma})$ $0 < s < 1$, $1 \le q \le \infty$ とおく。

$$B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma} \equiv \{u \in (B^{-s}_{\infty,q,+})^n; \operatorname{div} Eu = 0 \text{ in } \mathcal{S}'\}$$

$u \in B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ $(0 < s < 1 < q < \infty)$ のとき、$(Eu(x_n))^n \in C((-\infty,\infty); B^{-s}_{\infty,q}(\mathbb{R}^{n-1}))$ であり、従って、$u^n|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0$ である。

3 主結果

主結果を述べる前に、重要な lemma を紹介する。

Lemma 3.1 *(a)* $0 < s < 1$, $1 \le q \le \infty$, $\chi(x_n) = 1_{(0,\infty)}(x_n)$ に対し、

$$f \in B^{-s}_{\infty,q} \Longrightarrow \chi \cdot f \in B^{-s}_{\infty,q},$$
$$\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}} \cong \|e^0 f\|_{B^{-s}_{\infty,q}}$$

(b) $\sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{n-1}} |f(\tilde{x}, x_n)| \in L^p(0,\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$ のとき、
$\Longrightarrow e^{\pm} f, e^0 f \in \dot{B}^{-\frac{1}{p}}_{\infty,\infty}$, $\|e^{\pm} f\|_{\dot{B}^{-\frac{1}{p}}_{\infty,\infty}} \cong \|e^0 f\|_{\dot{B}^{-\frac{1}{p}}_{\infty,\infty}} \le C\|f\|_{L^p(0,\infty;L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}}))}$
$\therefore$ $0 < s < 1$, $1 \le q \le \infty$ のとき、

$$\|e^0 f\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}} \le C\|f\|_{L^1_w(0,\infty;L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}}))\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$$

Lemma 3.2 $0 < s < 1$, $1 \le q < \infty$ とする。
(1) $-A$ generates an analytic continuous semi-group $\{e^{-tA}\}_{t\ge 0}$ on $B^{-s}_{p,q,+,\sigma}$.
(2) $f \in B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ とする。

$$(a)\quad \|e^{-tA} f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}} \le C(s)\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}},$$
$$(b)\quad \|e^{-tA} f\|_{L^\infty} \le C(s,\delta)(1+\frac{1}{t})^{s/2+\delta}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}, \quad (\delta > 0)$$
$$(c)\quad \|\nabla e^{-tA} f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}} \le C(s,\epsilon)(1+\frac{1}{t})^{1/2+\epsilon}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}, \quad (\epsilon > 0)$$
$$(d)\quad \|e^{-tA} f - e^{-\tau A} f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}} \le C(s)(t-\tau)^\alpha \tau^{-\alpha}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}} \quad (0 \le \alpha \le 1, 0 < \tau < t)$$

Remark Desch-Hieber-Prüss[5] は $-A$ が L^∞_σ 上で解析的半群を造ることを証明している。
　この Lemma を利用すると次の定理が言える。

Theorem 1 *Let* $0 < s < 1$, $1 \le q < \infty$, $u_0 \in B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$, $e^{-}\bar{\theta}_0 \in \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n))$, *and* $S, \partial^2_{\tilde{x}} S, \partial_t S \in C^\alpha([0,\infty); L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}}))$ *for some* $\alpha > 0$. *Then there exist* $T > 0$ *and unique solution* $(u, \bar{\theta})$ *to (AB) on* $[0,T)$ *such that*

$$u \in C([0,T); B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}) \cap C^1((0,T); B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}) \cap C((0,T); D(A))$$
$$e^{-}\bar{\theta} \in C([0,T); \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap C^1((0,T); \dot{B}^0_{\infty,1}) \cap C((0,T); \dot{B}^2_{\infty,1}).$$

ここで、$D(A)$ は $D(A)=(I+A)^{-1}B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ であり、$D(A)\subset B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}\cap B^{-s+2-\epsilon}_{\infty,q,+}$ for all $\epsilon>0$ である。したがって、$D(A)\subset W^{1,\infty}$ である。また、$u\in D(A)$ のとき、$u|_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0$ が言える。さらに $\dot{B}^0_{\infty,1}\subset BC(\mathbb{R}^n)$ であるので、$e^-\bar{\theta}\in\dot{B}^0_{\infty,1}$ のとき、$\bar{\theta}|_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0$ も言える。

