

内部重力波の非等方エネルギー流

Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute
Yuri Lvov
Naoto Yokoyama (横山直人)*

1 はじめに

内部重力波は密度成層流体中の浮力を復元力とする、海洋の深層から表層まで広く存在する波動である。内部重力波は海底地形の急激な変化や潮汐流、大気擾乱によって励起され、波数間の非線形相互作用により大きなスケールから小さなスケールにカスケードし乱流スケールで散逸される。そのスペクトルは、水平波長 1m から 10^5 m, 鉛直波長 1m から 10^3 m, 時間周期 10^3 秒から 10^5 秒と広帯域にわたる。

一般に安定な密度成層が存在するとき、鉛直方向の混合が抑制され質量、運動量は輸送されにくい。海洋中では、数 m 程度の内部重力波が砕波することによって、鉛直混合が促進される。この鉛直混合は熱塩循環を駆動することによって地球規模の海洋大循環の一端を担い、長期的な気候変動の重要な要因であると考えられている (McWilliams, 1996)。また、鉛直混合は海水に溶存している気体やプランクトンを混合することによって海洋中の生態系の維持においても重要な役割を果たしている。鉛直混合のエネルギー供給源である内部重力波の波数間相互作用を理解することは、海洋物理学におけるもっとも重要な課題の一つである。

内部重力波はそのスペクトルが海洋全体のスケールから数 m まで広帯域にわたるために観測することが困難である。観測データのエネルギースペクトルでは、振動数スペクトルと鉛直波数スペクトルのべき指数に関してさまざまな組み合わせが得られている。Lvov *et al.* (2004) は、地球の自転によるコリオリ効果を無視したスケール不変な運動論的方程式の定常解として 1 パラメータの族を数値的に得た。この定常解の族は、内部重力波の普遍平衡スペクトルモデルとされている Garrett-Munk スペクトル (Garrett and Munk, 1972, 1975, 1979) の高波数・高振動数領域や解析的定常解である Lvov-Tabak スペクトル (Lvov and Tabak, 2001), さらにエネルギー等分配状態を包含している。また、不規則に分布しているように見られる観測データから得られる指数はすべて定常解近傍に存在することを示した。“これらの定常解の集合のなかでどのような条件のもとでいずれの解が実現するか?” という問題は未解決である。この問題の解決に向けて、本研究では内部重力波の弱乱流理論に基づく運動論的方程式の数値計算を行い、非平衡エネルギー流を示す。また、得られたスペクトル形状について議論する。

2 数値計算法

静水圧近似のもとで非圧縮成層流体の運動方程式は以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (1a)$$

*e-mail: yokoyan@rpi.edu

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (1d)$$

ここで ρ は海水の密度, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ は水平速度, w は鉛直速度, P は圧力である. また, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平勾配演算子であり, g は重力加速度である.

鉛直座標, z , にかわって Lagrangian 座標系として密度座標, ρ , を用いる. 海水の密度変化は海底での密度 ρ_0 と比べて十分小さいとする Boussinesq 近似のもとで運動方程式は,

$$H = \int d\mathbf{p} \omega |a(\mathbf{p})|^2 + \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 ((V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} a(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}_1) a^*(\mathbf{p}_2) + \text{c.c.}) + (U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} a(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) + \text{c.c.})) \quad (2)$$

を Hamiltonian とする正準方程式

$$i \frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a^*(\mathbf{p})} \quad (3)$$

で表される (Lvov and Tabak, 2004). 正準変数 $a(\mathbf{k}, m)$ は成層関数, $\Pi(\mathbf{x}, \rho) = \rho dz/d\rho$, と水平速度ポテンシャル, $\phi(\mathbf{x}, \rho)$, の Fourier 成分の線形結合

$$a(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2g}{\omega}} \frac{N}{|\mathbf{k}|} \tilde{\Pi}(\mathbf{k}, m) + i \sqrt{\frac{2\omega}{g}} \frac{|\mathbf{k}|}{N} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, m) \quad (4)$$

で与えられる. また, $\delta/\delta a^*$ は $a(\mathbf{p})$ の複素共役 $a^*(\mathbf{p})$ による汎関数微分を表す. $V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}$ および $U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$ は $V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} = V_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}}$, $U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1} = U_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}}$ といった交換対称性を持つ行列要素である. 振動数 $\omega(\mathbf{k}, m)$ は線形分散関係

$$\omega = \sqrt{f^2 + \frac{g^2}{\rho_0^2 N^2} |\mathbf{k}|} \quad (5)$$

で与えられる. 鉛直座標の Fourier 波数, k_z , と密度座標の Fourier 波数, m , は $m = -g/(\rho_0 N^2) k_z$ の関係にある. ここで N は浮力 (Brunt-Väisälä) 振動数, f は慣性振動数である.

