数理解析研究所講究録
1494 巻 2006 年 13-23

A construction of invariant curves at a periodic indeterminate point

Tomoko Shinohara [1]
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
E-mail address: sinohara@tokyo-tmct.ac.jp

篠原 知子
東京都立産業技術高等専門学校

Abstract

このノートでは，複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像 F の周期的不定点 p での不変集合を考察する．特に，記号列 $\iota \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ を用いて，不定点 p を通り写像 F により不変な曲線族 $\{W_\iota\}_{\iota\in I}$ を代数的に定義する．また，$\{W_\iota\}_{\iota\in I}$ はその様な曲線族の中で最大のものであり，曲線族上の力学系は $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ の部分空間 I 上のシフト写像を用いて表されることを示す．

1. Introduction.

高次元複素力学系は，高次元実力学系の問題を複素化することで，関数論・代数幾何の手法を用いて解決を図ること，また，高次元複素力学系独自の現象を定式化すること等を目標に，1 次元複素力学系理論の拡張を足がかりに，1990 年代より多くの研究者により活発に研究されている．2 次元複素射影空間上の有理写像による力学系はこの典型的な例である．これまでの研究では，ジュリア集合 (カオス的な軌道を持つ初期値の集合) 上に不変測度を構成し，測度論的な観点からその解析を行う手法が主流であった (E.Bedford, J.Smillie [1] の一連の研究など)．この不変測度は写像の不連続点である不定点ではそのままでは定義されず，高次元有理写像の力学系の研究を行う上での重大な障害となっている．近年，T.C.Dinh, N.Sibony [3] により，ある条件を満たす不定点においては，不変測度の構成が行われているが，いまだに，多くの整理すべき状況が残っている．一方， Y. Yamagishi [6],[7] により，これまでにない，新しいカオス的な力学系構造が不定点の近傍において存在することが示された．これらのことから，不定点における力学系構造の研究は，不変測度を用いた理論の一般化のための状況整理という点と高次元複素力学系独自のカオスを生み出すモデルの構成ができるという点から非常に重要であるといえる．このノートでは，複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像の周期的不定点における局所的な力学系構造について考察する．

まず，記号を準備する．$f_i(x,y,z)$, $(i=0,1,2)$ を次数 d の斉次多項式, $F:[x:y:z]\mapsto[f_0:f_1:f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像， $G:(x,y,z)\mapsto(f_0,f_1,f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とす

[1] Suported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Grants-in-Aid for Young Scientists (B) No. 18740094

る．このとき $\mathbf{C}^3$ からいくつかの解析的集合を除いたところで $\tilde{\pi}\circ G = F\circ\tilde{\pi}$ が成立する．ここで $\tilde{\pi}:\mathbf{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbf{P}^2$ は標準射影とする．点 $p\in\mathbf{P}^2$ が F の不定点であるとは，$G(\tilde{p})=(0,0,0)$ がある点 $\tilde{p}\in\tilde{\pi}^{-1}(p)$ で成り立つこととする．一般に, p が不定点であるとき, $\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ は一点にならない．ここで U_p は p の任意の開近傍とする．よって F は不定点 p では連続でない．更に，不定点 p が $p\in\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ を満たすとき p を周期的不定点と呼ぶことにする．定義より，周期的不定点は不動点と同様の再帰性を持っている．そのため，カオス現象を生む可能性が非常に高い．このノートでは，有理写像 $F:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ は不定点 $p=[0:0:1]$ を持つと仮定する．しばしば，複素 2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{P}^2$ の座標近傍系 $\{[x:y:z]\in\mathbf{P}^2\mid z\neq 0\}$ と同一視する．この座標近傍系上で，点 p は $p=(0,0)$ となる．点 $p_j=(0,\alpha_j)\in\mathbf{C}^2$ に対し，$\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分集合 $X:=\Big\{(x,y)\times[u:v]\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\mid xv-(y-\alpha_j)u=0\Big\}$ を定義する．X は閉集合であり $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^2$ の部分多様体となる．X の座標近傍系は次の $\{(U^i,\mu^i)\}_{i=0,1}$ である．

$$(d.0)\quad U^0:=\{(x,y)\times[u:v]\in X\mid u\neq 0\},\ \mu^0:U^0\ni(x,y)\times[u:v]\mapsto(x,v/u)\in\mathbf{C}^2,$$

$$(d.1)\ U^1:=\{(x,y)\times[u:v]\in X\mid v\neq 0\},\ \mu^1:U^1\ni(x,y)\times[u:v]\mapsto(u/v,y-\alpha_j)\in\mathbf{C}^2.$$

Definition 1. ([4] 参照). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{C}^2$ の X への制限写像 $\pi:X\to\mathbf{C}^2$ を点 p_j を中心とする $\mathbf{C}^2$ の blow up と定義する．$E:=\pi^{-1}(p_j)=(0,\alpha_j)\times\mathbf{P}^1$ を除外曲線と呼ぶ．

U^i の座標を (s,t) とする．この座標を用いて π を表すと次の形になる;

$$\pi:X\cap U^0\to\mathbf{C}^2,(s,t)\mapsto(s,st+\alpha_j),\quad \pi:X\cap U^1\to\mathbf{C}^2,(s,t)\mapsto(st,t+\alpha_j).$$

$\pi:X\setminus E\to\mathbf{C}^2\setminus\{p_j\}$ は双正則写像である．また $\mathbf{C}^2$ と $\mathbf{P}^2$ の残りの座標を自然に張り合わせることで, $p_j=[0:\alpha_j:1]$ を中心とする $\mathbf{P}^2$ の blow up を定義することができる．議論を簡単にするため，$\mathbf{C}^2$ の blow up と $\mathbf{P}^2$ の blow up を同一視することにする．