Remark 上の定理で条件 $e^-\bar{\theta}_0\in\dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ を $e^-\bar{\theta}_0\in\dot{B}^{-s}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $(0<s<1)$ に換えても同様の局所可解性がいえる。

4 Lemma 2の証明の概略

ここでは Lemma 2 (a) の証明の概略を述べる。$D(A)$ の $B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ における稠密性は、任意の $u\in B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ に対し $\lambda(\lambda+A)^{-1}u\to u$ in $B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}$ $(\lambda\to\infty)$ となることを示すことにより、証明できる。(詳しくは [32] を参照せよ。)

$-A$ が解析的半群を生成するためには、$0<\theta<\pi$, $|\arg\lambda|<\theta$, $\lambda\neq 0$ に対して、

$$(*)\qquad \|(\lambda+A)^{-1}f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}\le C_\theta\frac{1}{|\lambda|}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}$$

を示せばよい。[5] より、$(\lambda+A)^{-1}f=(\lambda-\Delta)^{-1}e^-f+Tf$ と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}Tf(\tilde{x},x_n) &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G(\tilde{x}-\tilde{x}',x_n',x_n,\lambda)f(\tilde{x}',x_n')d\tilde{x}'dx_n'\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\chi(x_n')G(\tilde{x}-\tilde{x}',x_n',x_n,\lambda)f(\tilde{x}',x_n')d\tilde{x}'dx_n'\end{aligned}$$

と表せる。G は [5] を参照せよ。

$$\begin{aligned}|Tf(\tilde{x},x_n)| &\le \|\chi(\cdot)G(\cdot,\cdot,x_n,\lambda)\|_{B^s_{1,q'}}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}\\ &\le C\frac{1+|\lambda|^{s/2}}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1+|\lambda|^{1/2}x_n}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}\end{aligned}$$

$$\therefore \|Tf(\cdot,x_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}_{\tilde{x}})}\le C\frac{1+|\lambda|^{s/2}}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1+|\lambda|^{1/2}x_n}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}$$

$|\lambda|\le 1$ のとき、

$$\|Tf\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}}\le C\|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le C\frac{1}{|\lambda|}\|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}$$

$|\lambda| \geq 1$のとき、

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}} &\leq C\|e^0 Tf\|_{B^{-s}_{\infty,q}} \leq C\|e^0 Tf\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}} \\
&= C|\lambda|^{-s/2} \left\| e^0 Tf(\frac{\tilde{x}}{|\lambda|^{1/2}}, \frac{x_n}{|\lambda|^{1/2}}) \right\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}} \\
\text{(Lemma 1 (b) より)} \quad &\leq C|\lambda|^{-s/2} \|Tf(\frac{\tilde{x}}{|\lambda|^{1/2}}, \frac{x_n}{|\lambda|^{1/2}})\|_{L^1_w(0,\infty;L^\infty)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\leq C|\lambda|^{-s/2} \left\| \frac{1+|\lambda|^{s/2}}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1+x_n} \right\|_{L^1_w \cap L^\infty} \|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}} \\
&\leq C\frac{1}{|\lambda|} \|f\|_{B^{-s}_{\infty,q,+,\sigma}}
\end{aligned}$$

これにより e^{-tA} が解析的半群になることがわかる。

5 Theorem 1の証明の概略

積分方程式

$$(3) \quad u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P_+(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P_+(g\bar{\theta} + g\bar{S})(\tau) d\tau$$

$$(4) \quad \bar{\theta}(t) = e^{t\Delta} e^- \bar{\theta}_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} e^- \left(u \cdot \nabla(\bar{\theta} + \bar{S}) + \partial_t \bar{S} - \Delta \bar{S} \right)(\tau) d\tau$$

の解を Iteration により構成する。ここで $e^{t\Delta}$ は全空間上の Heat semi-group である。(従って、$\bar{\theta}$ は全空間上で定義された関数である。) $0 < T < 1$, $1 < s < s' < 1$, $0 < \delta < 1 - s'$ とおく。

$$\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}} + \sup_{0<t<T} t^{s'/2} \|u(t)\|_\infty + \sup_{0<t<T} t^{(1+\delta)/2} \|\nabla u(t)\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}} + \sup_{0<t<T} \|e^- \bar{\theta}\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \sup_{0<t<T} t^{1/2} \|\nabla \bar{\theta}\|_\infty \quad < \infty$$