正準方程式 (3) において非線形項は十分小さいとし, 乱雑位相近似 (Zakharov *et al.*, 1992) を用いると, アクションスペクトル, $n(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \langle a(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}') \rangle$ の時間発展方程式として運動論的方程式

$$\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = \int d\mathbf{p}_{12} (\delta_{0-1-2}^{\mathbf{p}, \omega} |V_{1,2}^0|^2 (n_1 n_2 - n(n_1 + n_2)) - \delta_{0-1+2}^{\mathbf{p}, \omega} |V_{0,2}^1|^2 (n n_2 - n_1(n + n_2)) - \delta_{0+1-2}^{\mathbf{p}, \omega} |V_{0,1}^2|^2 (n n_1 - n_2(n + n_1))) \quad (6)$$

が得られる。ここで、アクションスペクトルを用いて、エネルギースペクトルは $E(\mathbf{p}) = \omega n(\mathbf{p})$ で与えられる。運動論的方程式は、実質的な波数間のエネルギー輸送が 3 波共鳴

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \omega = \omega_1 + \omega_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p} = -\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \omega = -\omega_1 + \omega_2 \end{cases}, \quad \text{または} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \\ \omega = \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \quad (7)$$

を満たす波数間でのみ行われることを表す。これらの乱雑位相近似およびその帰結である共鳴相互作用によってエネルギー輸送を記述する方法は弱乱流理論と呼ばれる。

本研究では、水平面内の等方性を仮定し、線形分散関係式 (5) を用いて ω と m を独立変数とする時間発展方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}(\omega, m)}{\partial t} = & \int d\omega_{12} dm_{12} \left(\delta_{0-1-2}^{\omega, m} |\hat{V}_{1,2}^0|^2 (\hat{n}_1 \hat{n}_2 - \hat{n}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2)) \right. \\ & \left. - \delta_{0-1+2}^{\omega, m} |\hat{V}_{2,0}^1|^2 (\hat{n} \hat{n}_2 - \hat{n}_1 (\hat{n} + \hat{n}_2)) - \delta_{0+1-2}^{\omega, m} |\hat{V}_{0,1}^2|^2 (\hat{n} \hat{n}_1 - \hat{n}_2 (\hat{n} + \hat{n}_1)) \right) \\ & + \text{散逸項} \end{aligned} \quad (8)$$

を解く。散逸項には、 $-(\omega/N)^{16} \hat{n}(\omega, m)$ に比例する浮力振動数を越える高振動数領域の散逸を模擬する項と、 $-|\mathbf{k}|^{16} \hat{n}(\omega, m)$ に比例する強乱流による散逸を模擬する項の和で表される人工粘性を用いた。また、コリオリ力による慣性振動を無視し、線形分散関係には $\omega \propto |\mathbf{k}|/|m|$ を用いた。さらに、鉛直方向の対称性、 $\hat{n}(\omega, -m) = \hat{n}(\omega, m)$ を仮定した。式 (8) の積分は 96×144 点の一様格子で評価した。

初期条件には $(\omega, m) = (5, 5)$ の周辺に局在し、Gaussian 型の裾を持つエネルギースペクトルを用いた。時間発展は 4 次 Runge-Kutta 法により行った。この系は外力によるエネルギーの入力のない減衰系なので、以下ではエネルギー散逸率が最大となる弱乱流系としてもっとも発達した時刻での諸物理量を議論する。

3 数値計算結果

式 (8) の非線形項を用いて、エネルギースペクトルの時間発展は次式のように書き直すことができる。

$$\frac{\partial E(\omega, m)}{\partial t} = \int dm_{12} d\omega_{12} \left(\delta_{0-1-2}^{\omega, m} \omega I_{12}^0 - \delta_{0+1-2}^{\omega, m} \omega I_{01}^2 - \delta_{0-1+2}^{\omega, m} \omega I_{20}^1 \right).$$