周期的不定点での局所的な力学系構造の研究は最初に，Y. Yamagishi によって始められた ([5],[6] 参照). ここでは，その結果を紹介する．新しい写像 $\tilde{F}:=F\circ\pi:X\to\mathbf{P}^2$ を定義する．π は p を中心とする $\mathbf{P}^2$ の blow up とする．写像 F は次の条件を満たすとする．

$$(A.0)\qquad \begin{cases}\tilde{F}\ \text{は}\ E\ \text{の近傍で正則写像で}\ \tilde{F}^{-1}(p)\cap E=\{p_1,p_2\}\ \text{である．}\\ p_i\ \text{の開近傍}\ N_i\ \text{が存在し},\tilde{F}\ \text{は}\ N_i\ \text{上双正則写像である．}\end{cases}$$

この条件の下で，p は F の周期的不定点となることに注意する．更に，$\tilde{F}$ は N_i 上，水平方向に吸引的であると仮定する．この時，カントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ により順序づけられた正

則曲線の族 $\{W_\iota\}_{\iota\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ が存在すること，特にこの曲線は p の安定多様体になることが証明された．この曲線族は *Cantor bouquet* と呼ばれるものである (詳細は [6], [7] 参照).

このノートでは，次の様な曲線族を扱う．この曲線族は，p の中心多様体や不安定多様体も含むもので，Cantor bouquet の拡張になっている．

Definition 2. 点 p を通る曲線族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が F により不変であるとは次の 2 条件を満たすこととする．

(1) 正則写像 $\Phi_\lambda:\Delta_{\rho_\lambda}\to\mathbf{C}^2$ で $\Phi_\lambda(0)=p$ と $\Phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda})=V_\lambda$ を満たすものが存在する，

(2) 任意の V_λ に対して，ただ一つの $\lambda'\in\Lambda$ と p のある開近傍 $N_{\lambda'}$ が存在し $F\circ\Phi_\lambda(0)=p$ と $F\circ\Phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda})\cap N_{\lambda'}\subset V_{\lambda'}$ を満たす．ここで $\Delta_{\rho_\lambda}:=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<\rho_\lambda\}$ とする．

このノートでは，曲線族はある正則写像のグラフとして与えられるものと仮定する．

Remark 1. 合成写像 $F\circ\Phi_\lambda$ は，点 p が不定点であっても $\Delta_{\rho_\lambda}\ni 0$ で 定義される． 実際，正則写像 $g:\Delta_{\rho_\lambda}\to\mathbf{C}^2$ で，任意の $z\in\Delta_{\rho_\lambda}\setminus\{0\}$ に対し $g(z)=F\circ\Phi_\lambda(z)$ を満たすものがただ一つ存在する (詳細は [2] 参照).

主定理は以下の通りである (詳しくは §2, Theorem 1 参照). F は (A.0) を満たすとする．このとき, 次の 2 つの主張が成り立つ．

(1.1) $F_0:=\pi^{-1}\circ\tilde{F}$ は X 上の有理写像であり，$\{p_1,p_2\}$ は F_0 の不定点である．

$j_1=1,2$ に対し $\pi_{j_1}:X_{j_1}\to X$ を点 p_{j_1} を中心とする blow up とし，写像 $\tilde{F}_{j_1}:=F_0\circ\pi_{j_1}:\pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1})\to X$ とする．このとき $E_{j_1}\subset\pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1})$ であり，次が成立する．

(1.2) $\tilde{F}_{j_1}|_{E_{j_1}}:E_{j_1}\to E$ は単射であり，$p_{j_1j_2}:=\tilde{F}_{j_1}^{-1}(p_{j_2})\in E_{j_1}$ とおくことができる．さらに，点 $p_{j_1j_2}$ の開近傍 $N_{j_1j_2}$ が存在し，ここで $\tilde{F}_{j_1}|_{N_{j_1j_2}}$ は双正則写像となる．但し E_{j_1} は X_{j_1} の除外曲線である．

この過程を帰納的に繰り返すことで，無限回の blow up $\pi_{j_1\dots j_n}:X_{j_1\dots j_n}\to X_{j_1\dots j_{n-1}}$ を行うことができ，任意の $j_n=1,2$ に対して点列 $p_{j_1j_2\dots j_n}\in X_{j_1\dots j_{n-1}}$ を得ることができる．

更に，$X_{j_1\dots j_{n-1}}$ の局所座標を用いて $p_{j_1\dots j_n}=(0,\alpha_{j_1\dots j_n})\in U^0_{j_1\dots j_n}$ とおくことができると仮定する．このとき, 任意の記号列 $\iota\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$，$\iota=(j_1\dots j_n,\dots)$ に対して形式的べき級数 $y=\phi_\iota(x)=\alpha_{j_1}x+\alpha_{j_1j_2}x^2+\cdots$ と

$$I:=\left\{\iota\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}\mid \phi_\iota(x)\text{ の収束半径 }\rho_\iota\text{ が正の定数である}\right\},$$

$$\text{任意の }\iota\in I\text{ に対して }W_\iota:=\{(x,y)\in N_\iota\mid y=\phi_\iota(x)\ \ x\in\Delta_{\rho_\iota}\}$$