となるような解を構成できる。このとき、以下のような不等式を使う。

$$\begin{aligned}
\|e^{-(t-\tau)A}P_+(u\cdot\nabla u)\|_\infty &\le C(t-\tau)^{-s'/2}\|P_+(u\cdot\nabla u)\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}}\\
&= C(t-\tau)^{-s'/2}\|PE(u\cdot\nabla u)\|_{B^{-s}_{\infty,q}}\\
&\le C(t-\tau)^{-s'/2}\|E(u\cdot\nabla u)\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}}\\
&= C(t-\tau)^{-s'/2}\|\sum_{i=1}^{n}\partial_i((Eu)^i Eu))\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}}\\
&\le C(t-\tau)^{-s'/2}\|Eu\otimes Eu\|_{\dot{B}^{-s+1}_{\infty,q}}\\
&\le C(t-\tau)^{-s'/2}\|Eu\|_\infty\|Eu\|_{\dot{B}^{-s+1}_{\infty,q}}\quad(\because -s+1>0)\\
&\le C(t-\tau)^{-s'/2}\|Eu\|_\infty(\|u\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}}+\|\nabla u\|_{B^{-s}_{\infty,q,+}})
\end{aligned}$$

(上の不等式において、$\gamma>0$ に対し、

$$\|fg\|_{\dot{B}^{\gamma}_{p,q}}\le C(\|f\|_\infty\|g\|_{\dot{B}^{\gamma}_{p,q}}+\|f\|_{\dot{B}^{\gamma}_{p,q}}\|g\|_\infty)$$

となることを使った。(この不等式は、例えば [21] を参照せよ。))

$$\begin{aligned}
\|e^{-(t-\tau)A}P_+(g\bar{S})\|_{B^{-s}_{\infty,q}} &\le C\|PE(g\bar{S})\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}}\\
&\le C\|E(g\bar{S})\|_{\dot{B}^{-s}_{\infty,q}}\\
\text{(Lemma 1 (b) より)}\quad &\le C\|(g\bar{S})\|_{L^1_w(0,\infty;L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

また、$P_+g\bar{\theta}$ の項に関しては次のような評価を行う。

$$\begin{aligned}
\|e^{-(t-\tau)A}P_+(g\bar{\theta})\|_{B^{-s}_{\infty,q}} &= \|e^{-(t-\tau)A}P(0,0,\cdots,|g|e^-\bar{\theta})\|_{B^{-s}_{\infty,q}}\\
&\le C\|P(0,0,\cdots,|g|e^-\bar{\theta})\|_{B^{-s}_{\infty,q}}\\
&\le C\|P(0,0,\cdots,|g|e^-\bar{\theta})\|_\infty\\
&\le C|g|\|e^-\bar{\theta}\|_{\dot{B}^{\infty}_{\infty,1}}
\end{aligned}$$

$\bar{\theta}$ に関する２番目の積分方程式に関しては、以下のような評価を行う。

$$\begin{aligned}
\|e^{(t-\tau)\Delta}e^-(u\cdot\nabla\bar{\theta})\|_{\dot{B}^{0}_{\infty,1}} &= \|e^{(t-\tau)\Delta}\mathrm{div}\ E(u\bar{\theta})\|_{\dot{B}^{0}_{\infty,1}}\\
&\le C(t-\tau)^{-1/2}\|E(u\bar{\theta})\|_\infty\\
&\le C(t-\tau)^{-1/2}\|u\|_\infty\|e^-\bar{\theta}\|_{\dot{B}^{\infty}_{\infty,1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}e^{-}(u\cdot\nabla\bar{\theta})\|_\infty &\le C(t-\tau)^{-1/2}\|e^{-}(u\cdot\nabla\bar{\theta})\|_\infty\\ &\le C(t-\tau)^{-1/2}\|u\|_\infty\|\nabla\bar{\theta}\|_\infty.\end{aligned}$$

上記のような評価と Iteration argument により、積分方程式の解を構成できる。また、Lemma 2 (1) 等を用いると、この解が (AB) の解になっていることも示せる。

参考文献

[1] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces, An introduction*, Berlin-New York-Heidelberg: Springer-Verlag (1976).

[2] Cannon, J.R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for Boussinesq equations with data in L^p*, Approximation Methods for Navier-Stokes problems, Edited by Rautmann,R., Lect. Notes in Math., **771** Springer-Verlag, Berlin (1980) 129-144.

[3] Cannon, J.R., Knightly, G.H., *A note on the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations*, SIAM J. Appl. Math., **18** (1970) 641-644.

