数理解析研究所講究録
1492 巻 2006 年 37-42

On boundaries of some Coxeter groups

東北大学大学院理学研究科数学専攻
山形　紗恵子 (Saeko YAMAGATA)
Mathematical Institute, Tohoku University

1　序章

X と X' を proper な Gromov hyperbolic space とし, G, G' を群とする. $\phi: G \to G'$ を G, G' の間の同型写像とする.

また, G, G' がそれぞれ X, X' に幾何学的に作用しているとする.

このとき, $f(gx) = \phi(g)f(x)$ $(\forall g \in G, \forall x \in X)$ を満たす任意の擬等長写像 $f: X \to X'$ は, $\bar{f}(g\gamma) = \phi(g)\bar{f}(\gamma)$ $(\forall g \in G, \forall \gamma \in \partial X)$ を満たす境界の間の同相写像 $\bar{f}: \partial X \to \partial X'$ を導くということが知られている ([3]).

次に, X と X' を proper な CAT(0) space として同様のことを考えてみる. つまり, X と X' が proper な CAT(0) space で, $\phi: G \to G'$ を群 G, G' の間の同型写像とし, G, G' がそれぞれ X, X' に幾何学的に作用しているとする.

このとき, $f(gx) = \phi(g)f(x)$ $(\forall g \in G, \forall x \in X)$ を満たす任意の擬等長写像 $f: X \to X'$ は, $\bar{f}(g\gamma) = \phi(g)\bar{f}(\gamma)$ $(\forall g \in G, \forall \gamma \in \partial X)$ を満たす境界の間の同相写像 $\bar{f}: \partial X \to \partial X'$ を導くのか?
という問題を考えてみる.

答えは No で, Bowers-Ruane [2] がこの問題の反例を与えている.

今回, ある Coxeter group と, その Coxeter system の自己同型写像を用いて, この問題に対する反例を新たに構成することが出来たので, 本稿ではそれについて解説する.

2　準備

まず, これから使う用語をいくつか準備する. CAT(0) space に関して, より詳しくは, [3] などを参照されたい. また, Coxeter group に関しては,

[1], [4] などを参照されたい.

定義 2.1. 測地空間 (X, d) に, 任意に測地三角形 $\triangle$ をとる. これに対応して, $\mathbb{E}^2$ に $\triangle$ と同じ辺の長さの三角形 $\overline{\triangle}$ をとる.
$\forall x, y \in \triangle$ とそれぞれの比較点 $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\triangle}$ に対し,

$$d(x, y) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, \overline{y})$$

が成り立つとき, **CAT(0) space** という.

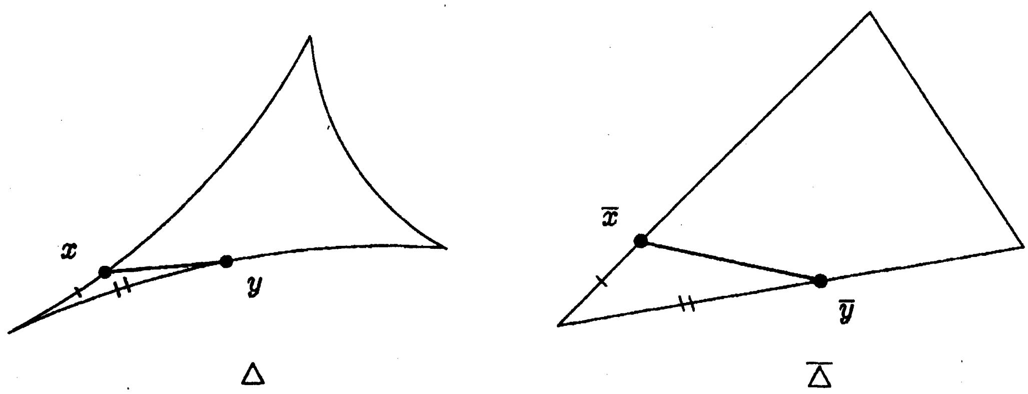


図 1: 測地三角形とその比較三角形

定義 2.2. X を proper な CAT(0) space とする.
写像 $\gamma : [0, \infty) \to X$ が

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'| \quad (\forall t, t' \in [0, \infty)), \quad \gamma(0) = x_0$$

を満たすとき, x_0 から出る **geodesic ray** という.
また,

$$\partial X := \{x_0\text{から出る geodesic ray}\}$$

に, cone topology という位相を入れたものを, X の**境界**という.
これは, 始点 x_0 の取り方によらないことが知られている.