を定義する．ここで N_ι は p の開近傍とする．このとき，次の結果を得る．

Theorem 2. $\{W_\iota\}_{\iota\in I}$ は p で局所的に不変な曲線族であり，また，その中で最大のものである．ここで，最大であるとは，任意の p で局所的に不変な曲線族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\{W_\iota\}_{\iota\in I}$ であることとする．

Corollary 3. ある単射写像 $\Psi:\{W_\iota\}_{\iota\in I}\to\{1,2\}^{\mathbf{N}}$, $W_\iota\mapsto\iota$ で $\Psi\circ F=\sigma\circ\Psi$ を満たすものが存在する．ここで $\sigma:\{1,2\}^{\mathbf{N}}\to\{1,2\}^{\mathbf{N}}$, $\sigma(j_1,j_2,\ldots)=(j_2,j_3,\ldots)$ は左シフト写像とする．

このノートの概要は以下の通りである．§2 で Theorem 1, §3 で Theorem 2 と Corollary 3 を証明する．§4 では p で局所的に不変な曲線族で，曲線が不安定多様体からなる新しい例を紹介する．

2. Theorem 1 の証明.

記号を簡単にするため，$i=1,2$ に対して，同じ局所座標 $(s,t)\in U^i$ を使う．この座標を用いて $p_{j_1}\in(0,\alpha_{j_1})\in U^i$ と表し次の集合を定義する．

$$X_{j_1}=\left\{(s,t)\times[u:v]\in U^i\times\mathbf{P}^1\mid sv-u(t-\alpha_{j_1})=0\right\}.$$

$p_{j_1}=(0,\alpha_{j_1})\in U^i$ を中心とする U^i の blow up を写像 $\pi_{j_1}:X_{j_1}\to U^i$ で定義し，除外曲線を $E_{j_1}:=\pi_{j_1}^{-1}(0,\alpha_{j_1})=(0,\alpha_{j_1})\times\mathbf{P}^1$ とする．X の場合と同様に，$\{(U^i_{j_1},\mu^i_{j_1})\}_{i=0,1}$ を X_{j_1} の座標近傍系とする．U^i を X に変えることで, 点 p_{j_1} 中心の X の blow up を定義することができる．次の定理では，同様の手順により，blow up の列を帰納的に定義する．

Theorem 1. 不定点 $p=[0:0:1]$ を持つ有理写像 $F:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ が条件 $(A.0)$ を満たすとする．このとき, $j_n=1,2$ に対して次の主張が成立する．

(1) $F_0:=\pi^{-1}\circ\tilde{F}:N_{j_1}\to X$ と定義する．このとき,

(1.1) $\{p_1,p_2\}$ は F_0 の不定点である．

点 p_{j_1} 中心の X の blow up を $\pi_{j_1}:X_{j_1}\to X$, X_{j_1} の除外曲線 を E_{j_1}, 写像を $\tilde{F}_{j_1}:=F_0\circ\pi_{j_1}:\pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1})\to X$ と定義する．このとき, $E_{j_1}\subset\pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1})$ であり，次が成立する

(1.2) $\tilde{F}_{j_1}|_{E_{j_1}}:E_{j_1}\to E$ は単射であり, $p_{j_1j_2}:=\tilde{F}_{j_1}^{-1}(p_{j_2})\in E_{j_1}$ とおくことができる．さらに点 $p_{j_1j_2}$ の開近傍 $N_{j_1j_2}$ が存在し，$\tilde{F}_{j_1}|_{N_{j_1j_2}}$ は双正則写像となる．

任意の n に対して，同様の操作を繰り返すことができ，次の主張が成立する;

(n) 点 $p_{j_1\ldots j_n}:=\tilde{F}^{-1}_{j_1\ldots j_{n-1}}(p_{j_2\ldots j_n})\in E_{j_1\ldots j_{n-1}}$ と写像 $F_{j_1\ldots j_n}=\pi^{-1}_{j_2\ldots j_n}\circ\tilde{F}_{j_1\ldots j_{n-1}}:N_{j_1\ldots j_n}\to X_{j_2\ldots j_n}$ を定義する．このとき次が成立する．

$(n.1)$ $p_{j_1\ldots j_n}$ は $F_{j_1\ldots j_n}$ の不定点である．

$p_{j_1\cdots j_n}$ を中心とする $X_{j_1\cdots j_{n-1}}$ の *blow up* を $\pi_{j_1\cdots j_n}: X_{j_1\cdots j_n} \to X_{j_1\cdots j_{n-1}}$, $X_{j_1\cdots j_n}$ の除外曲線を $E_{j_1\cdots j_n}$, 写像 $\tilde{F}_{j_1\cdots j_n} := F_{j_1\cdots j_n} \circ \pi_{j_1\cdots j_n} : \pi^{-1}_{j_1\cdots j_n}(N_{j_1\cdots j_n}) \to X_{j_2\cdots j_n}$ を定義する. このとき $E_{j_1\cdots j_n} \subset \pi^{-1}_{j_1\cdots j_n}(N_{j_1\cdots j_n})$ であり, 次が成立する.

$(n.2)$ $\tilde{F}_{j_1\cdots j_n}|_{E_{j_1\cdots j_n}} : E_{j_1\cdots j_n} \to E_{j_2\cdots j_n}$ は単射であり, $p_{j_1\cdots j_{n+1}} := \tilde{F}^{-1}_{j_1\cdots j_n}(p_{j_2\cdots j_{n+1}}) \in E_{j_1\cdots j_n}$ とおくことができる. さらに $p_{j_1\cdots j_{n+1}}$ の開近傍 $N_{j_1\cdots j_{n+1}}$ が存在し, $\tilde{F}_{j_1\cdots j_n}|_{N_{j_1\cdots j_{n+1}}}$ は双正則写像となる.