[4] Cannone, M., *Ondelettes, Praproduits et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Arts et Sciences Paris-New York-Amsterdam (1995).

[5] Desch, W., Hieber, M., Prüss, J., *L^p-Theory of the Stokes equation in a half space*, J. evol. equ., **1** (2001) 115–142.

[6] Foias, C., Mainley, O., Temam, R., *Attractors for the Bérard problem: existence and physical bounds of their fractal dimension.*, Nonlinear Anal. T. M. A., **11** (1987), 939-967.

[7] Fife, P.C., Joseph, D.D., *Existence convictive solutions of the genelarized Bénard problem which are analytic in their norm.*, Arch. Rational Mech. Anal., **33** (1969), 116-138.

[8] Hishida, T., *Existence and Regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem*, Funkcial. Ekvac., **34** (1991), 449-474.

[9] Hishida, T., Yamada Y., *Global solutions for the heat convection equations in an exterior domain*, Tokyo J. Math., **15** (1992), 135-151.

[10] Giga, Y., Inui, K., Matsui, S., *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Mathematica, **4** (1999), 28-68.

[11] Giga, Y., Inui, K., Kato, J., Matsui, S., *Remarks on uniqueness of bounded solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, **47** (2001), 4151-4156.

[12] Giga, Y., Matsui, S., Sawada, O., *Global Existence of Two-Dimensional Navier-Stokes Flow with nondecaying initial velocity*, J. Math. fluid Mech., **3** (2001), 302-315.

[13] Ishimura, N., Morimoto, H., *Remarks on the blow-up criterion for the 3-D Boussinesq equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., **9** (1999), 1323-1332.

[14] Inui, K., Matsui, S., *An operatorial approach to the Navier-Stokes equations in a half space with non-decaying initial data* , Preprint

[15] Kagei, Y., *On weak solutions of nonstationary Boussinesq equations*, Differential Integral Equations, **6** (1993), 587-611.

[16] Kagei, Y., von Wahl, W., *The Eckhaus criterion for convection roll solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **32** (1997), 563-620.

[17] Kato, J., *On the uniqueness of nondecaying solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **169** (2003), 159-175

[18] Kobayashi, T., Muramatsu, T., *Abstract Besov space approach to the non-stationary Navier-Stokes equations*, Math. Mech. Appl. Sci. **15** (1992), 599-620.

[19] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math., **157** (2001), 22-35.

[20] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math., **157** (2001), 22-35.

[21] Kozono, H., Ogawa, T., Taniuchi, Y., *Navier-Stokes equations in the Besov space near L^∞ and BMO*, Kyushu J. Math., **57** (2003) 303–324.

[22] Kozono, H., Yamazaki, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. P. D. E., **19** (1994), 191-200

[23] Morimoto, H., *On th existence of weak solutions of equation of natural convection*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 87-102.

[24] Morimoto, H., *Non-stationary Boussinesq equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **39** (1992), 61-75.

[25] Oeda, K., *On the initial Value problem for the heat convection equation of Boussinesq approximation in a time-depended domain.*, Proc. Japan Acad., Ser A, **64** (1988), 143-146.

[26] Oeda, K., *Weak and strong solutions of the heat convection equations in regions with moving boundaries*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 491-536.

[27] Sawada, O., *On time–local solvability of the Navier–Stokes equations in Besov spaces*, Adv. Diff. Equations. **8** (2003), 385–412.

[28] Sawada, O., Taniuchi, Y. *On Boussinesq flow with nondecaying initial data*, Funkcial. Ekvac. **47** (2004), 225–250.

[29] Shimizu, Y. *Existence of non-decaying Navier-Stokes flow in a Half space with a certain initial data*, preprint.

[30] Solonnikov, V.A., *On nonstationary Stokes problem and Navier-Stokes problem in a half-space with initial data nondecreasing at infinity*, Journal of mathematical Sciences. Vol. 114, No.5, (2003), 1726-1740, Translated from Problemy Matematicheskogo Analiza, No.25, (2003),189-210

[31] Taniuchi, Y., *Remarks on global solvability of 2-D Boussinesq equations with non-decaying initial data*, to appear in Funkcial. Ekvac.

[32] Taniuchi, Y., *Local solvability of heat convection equations in a half space with non-decaying data*, preprint

[33] Triebel, H., *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, (1983).

[34] Triebel, H., *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, (1992).