定義 2.3. X, X' を proper な CAT(0) space とする.
写像 $f : X \to X'$ が,
$\exists \varepsilon, k \geq 0, \lambda \geq 1 \quad s.t.$

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) - \varepsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in X),$$

$$\mathcal{N}_k(\mathrm{Im}f) = X'$$

を満たすとき, X から X' への**擬等長写像**という.
ここで, $\mathcal{N}_k(\mathrm{Im}f)$ とは, f の像の k 近傍のことである.

Coxeter group W を,

$$W = \langle t_1, ..., t_5 \,|\, t_i^2 = 1\,(i = 1, ..., 5),\, t_j t_k = t_k t_j\,(j = 1, 2, 3, k = 4, 5)\,\rangle$$

と定める. W の自己同型写像 ϕ を,

$$t_i \mapsto t_i\,(i \neq 3), \quad t_3 \mapsto t_1 t_3 t_1$$

と定める. このとき ϕ は,

$$\phi(t_i)^2 = 1\,(i = 1, ..., 5), \quad \phi(t_j)\phi(t_k) = \phi(t_k)\phi(t_j)\,(j = 1, 2, 3, k = 4, 5)$$

となるので, 特に, Coxeter system の同型である.

X として, W の Davis-Vinberg complex ([4], [5]) をとる. X は, proper

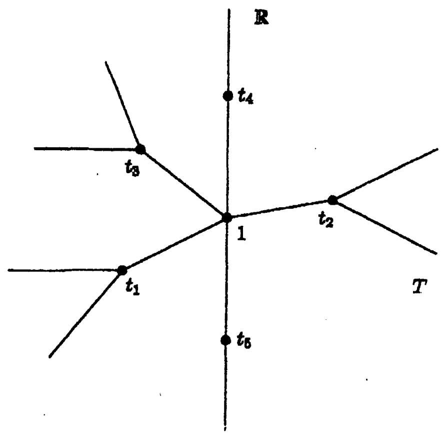


図 2: $T \times \mathbb{R}$

な CAT(0) space であり, $\{t_1, t_2, t_3\}$ で生成される群の Cayley graph T と $\mathbb{R}$ との直積と等長である（図 2）. X の境界は, T の境界と $\mathbb{R}$ の境界の join, つまり, Cantor set と 2 点の join である.

また, W は, X に幾何学的に作用することが知られている.

擬等長写像 $f : X \to X$ を

$$f(wx) = \phi(w)f(x) \quad (\forall w \in W, \forall x \in X), \quad f(1) = 1$$

を満たすものとする.

3 定理とその証明

定理 3.1. $f : X \to X$ は, *Gromov hyperbolic space* の場合と同じ方法では, $\bar{f}(w\gamma) = \phi(w)\bar{f}(\gamma)$ $(\forall w \in W, \forall \gamma \in \partial X)$ を満たす境界の間の同相写像 $\bar{f} : \partial X \to \partial X$ を導かない.

まず, 定理の中の, 'Gromov hyperbolic space の場合' の方法について説明する.

X と X' が proper な Gromov hyperbolic space で, $\phi : G \to G'$ を群 G, G' の間の同型写像とする.

また, G, G' がそれぞれ X, X' に幾何学的に作用しているとし, $f : X \to X'$ を, $f(gx) = \phi(g)f(x)$ $(\forall g \in G, \forall x \in X)$ を満たす擬等長写像とする.

このとき, X の geodesic ray γ を f でうつした像 $f(\gamma)$ の近くに X' の geodesic ray γ' がただ一つ必ず存在するので, $\bar{f}$ を, $\partial X \ni \gamma \mapsto \gamma' \in \partial X'$ と定めると, $\bar{f}(g\gamma) = \phi(g)\bar{f}(\gamma)$ $(\forall g \in G, \forall \gamma \in \partial X)$ を満たす境界の間の同相写像となる（図 3）. これが, Gromov hyperbolic space の場合の境界の間の同相写像を導く方法である.

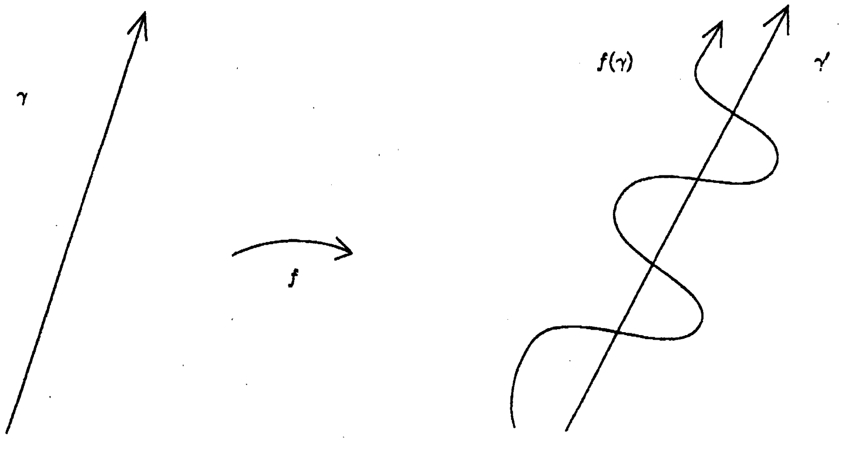


図 3: 境界の間の同相写像

証明. 以下では, f が Gromov hyperbolic space の場合と同じ方法では, 境界の間の同相写像を導かないことを示す.

$a = t_1t_2$, $b = t_3t_2$, $c = t_4t_5$ とおく.

これらを f でうつすと,

$$f(a)=\phi(a)f(1)=t_1t_2=a,$$
$$f(b)=\phi(b)f(1)=t_1t_3t_1t_2(=b'\text{とおく}),$$
$$f(c)=\phi(c)f(1)=t_4t_5=c$$

となる.

geodesic ray γ を,

$$\gamma=\left[1,\, abc^2ab^2c^3\cdots ab^nc^{n+1}\cdots\right)$$

とする.

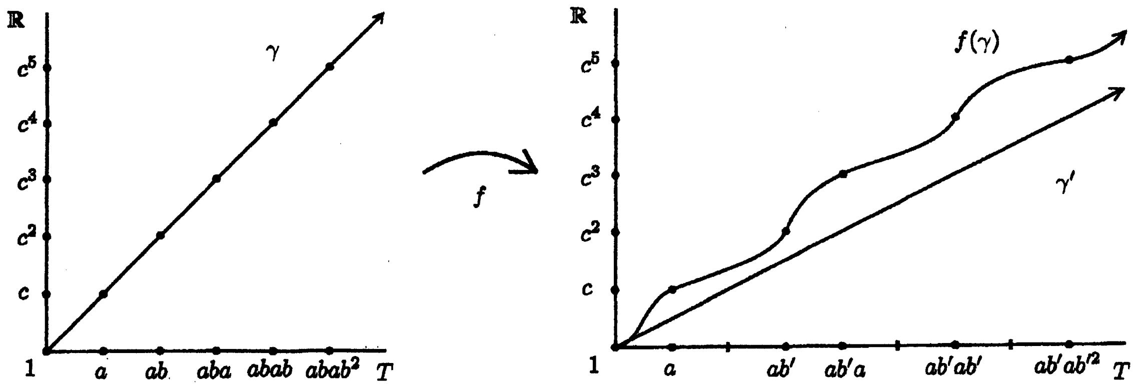
$f(\gamma)$ の近くに geodesic ray γ' があるとして, 矛盾を導く.

γ' は, $f(\gamma)$ の近くにあるので, 測地線分

$$\left[1,\, ab'c^2\right],\ \left[1,\, ab'c^2ab'^2c^3\right],\ldots,\left[1,\, ab'c^2ab'^2c^3\cdots ab'^nc^{n+1}\right],\ldots$$

の近くにある.

$A_n=ab'c^2ab'^2c^3\cdots ab'^nc^{n+1}$ とおく. $[1,\, A_n]$ の傾き $\frac{n(n+3)}{2n(n+2)}$ は, n を大き



くしていくと,

$$\frac{n(n+3)}{2n(n+2)}\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

となるので, γ' の傾きは $\frac{1}{2}$ でなければならない.

ところが, このとき, $A_n\in f(\gamma)$ と γ' の距離 d_n は,

$$d_n\longrightarrow\infty\quad(n\to\infty)$$

となるから, γ' は $f(\gamma)$ の近くにはないことが分かる.

従って, $f(\gamma)$ の近くには geodesic ray が存在しないことが分かり, f は $\bar{f}(w\gamma)=\phi(w)\bar{f}(\gamma)\ (\forall w\in W,\forall\gamma\in\partial X)$ を満たす同相写像 $\bar{f}:\partial X\to\partial X$ を導かないことが分かった. □

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Chapters 4-6, Springer-Verlag (2002).

[2] P.L. Bowers and K. Ruane, *Boundaries of nonpositively curved groups of the form $G \times \mathbb{Z}^n$*, Glasgow Math. J. 38 (1996), 177-189.

[3] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999).

[4] M.W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of Geometric Topology, (eds. R. Daverman and R. Sher), Elsevier, Amsterdam (2002), 373-422.

[5] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. Thesis, The Ohio State University (1988).