Theorem 1 の証明. $p(x,y)$ と $q(x,y)$ は多項式とする. 以下では, $O(p(x,y),q(x,y))$ は $i+j \geq 2$ を満たす自然数 i, $j \in \mathbf{N}$ に対して $p(x,y)^i q(x,y)^j$ の形をした項の和を表すとする. $p_{j_1} \in U^1$ の場合も全く同様の議論が成立するので, 以下では $p_{j_1} = (0, \alpha_{j_1}) \in U^0 \cap E$ の場合のみ考える. $(A.0)$ から, $\tilde{F}$ は p_{j_1} のある開近傍 N_{j_1} 上, 次の形をしていることがわかる;

$$\tilde{F}(s,t) = (a_{10}s + a_{01}(t-\alpha_1) + O(s, t-\alpha_1), b_{10}s + b_{01}(t-\alpha_1) + O(s, t-\alpha_1)),$$

$$:= (f(s,t), g(s,t)).$$

ここで $|J\tilde{F}_{(0,\alpha)}| \neq 0$ であること, つまり $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0$ であることに注意する. このとき blow up 写像 π を用いて, $F_0 : N_j \to X$ を $(s,t) \in N_{j_1} \cap U^0$ に対して以下の様に, 定義することができる.

$$F_0(s,t) := \pi^{-1} \circ \tilde{F}(s,t) = (f(s,t), g(s,t)) \times [f(s,t) : g(s,t)]$$

まず, 最初に (1.1) の主張, $p_{j_1} = (0, \alpha_{j_1})$ が $F_0(s,t)$ の不定点であることを背理法で証明する. $p_{j_1} = (0, \alpha_{j_1})$ が F_0 の不定点でないと仮定する. このとき, 収束べき級数 $f(s,t)$ と $g(s,t)$ は共通因子 $h(s,t)$ を持ち, $\{(s,t) \in N_{j_1} \mid h(s,t) = 0\} \subset \tilde{F}^{-1}(p)$ が成り立つ. これは $\tilde{F}^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$ であることに矛盾するので主張 (1.1) が証明される.

(1.2) を証明するため X を p_{j_1} で blow up する. 以下の新しい写像を定義する. $\tilde{F}_{j_1} := F_0 \circ \pi_{j_1} : \pi^{-1}_{j_1}(N_{j_1}) \to X$. これは $(d.0)$ より $\pi^{-1}(N_{j_1}) \cap U^0_{j_1}$ 上, 次の形をしていることがわかる:

$$\tilde{F}_{j_1}(s,t) \;=\; F_0(s, st+\alpha_{j_1}) = \left(f(s, st+\alpha_{j_1}), \frac{b_{10} + b_{01}t + \tilde{O}(s,st)}{a_{10} + a_{01}t + \tilde{O}(s,st)}\right),$$

ここで $\tilde{O}(s,st)$ は $O(s,st)$ を s で割ることによって得られた式とする. このとき

$$\tilde{F}_{j_1}(0,t) = \left(0, \frac{b_{10} + b_{01}t}{a_{10} + a_{01}t}\right),$$

であることより，$\tilde{F}_{j_1}$ は $U^0_{j_1} \cap E_{j_1} = \{(s,t) \in U^0_{j_1} \mid s = 0\}$ 上単射であることがわかる．同様に (d.1) から，$(s,t) \in U^1_{j_1}$ に対して $\tilde{F}_{j_1}$ は $\pi^{-1}(N_{j_1}) \cap U^1_{j_1}$ 上，次の形をしていることがわかる；

$$\tilde{F}_1(s,t) = F_0\left(st, t+\alpha_{j_1}\right) = \left(f(st, t+\alpha_{j_1}), \frac{b_{10}s + b_{01} + \tilde{O}(st,t)}{a_{10}s + a_{01} + \tilde{O}(st,t)}\right).$$

ここで，$\tilde{O}(st,t)$ は $O(st,t)$ を t で割ることにより得られる式とする．このとき，$\tilde{F}_{j_1}(0,0) = (0, b_{01}/a_{01})$ であり $\tilde{F}_{j_1}$ は除外曲線 E_{j_1} 上単射であることがわかる．一方，F_0 は $N_{j_1} \setminus \{p_{j_1}\}$ 上で双正則写像であり π_{j_1} は $\pi^{-1}_{j_1}(N_{j_1}) \setminus E_{j_1}$ 上で双正則写像であることから，$\tilde{F}_{j_1}$ は $\pi^{-1}_{j_1}(N_{j_1}) \setminus E_{j_1}$ 上で双正則写像であることがわかる．結果として，$\tilde{F}_{j_1}$ は $\pi^{-1}(N_{j_1})$ で双正則写像である．この手順を任意の $n \geq 1$ に対して帰納的に行うことができ，Theorem 1 を証明することができる．□

3. Theorem 2 と *Corollary 3* の証明.

X を Theorem 1 の方法で n 回 blow up してできた空間を $X_{j_1 \ldots j_n}$ とし，その座標系を $\{(U^i_{j_1 \ldots j_n}, \mu^i_{j_1 \ldots j_n})\}_{i=0,1}$ とする．以下では，任意の n に対し，$p_{j_1 \ldots j_{n+1}} \in U^0_{j_1 \ldots j_n}$ であると仮定し，この座標を用いて $p_{j_1 \ldots j_n} = (0, \alpha_{j_1 \ldots j_n})$ とおく．$\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を F で局所的に不変な任意の曲線族とする．最初に $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \{W_\iota\}_{\iota \in I}$ であることを証明する．Definition 2 より，V_λ はある正則関数 ϕ_λ のグラフにより定義され，写像 Φ_λ を用いて $V_\lambda = \{(x,y) \in N_\lambda \mid y = \phi_\lambda(x)\} = \Phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda})$ と表されている．まず，次の補題を証明する．