ここで $I_{12}^0 = |\hat{V}_{1,2}^0|^2 (\hat{n}_1 \hat{n}_2 - \hat{n}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2))$ である。また、 I_{12}^0 の持つ対称性により、3 波共鳴はエネルギーの再分配を行うのみで、エネルギーの生成・散逸には寄与しない。このことから (ω, m) に流入するエネルギーを図 1 のように分解する。式 (1) 第 1 項によって (ω_1, m_1) と (ω_2, m_2) のモードからそれぞれ $\omega_1 I_{1,2}^0$, $\omega_2 I_{1,2}^0$ だけのエネルギーが流入または流出する。同様に、式 (1) 第 2 項によって (ω_1, m_1) から $-\omega I_{2,0}^1$ だけ、式 (1) 第 3 項によって (ω_2, m_2) から $-\omega I_{0,1}^2$ だけのエネルギーが流入または流出する。この分解方法は一意なものではないが、もっとも単純な分解方法としてこの方法を採用する。

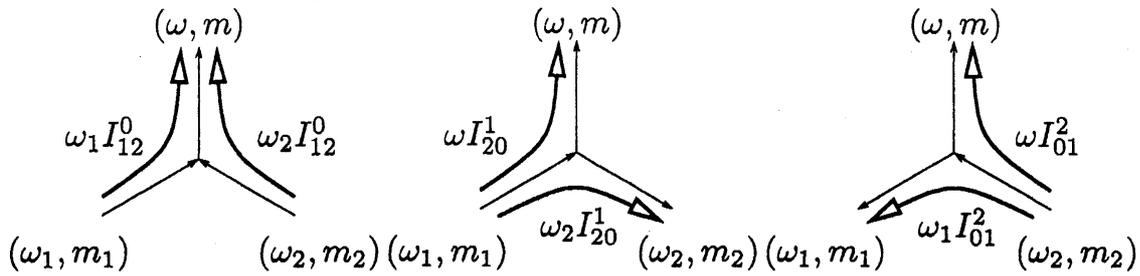


図 1: エネルギー輸送の分解. 左から式 (1) の第 1, 2, 3 項に対応する.

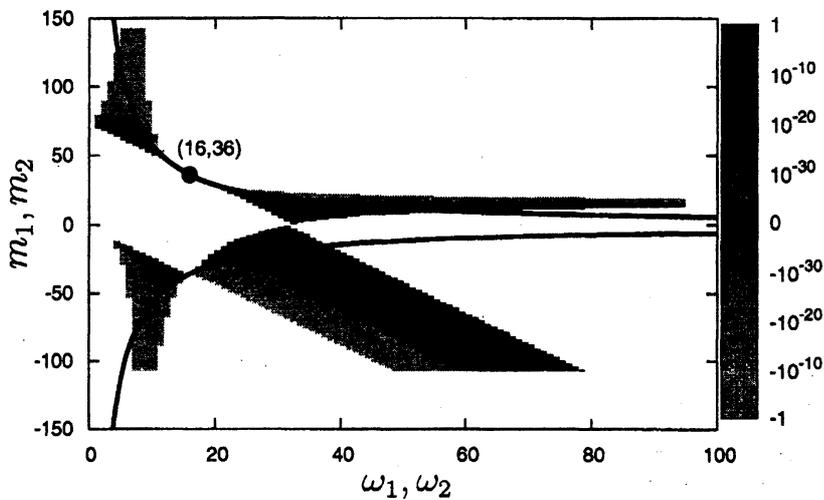


図 2: $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードに対するエネルギー輸送. $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードへのエネルギーの流入は正, 流出は負で示される. 実線は $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードと水平波数の等しいモードを表す.

図 2 は $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードに流入または流出するエネルギー量を示したものである. 図 2 中に示した実線は $(\omega, m) = (16, 36)$ と水平波数の大きさ $|k|$ の等しいモードを表す. $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードは, $(\omega_1, m_1) \sim (8, 70), (10, -30), (30, \pm 10)$ の低波数モードからエネルギーの流入を受け, $(\omega_1, m_1) \sim (8, \pm 100), (60, 10), (30, -50)$ の高波数モードへエネルギーの流出する. このエネルギーの流れは共鳴相互作用による低波数から高波数へのカスケードするという弱乱流理論による説明と一致する.