Lemma 4. (1) 任意の V_λ に対して p のある開近傍 N_λ と点 $p_{j_1} \in \{p_1, p_2\} = \tilde{F}^{-1}(p)$ が存在し，$\{p_{j_1}\} = \overline{\pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda \setminus \{p\})} \cap E$ が成立する．ここで，閉包は $\pi^{-1}(N_\lambda)$ の相対位相でとる．$(V_\lambda)_{j_1} := \overline{\pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda \setminus \{p\})}$ と定義する．
(2) 点 p_{j_1} のある開近傍 $(N_\lambda)_{j_1}$ と Δ_{ρ_λ} 上の正則関数 $(\phi_\lambda)_{j_1}(x)$ が存在し，

$$(V_\lambda)_{j_1} \cap (N_\lambda)_{j_1} := \left\{(x,y) \in (N_\lambda)_{j_1} \cap U^0 \mid y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} + \cdots := (\phi_\lambda)_{j_1}(x)\right\}$$

が成立する．特に，(1) より $c_1 = \alpha_{j_1}$ であり，曲線族 $\{(V_\lambda)_{j_1}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を得る．

正則写像 $(\Phi_\lambda)_{j_1} : \Delta_{\rho_\lambda} \to U^0, x \mapsto (x, (\phi_\lambda)_{j_1}(x))$ を定義する．Definition 2 より，任意の V_λ に対して，ある $V_{\lambda'}$ が存在し $F \circ \phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda}) \cap N_{\lambda'} \subset V_{\lambda'}$ を満たす．更に，(1) よりこの $V_{\lambda'}$ に対し $p_{i_1} \in \{p_1, p_2\}$ が存在し，$p_{i_1} \in (V_{\lambda'})_{i_1} \cap E$ を満たす．このとき次が成立する．
(3) $F_0 \circ (\Phi_\lambda)_{j_1}(0) = p_{i_1}$ である．また，点 p_{i_1} のある開近傍 $(N_{\lambda'})_{i_1}$ が存在し，$F_0 \circ (\Phi_\lambda)_{j_1}(\Delta_{\rho_\lambda}) \cap (N_{\lambda'})_{i_1} \subset (V_{\lambda'})_{i_1}$ が成立する．

lemma 4 の証明．$y = \phi_\lambda(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ とする．V_λ は p で F により局所的に不変

であるから, ある点列 $p_n \in V_\lambda$ で $p_n \neq p$, $p_n \to p$, $F(p_n) \to p$ を満たすものが存在する. さらに, 次が成立する;

$$\pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda) \cap U^0 = \{(s,t) \in U^0 \mid st = c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_n s^n + \cdots\}$$

$$= \{(s,t) \in U^0 \mid s = 0\} \cup \{(s,t) \in U^0 \mid t = c_1 + c_2 s + \cdots + c_n s^{n-1} + \cdots\}$$

$$\pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda \setminus \{p\}) = \{(s,t) \in U^0 \mid t = c_1 + c_2 s + \cdots + c_n s^{n-1} + \cdots\} \setminus \{(0,c_1)\}.$$

$\tilde{p}_n := \pi^{-1}(p_n)$ とする. $p_n \to p$ より, $\tilde{p}_n \in \pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda \setminus \{p\})$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_n = (0, c_1) \in E$ である. 更に

$$\overline{\pi^{-1}(V_\lambda \cap N_\lambda \setminus \{p\})} = \{(s,t) \in U^0 \mid t = c_1 + c_2 s + \cdots + c_n s^{n-1} + \cdots\}$$

であることがわかる. これを $(V_\lambda)_{j_1}$, $\tilde{p} = (0, c_1)$ とおく. $\tilde{F}$ が正則写像であることから, $\tilde{F}(\tilde{p}) = p$ であるので, $\tilde{p} = p_{j_1} \in \{p_1, p_2\}$ であることがわかる. 以上より, (1), (2) が示された.

π が $X \setminus E$ 上の双正則写像であることから $F_0((V_\lambda)_{j_1} \setminus \{p_{j_1}\}) \subset \pi^{-1}(V'_\lambda)$ である. さらに Remark 1 より, $F_0 \circ (\phi_\lambda)_{j_1}$ は Δ_{ρ_λ} 上で定義され, p_{i_1} のある開近傍 $(N_{\lambda'})_{i_1}$ が存在し

$$(N_{\lambda'})_{i_1} \cap \overline{F_0 \circ (\phi_\lambda)_{j_1}(\Delta_{\rho_\lambda})} = (N_{\lambda'})_{i_1} \cap \overline{F_0 \circ (\phi_\lambda)_{j_1}(\Delta^*_\rho)} \subset \overline{\pi^{-1}(V_{\lambda'} \setminus \{p\})} = \overline{(V_{\lambda'})_{i_1}},$$

$$F_0 \circ (\phi_\lambda)_{j_1}(\Delta_{\rho_\lambda}) \cap (N_{\lambda'})_{i_1} \subset (V_{\lambda'})_{i_1} \text{ を満たす.} \qquad \square$$

この過程を帰納的に繰り返すことができ, 曲線族 $\{(V_\lambda)_{j_1\cdots j_n}\}$ を $X_{j_1\cdots j_n}$ 上に定義することができる. Lemma 4 と同様にして, 任意の n に対して次の結果を得ることができる. 証明は省略する.

Lemma 5. (1) 任意の $(V_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}}$ に対して, $p_{j_1\cdots j_{n-1}}$ のある開近傍 $(N_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}}$ と $p_{j_1\cdots j_n} \in \tilde{F}^{-1}_{j_1\cdots j_{n-1}}(p_{i_1\cdots i_{n-1}})$ が存在し

$$\{p_{j_1\cdots j_n}\} = \overline{\pi^{-1}_{j_1\cdots j_{n-1}}((V_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}} \cap (N_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}} \setminus \{p_{j_1\cdots j_{n-1}}\})} \cap E_{j_1\cdots j_{n-1}} \text{ を満たす.}$$

$$(V_\lambda)_{j_1\cdots j_n} := \overline{\pi^{-1}_{j_1\cdots j_{n-1}}((V_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}} \cap (N_\lambda)_{j_1\cdots j_{n-1}} \setminus \{p_{j_1\cdots j_{n-1}}\})} \subset X_{j_1\cdots j_{n-1}} \text{ と定義する.}$$

(2) 点 $p_{j_1\cdots j_n}$ のある開近傍 $(N_\lambda)_{j_1\cdots j_n}$ と Δ_{ρ_λ} 上の正則写像 $(\phi_\lambda)_{j_1\cdots j_n}(x)$ が存在し

$$\begin{aligned}&(V_\lambda)_{j_1\cdots j_n} \cap (N_\lambda)_{j_1\cdots j_n} \\ &:= \left\{(x,y) \in (N_\lambda)_{j_1\cdots j_n} \cap U^0_{j_1\cdots j_{n-1}} \mid y = c_n + c_{n+1}x + \cdots := (\phi_\lambda)_{j_1\cdots j_n}(x)\right\},\end{aligned}$$

$c_n = \alpha_{j_1\dots j_n}$ が成立する．$(\Phi_\lambda)_{j_1\dots j_n} : \Delta_{\rho_\lambda} \to \mathbf{C}^2$, $x \mapsto (x, (\phi_\lambda)_{j_1\dots j_n}(x))$ と定義すると，これを用いて $X_{j_1\dots j_n}$ 上の曲線族 $\{(V_\lambda)_{j_1\dots j_n}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を得る．$p_{i_1\dots i_n} \in (V_{\lambda'})_{i_1\dots i_n} \cap E_{j_1\dots j_n}$ とおく．
(3) $F_{j_1\dots j_n} \circ (\Phi_\lambda)_{j_1\dots j_n}(0) = p_{i_1\dots i_n}$ である．また，点 $p_{i_1\dots i_n}$ の開近傍 $(N_\lambda)_{i_1\dots i_n}$ が存在し $F_{j_1\dots j_n} \circ (\Phi_\lambda)_{j_1\dots j_n}(\Delta_{\rho_\lambda}) \cap (N_\lambda)_{i_1\dots i_n} \subset (V_{\lambda'})_{i_1\dots i_n}$ が成立する．

定理の証明に戻る．これまでに得られた点列 $p_{j_1\dots j_n} = (0, \alpha_{j_1,\dots,j_n})$ を用いて

$$W_\iota := \left\{(x,y) \in N_\lambda \mid y = \alpha_{j_1}x + \alpha_{j_1j_2}x^2 + \cdots\right\} \text{ を定義する．}$$

Lemma 5 (2) より，$c_n = \alpha_{j_1\dots j_n}$ が任意の n に対して成り立つので $V_\lambda = W_\iota$ となる．よって $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \{W_\iota\}_{\iota\in I}$ が成立する．

次に $\{W_\iota\}_{\iota\in I}$ が点 p で F により局所的に不変な曲線族であることを示す．このため，点 p のある開近傍 $N_{\iota'}$ と $\iota' \in I$ が存在し $F \circ \Phi_\iota(\Delta_{\rho_\iota}) \cap N_{\iota'} \subset W_{\iota'}$ が任意の $W_\iota = \Phi_\iota(\Delta_{\rho_\iota})$ に対して成立することを示せばよい．帰納的に任意の n に対し，次を定義する:

$$(W_\iota)_1 := \overline{\pi^{-1}(W_\iota) \setminus E}, \dots$$
$$(W_\iota)_n := \overline{(\pi \circ \pi_{j_1} \circ \pi_{j_1j_2} \circ \cdots \pi_{j_1\dots j_{n-1}})^{-1}(W_\iota) \setminus E_{j_1\dots j_{n-1}}}.$$

このとき Lemma 4 の証明と同様の議論で次の主張を示すことができる:

$$(W_\iota)_1 \cap E = \{(0, \alpha_{j_1})\} = p_{j_1}, \dots, (W_\iota)_n \cap E_{j_1\dots j_{n-1}} = \{(0, \alpha_{j_1\dots j_n})\} = p_{j_1\dots j_n}$$
$$(W_\iota)_1 = \{(x,y) \in (N_\lambda)_{j_1} \mid y = \alpha_{j_1} + \alpha_{j_1j_2}x + \cdots := (\phi_\iota)_{j_1}(x)\}, \cdots$$
$$(W_\iota)_n = \{(x,y) \in (N_\lambda)_{j_1\dots j_n} \mid y = \alpha_{j_1\dots j_n} + \alpha_{j_1\dots j_{n+1}}x + \cdots := (\phi_\iota)_{j_1\dots j_n}(x)\},$$