McComas (1977) は共鳴相互作用を 3 種類に分類した. 一つめは, ほぼ同一の波数・振動数を持つ 2 波がはるかに小さい波数・振動数を持つモードを介在して相互作用する Induced Diffusion (ID) である. 誘導拡散は波数空間でのエネルギーの拡散を意味する. 二つめは, 鉛直方向逆向きの波数で同程度の波長・振動数を持つ 2 波が振動数の小さい密度波数 2 倍程度のモードを介在して相互作用する Elastic Scattering (ES) である. ES は鉛直方向の非対称性によるもので本研究では現れない. 三つめは, 波数・振動数の小さい波が逆向きの密度波数を持つ高波数で半分ほどの振動数の波に分解される Parametric Subharmonic

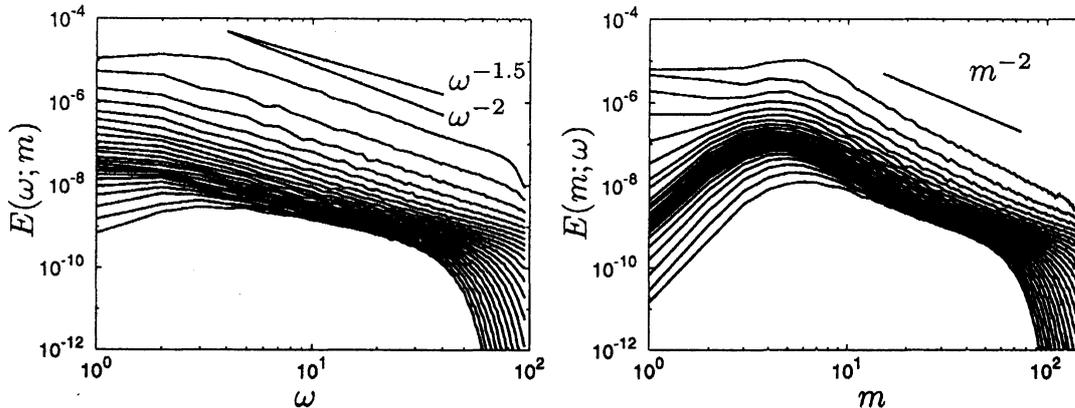


図 3: 振動数スペクトル (左) および密度波数スペクトル (右). 振動数スペクトルの線種は各密度波数を密度波数スペクトルの線種は各振動数に表す. Lvov-Tabak スペクトルは $E(\omega, m) \propto \omega^{-3/2}|m|^{-2}$, Garrett-Munk スペクトルは $E(\omega, m) \propto \omega^{-2}|m|^{-2}$ を与える.

Instability (PSI) である. さらに, McComas and Müller (1981) は, 高周波数領域では ID によって低周波数領域では PSI によってカスケードが引き起こされると述べている.

図 2 では, ID に相当する $(\omega_1, m_1) \sim (4, -4), (14, \pm 18)$ からのエネルギーの流入・流出は, その絶対値は特異的に大きいものの積分量としてはそれほど大きくないために $(\omega, m) = (16, 36)$ のモードの時間発展への寄与は大きくない. 一方, PSI に相当する $(\omega_1, m_1) \sim (32, \pm 10)$ 付近からのエネルギーの流入, $(\omega_1, m_1) \sim (16, \pm 100)$ 付近へのエネルギーの流出は積分量として比較的大きな値を持つ. さらに高振動数のモードに対するエネルギー輸送についても同様のことが言え, 実際にはすべての振動数領域において, PSI によってカスケードが引き起こされていると考えるのが適当と思われる.

振動数スペクトルおよび密度波数スペクトルを図 3 に示す. 振動数スペクトルは各密度波数について, 密度波数スペクトルは各振動数について表されている. 振動数スペクトルは密度波数によって -1.9 から -1.6 程度の指数を持つべき領域の存在を示す. このべき指数は Lvov-Tabak, Garrett-Munk スペクトルのべき指数の間にある. 一方, 密度波数スペクトルは -2 から -2.5 程度のべき指数を持ち, Lvov-Tabak, Garrett-Munk スペクトルよりも急峻である. このスペクトルは両スペクトルとは異なるものであるものの, Lvov et al. (2004) が示した定常解の族のごく近傍に位置し, 運動論的方程式の時間発展から得られた結果が彼らが得た運動論的方程式の定常解と矛盾のないことを示している.