但し $(N_\lambda)_{j_1\dots j_n}$ は $p_{j_1\dots j_n}$ の $X_{j_1\dots j_{n-1}}$ での開近傍とする．

$$W_{\sigma(\iota)} = \{(x,y) \in (N_\lambda) \mid y = \phi_{\sigma(\iota)}(x) = \alpha_{j_2}x + \alpha_{j_2j_3}x^2 + \cdots\} \text{ とする．}$$

$W_{\sigma(\iota)} = W_{\iota'}$ であることを示す．Theorem 1 から，$\tilde{F}_{j_1\dots j_{n-1}}(p_{j_1\dots j_n}) = p_{j_2\dots j_n}$ で $p_{j_2\dots j_n} \in \tilde{F}_{j_1\dots j_{n-1}}((W_\iota)_n)$ であることがわかる．よって

$$\tilde{W}_{j_2\dots j_n} := \tilde{F}_{j_1\dots j_{n-1}}((W_\iota)_n) \text{ を定義することができる．}$$

このとき次の補題が成り立つ．

Lemma 6. 任意の n に対して，$p_{j_2\dots j_n}$ のある開近傍 $(N_\lambda)_{j_2\dots j_n}$ と $\Delta_{\rho_{j_2\dots j_n}}$ 上の正則関数 $\psi_{j_2\dots j_n}$ が存在し

$$\tilde{W}_{j_2\dots j_n} = \left\{(x,y) \in (N_\lambda)_{j_2\dots j_n} \mid y = \psi_{j_2\dots j_n}(x) \quad x \in \Delta_{\rho_{j_1\dots j_n}}\right\} \text{ が成り立つ．}$$

特に, ある正の定数 $\rho_{\sigma(\iota)}$ が存在し $\rho_{j_1\cdots j_n} > \rho_{\sigma(\iota)} > 0$ が任意の n に対して成り立つ.

Lemma 6 の証明. $\tilde{F}_{j_1\cdots j_{n-1}}(x,y) := (f(x,y), g(x,y)) := (u,v)$ とする. $(\phi_\lambda)_{j_1\cdots j_n}(0) = \alpha_{j_1\cdots j_n}$ であることにより, 0 で 正則な関数 $x \mapsto u = f(x, \phi_{j_1\cdots j_n}(x))$ を得ることができ, 次が成立する:

$$u'(0) = (f)_x(0, \alpha_{j_1\cdots j_n}) + (f)_y(0, \alpha_{j_1\cdots j_n})\phi'_{j_1\cdots j_n}(0).$$

Theorem 1 の証明より, $f(x,y) = a_{10}x + a_{01}xy + O(x,xy)$ である. これより, 以下が成り立つ.

$$(f)_x(x,y) = a_{10} + a_{01}y + O_x(x,xy), \quad (f)_y(x,y) = a_{01}x + O_y(x,xy),$$

$$(f)_x(0,y) = a_{10} + a_{01}y, \quad (f)_y(0,y) = 0.$$

$p_{j_1\cdots j_n} \in U^0_{j_1\cdots j_{n-1}}$ から, $a_{10} + a_{01}\alpha_{i_1\cdots i_n} \neq 0$ であり, $u'(0) = (f)_x(0, \alpha_{j_1\cdots j_n}) \neq 0$ である. よって逆写像定理より, $u = f(x, \phi_{j_1\cdots j_n}(x))$ の逆関数 $\tilde{f}$ が $u = 0$ の近傍で存在するので, それを $x = \tilde{f}(u)$ とおく. これより, $(x,y) \in (W_\iota)_n$ を用いて, 任意の点 $(u,v) \in \tilde{W}_{j_2\cdots j_n} = \tilde{F}_{j_1\cdots j_{n-1}}((W_\iota)_n)$ は次の様に表される;

$$v = g(x,y) = g(x, \phi_{j_1\cdots j_n}(x)) = g(\tilde{f}(u), \phi_{j_1\cdots j_n}(\tilde{f}(u))). \qquad \square$$

さらに点列 $\{p_{j_1\cdots j_n}\}$ の構成方法から, 次の結果を得ることができる.

Lemma 7. (1) $\pi_{j_2\cdots j_{n-1}}(\tilde{W}_{j_2\cdots j_n}) \cap E_{j_2\cdots j_{n-2}} = \{p_{j_2\cdots j_{n-1}}\}, \ldots,$
$\pi \circ \pi_{j_2} \cdots \circ \pi_{j_2\cdots j_{n-1}}(\tilde{W}_{j_2\cdots j_n}) \cap \{(x,y) \in N_p \mid x = 0\} = \{p\}.$
(2) $\tilde{W} := \pi \circ \pi_{j_2} \circ \cdots \circ \pi_{j_2\cdots j_{n-1}}(\tilde{W}_{j_2\cdots j_n})$ とする. このとき, $\tilde{W} = W_{\sigma(\iota)}$ である.
(3) $\overline{F(W_\iota \setminus \{p\})} = \overline{W_{\sigma(\iota)} \setminus \{p\}}$.

よって点 p の開近傍 $N_{\sigma(\iota)}$ が存在し $F \circ \phi_\iota(\Delta_{\rho_\iota}) \cap N_\iota \subset W_{\sigma(\iota)}$ が成り立つことがわかる.

以上より, Theorem 2 と Corollary 3 が証明された.

4. Example.

このセクションでは, 次の有理写像 F の不定点 $p = [0:0:1]$ での局所的に不変な曲線族 $\{W_\iota\}_{\iota \in I}$ を考察する:

$$F[x:y:z] = \left[ax^3 : y(y-x)z : x^2z\right].$$

F は $\mathbf{C}^2$ 上で次の形となる.

$$F(x,y) = \left(ax, \frac{y(y-x)}{x^2}\right).$$

F の不定点 $p=(0,0)$ で Theorem 1 の blow up を行う．このとき，$\alpha_{j_1\cdots j_n}\in U^0_{j_1\cdots j_{n-1}}$ であることがわかる．$|a|<1$ のとき，この F は Cantor bouquet の条件を満たすので p で局所的に不変な曲線族 $\{W_\iota\}_{\iota\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ が存在する．特に，この曲線 W_ι は p の安定多様体である．

$|a|>1$ のときを考える．このとき，$p_1=(0,0)$, $p_1=(0,1)$ とすると計算により次が求まる．

$$W_{11\cdots}=\left\{(x,y)\in\mathbf{C}^2\mid y=0\right\},\ W_{211\cdots}=\left\{(x,y)\in\mathbf{C}^2\mid y=x\right\},$$

$$W_{2211\cdots}=\left\{(x,y)\in N_p\mid y:=\phi_{2211\cdots}=x+ax^2-a^2x^2+\cdots\right\},$$

$$W_{1211\cdots}=\left\{(x,y)\in N_p\mid y:=\phi_{1211\cdots}=-ax^2+a^2x^3-2a^3x^4+\cdots\right\}$$

であることがわかる．但し N_p は p の開近傍である．特に，$\phi_{2211\cdots}$, $\phi_{1211\cdots}$ の収束半径は $1/4|a|$ であり，これらは p の不安定多様体である．

一方，漸化式

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}(a^{n-1}-2a)-\sum_{k+l\le n+1,3\le k,l}\alpha_k\alpha_l$$

を考える．このとき

$$W_{22\cdots}=\left\{y=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n\right\}$$

であることがわかる．更にこの形式的べき級数の収束半径は 0 であることを示すことができる．よって $W_{22\cdots}=\emptyset$ である．

最後に，$a=1$ の場合，F の不定点 $p=(0,0)$ の近傍の不変集合の様子を表した図を紹介する．R を適当な正の定数とする．Figure 1 の黒い部分は $|F^6(x,y)|<R$ となる実数 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を表している．$a=1$ の場合，不変曲線族は中心多様体となると予想されるが，存在するなら，この部分に含まれると考えられる．

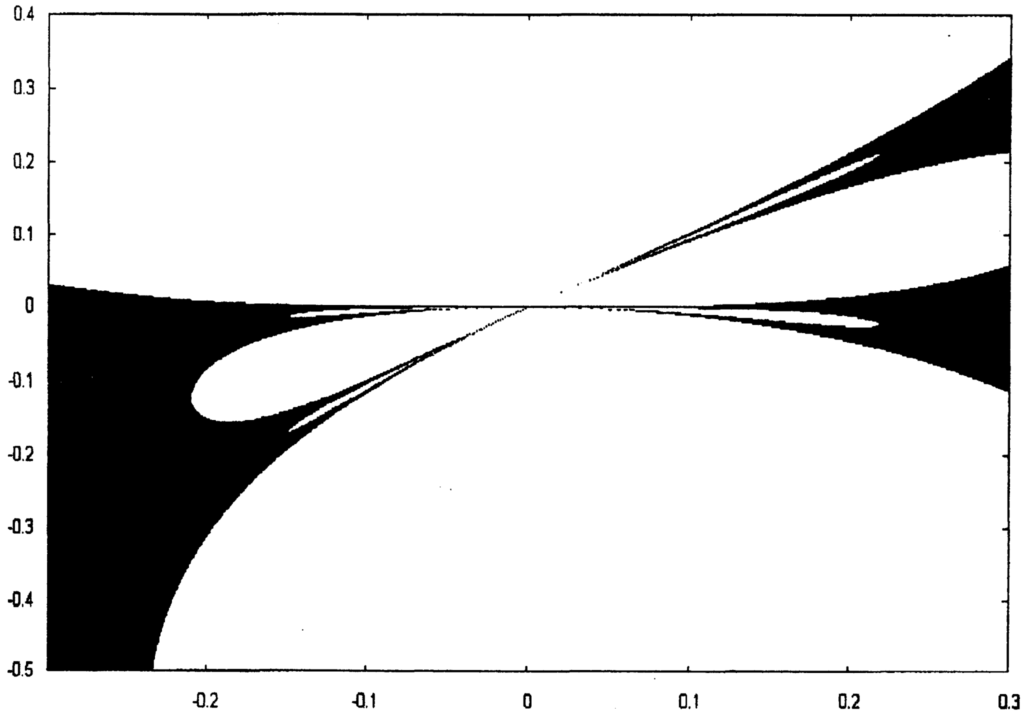

Figure 1: invariant sets near $p = (0, 0)$

References

[1] E. Bedford and J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Invent. Math. 103 (1991), 69-99.

[2] J. Diller, *Dynamics of birational maps of* $\mathbf{P}^2$, Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 721–772.

[3] T.C.Dinh, N.Sibony, *On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in* $\mathbf{C}^2$, preprint.

[4] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[5] T. Shinohara, *Locally invariant curves at a periodic indeterminate point of rational maps*, preprints.

[6] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[7] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55(2003) 897–908.