海洋観測から得られたスペクトルは周波数と鉛直波数の 1 次元スペクトルから導出されている. その導出過程で, スペクトルは $E(\omega, m) = e_1(\omega)e_2(m)$ のように振動数と鉛直波数に依存する部分が分離可能な慣性小領域と分離不可能な非慣性領域からなると考えられている. 図 3 より, $10 \leq \omega \leq 20$ および $20 \leq m \leq 40$ の領域はべき領域に含まれるとすることができるので, 振動数の分離可能性として $S(\omega; 20, 40) = E(\omega, 20)/E(\omega, 40)$, 密度波数の分離可能性として $S(m; 10, 20) = E(10, m)/E(20, m)$ を示したものが図 4 である. 分離可能な領域では, $S(\omega; 20, 40)$, $S(m; 10, 20)$ とともに一定値をとることが期待される. 図 3 のべき領域に対応する $5 \leq \omega \leq 30$, $10 \leq m \leq 50$ の領域でこれらはほぼ一定の値

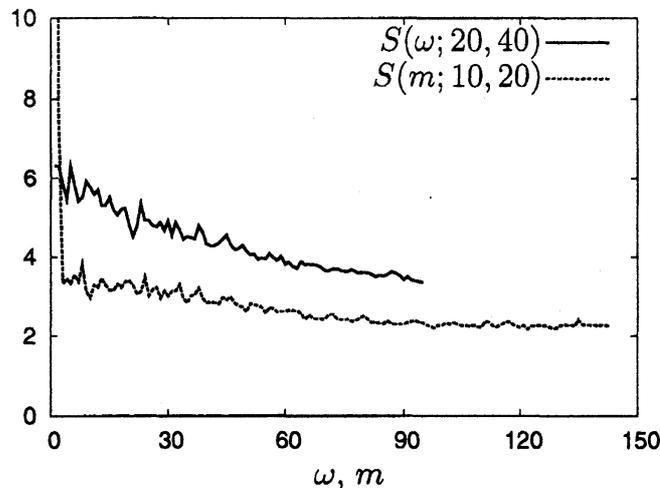


図 4: スペクトルの分離可能性. スペクトルが分離可能形であれば, $S(\omega; 20, 40) = E(\omega, 20)/E(\omega, 40)$ ならびに $S(m; 10, 20) = E(10, m)/E(20, m)$ は一定値をとることが期待される.

をとり, 観測データからスペクトル形状を得る際の仮定を支持する.

4 まとめ

本研究では, 弱乱流理論に基づく運動論的方程式を用いて, 内部重力波の共鳴相互作用によるモード間のエネルギーの流れを調べた. 3波共鳴相互作用によって, エネルギーは低波数から高波数領域に流れ, そのエネルギー輸送の大部分は Parametric Subharmonic Instability によって引き起こされていることが示された. また, 弱乱流系としてもっとも発達した時刻において, 運動論的方程式の定常解に非常に近いべき指数を持つ振動数, 密度波数スペクトルを得た. さらに, そのスペクトルは振動数依存部分と密度波数依存部分に分離可能な慣性小領域と分離不可能な非慣性領域からなると考えられているとする海洋観測からスペクトルを得る際の従来の仮定を支持するものである.

本研究の数値計算は京都大学基礎物理学研究所の計算設備にて行った.

参考文献

- Garrett, C. J. R. and Munk, W. H. (1972). Space-time scales of internal waves. *Geophys. Fluid Dyn.* 3, 225-264.
- Garrett, C. J. R. and Munk, W. H. (1975). Space-time scales of internal waves: a progress report. *J. Geophys. Res.* 80, 281-297.

- Garrett, C. J. R. and Munk, W. H. (1979). Internal waves in the ocean. **11**, 339–369.
- Lvov, Y. V., Polzin, K. L., and Tabak, E. G. (2004). Energy spectra of the ocean's internal wave field: theory and observations. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 128501.
- Lvov, Y. V. and Tabak, E. G. (2001). Hamiltonian formalism and the garrett-munk spectrum of internal waves in the ocean. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 168501.
- Lvov, Y. V. and Tabak, E. G. (2004). A hamiltonian formulation for long internal waves. *Physica D* **195**, 106–122.
- McComas, C. (1977). Equilibrium mechanisms within the oceanic internal wave field. *J. Phys. Oceanogr.* **7**, 836–845.
- McComas, C. and Müller, P. (1981). The dynamic balance of internal waves. *J. Phys. Oceanogr.* **11**, 970–986.
- McWilliams, J. C. (1996). Modeling the oceanic general circulation. **28**, 215–248.
- Zakharov, V. E., L'vov, V. S., and Falkovich, G. (1992). *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin.