

渦構造の非線形相互作用のウェーブレット解析 2

岡山理大・工¹ あらきけいすけ (ARAKI Keisuke)
核融合研² 三浦英昭 (MIURA Hideaki)

¹Okayama University of Science, ²National Institute for Fusion Science

1 これまでの結果の概観

ウェーブレットは「空間スケール」の情報と「位置」の情報を同時に取り扱うことができる展開関数として、乱流の解析への応用がなされてきた(初期のまとまった論文として例えば文献 [1, 2] を参照)。

Araki et al. が開発した非発散正規直交ウェーブレット(文献 [3]、以下「ヘリカル・ウェーブレット」と呼ぶ)は、流体の運動の配位空間である非発散ベクトル場の関数空間の正規直交な¹基底関数をなす。したがって、これを用いて速度場をモード展開

$$u(\vec{x}, t) = \sum u_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(t)\psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x}) \quad (1)$$

したとき各モードは各々が非発散の条件を満たしている。これは、速度場の各成分をウェーブレット展開する場合にモード毎の非発散条件が満たされないことと比較して、大きな利点となっている。各モードが非発散条件を満たしているので、この展開を Navier-Stokes 方程式 (NSE) に代入すれば、NSE を配位空間内部で閉じた形でスペクトル展開できる。これはNSEを展開係数に関する「ホロノミックな拘束を受けた常微分方程式」として記述することである [5]。また文献 [5] において (1) ウェーブレットでは2モード間相互作用が一般に存在し、3モード間相互作用 (triad interaction) の概念がそのまま適用できないこと、(2) 非線形輸送の係数

$$\langle j'', \epsilon'', \vec{l}'', \sigma'' | j', \epsilon', \vec{l}', \sigma' | j, \epsilon, \vec{l}, \sigma \rangle := - \int \psi_{j''\epsilon''\vec{l}''\sigma''}(\vec{x}) \cdot [(\psi_{j'\epsilon'\vec{l}'\sigma'}(\vec{x}) \cdot \nabla) \psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x})] d^3\vec{x} \quad (2)$$

が Arnold の解析力学的記述 [6] における Levi-Civita 接続(に負号をつけたもの)であり、この概念に基づいてエネルギーの詳細釣り合いを考慮した非線形輸送の解析が実行できることが示された。

文献 [7] において速度場のウェーブレット分解におけるスケールの情報のみを取り出して、非線形相互作用の振る舞いを調べた結果、Kolmogorov の描像と首尾一貫した「局所的な」相互作用の卓越が示された。また「位置」情報の一部を取り出した解析を行い、エネルギーの空間分布と非線形輸送の相関が存在することも示唆された [8]。

ウェーブレット展開には「位置」の情報も含まれる。そこで隣接するスケールの各々の位置のウェーブレット間の相互作用の振る舞いを、一様等方性乱流に対して調べた [9]。しかし一様等方性乱流の解析では隣接した渦構造の間の相互作用の寄与のために、単体の渦構造とエネルギー伝達の機構との関連を議論することは困難であった。そこで本研究でははっきりと孤立した渦構造を対象にしてスケール間のエネルギー輸送の機構と渦構造との関連を明らかにする。

¹本研究のウェーブレットは自己双対な基底である。ウェーブレット解析には双直交ウェーブレットのように2種類の互いに双対な基底を利用する場合も考え得る。文献 [4] に双直交ウェーブレットで非発散ベクトル場をなすものの構成法が示されている。

2 Navier-Stokes 方程式のウェーブレット表現

本研究では昨年の報告 [9] と同じ Meyer ウェーブレットを基にしたヘリカルウェーブレットを用い、記号 $\psi_{j\epsilon\vec{l}\sigma}(\vec{x})$ であらわす、ここで添え字は「空間スケール」「異方性」「位置」「ヘリシティ」に対応している (Table 1 参照)。速度場のヘリカルウェーブレット展開

添字	範囲	物理的意味
j	$0, 1, 2, 3, \dots$	「窓」の幅 (j が大 \rightarrow 窓が小)
$\epsilon = \xi + 2\eta + 4\zeta$	$1, 2, \dots, 7$	フーリエ空間での異方性
$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$	$l_j = 0, \dots, 2^j - 1$	物理空間での位置
σ	$1, -1$	ヘリシティ

Table 1: ヘリカル・ウェーブレットの添字とその意味。

(Eq.(1)) を NSE に代入し、 ψ_λ との内積をとると次の微分方程式を得る:

$$\frac{du_\lambda(t)}{dt} = \sum \langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle u_\alpha(t) u_\beta(t) + \nu \sum \langle \psi_\lambda | \Delta | \psi_\beta \rangle u_\beta(t), \quad (3)$$

ここで λ, α, β はウェーブレットの添え字の組 $\{j, \epsilon, \vec{l}, \sigma\}$ を表すものとし、ブラケットは次の積分で定義される

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle := - \int \mathbf{a}(\vec{x}) \cdot [(\mathbf{b}(\vec{x}) \cdot \nabla) \mathbf{c}(\vec{x})] d^3 \vec{x}, \quad \langle \mathbf{a} | \Delta | \mathbf{c} \rangle := \int \mathbf{a}(\vec{x}) \cdot (\Delta \mathbf{c}(\vec{x})) d^3 \vec{x}. \quad (4)$$

展開関数が非発散なので圧力項はつねに零となる。この方程式系は個別のウェーブレットモードの展開係数の時間発展を与える。以下、非線形相互作用を表す積分 $\langle \psi_\lambda | \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle$ のうち $\langle \psi_\lambda |$, $|\psi_\alpha\rangle$, $|\psi_\beta\rangle$ をそれぞれ “bra”-mode, “center”-mode, “ket”-mode と呼ぶことにする²。この表示においてモード間でのエネルギー輸送量に詳細保存が成り立つことは、昨年の報告 [9] において詳論した。

非線形相互作用の表現の一意性について

Eq.(4) で定義されたブラケットには次の特徴がある。

- “center”-, “ket”-mode に関して全モードの和を取ると NSE の非線形項を再現する:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = - \int \mathbf{a}(\vec{x}) \cdot [(\mathbf{u}(\vec{x}) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\vec{x})] d^3 \vec{x}.$$

- “bra”-mode と “ket”-mode に関して反対称³: $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle = -\langle \mathbf{c} | \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle$;

²昨年の報告 [9] と用語を変えた。

³この関係式は次の三つの条件から導かれる: (i) ベクトル場の内積が Lagrangian 粒子の配位に抛らず同じ値をとること、すなわち非発散ベクトル場 \mathbf{b} により初期位置 \vec{a} から流される流体粒子の時刻 t での位置を $\vec{X}(\vec{a}, t)$ とするとき

$$\int \mathbf{a}(\vec{X}(\vec{a}, t)) \cdot \mathbf{c}(\vec{X}(\vec{a}, t)) d^3 \vec{X}(\vec{a}, t) = \int \mathbf{a}(\vec{a}) \cdot \mathbf{c}(\vec{a}) d^3 \vec{a};$$

(ii) 非発散ベクトル場による流れが体積要素の値を変えないこと $d^3 \vec{X}(\vec{a}, t) = d^3 \vec{a}$; (iii) 接続が自己双対であること (ベクトル場 \mathbf{a} と \mathbf{c} が同じ “Taylor 展開” のルールに従うこと)。

特に後者はエネルギーの詳細保存の議論の基礎となる関係である。ところが式

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}) := (C+1)(\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}) + C(\mathbf{b}|\mathbf{c}|\mathbf{a}) + C(\mathbf{c}|\mathbf{a}|\mathbf{b}), \quad C: \text{arbitrary constant.} \quad (5)$$

によって新しいブラケットを定義しても、上記の2条件を満たすブラケットとなり、非線形相互作用の解析の基礎付けの候補となり得る。この1自由度⁴は条件「ブラケット

$$(\mathbf{a}|\partial_t + \mathbf{u}|\mathbf{u}) = - \int \mathbf{a}(\vec{x}) \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\vec{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\vec{x}) \right] d^3\vec{x} \quad (6)$$

が Galilean boost に対して不変であること」を課すことで $C = 0$ に一意に決まる。Galilean boost に対する共変性は流体を Lagrange 的に追跡すれば自然に導出される条件なので、この条件をブラケットに課す必要があり、ブラケットの形は一意に決まる。

3 解析した場

本研究ではせん断流の不安定性による渦の巻き上がりの初期値問題を数値的に解いた。数値積分は空間方向には擬スペクトル法、時間方向には4次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いて行なった。擬スペクトル法に用いた格子点数は 256^3 であり、エイリアジングエラーは格子点移動と多面体切断を用いて除去した。シミュレーションに際し外力は加えていない。Figure 1 にエネルギーとエンストロフィーの時間発展を示した。解析を行

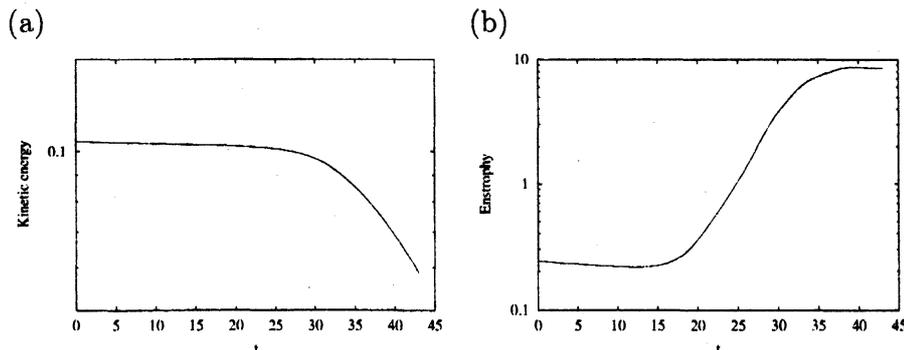


Figure 1: せん断流の巻き上がりのシミュレーションにおけるエネルギーとエンストロフィーの時間発展。解析をした場はこの時間発展の $t = 17.5$ の時刻のデータである。

なった場は時刻 $t = 17.5$ のものである。この時刻はエンストロフィーが急激に増加し始める時刻である。このエンストロフィーの増加は渦の巻き上がりによる場の乱流化に伴うものである。Figure 2 にこの時刻の渦度場の構造を示す。図の半透明の面は渦度の振幅の等値面、着色された「紐」は Kida and Miura の低圧力渦法 [10] により捉えられた渦芯を示している。以下の解析では Figure 2(b) の枠で囲んだ領域内の渦のダイナミクスに伴う非線形相互作用の振る舞いを示す。

⁴数学的には計量的接続に対する振率の自由度である。Galilei 共変性が振率無しを導くのは興味深い。

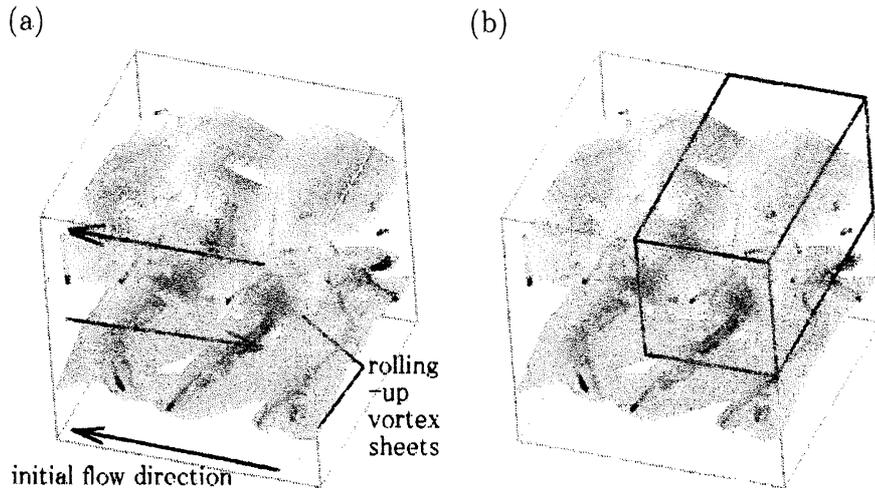


Figure 2: 解析をした速度場。せん断流から不安定性を成長させて渦の巻き上がりを実現した。(a)初期のせん断流の方向とせん断の位置、(b)ウェーブレット解析を行なった領域。

4 非線形輸送の解析

非線形輸送の解析を Eq.(3) に基づいて行なう。しかし全てのモード間の相互作用の解析を実行するのは、計算コストから考えて実行不可能である。そこで本研究では、まずウェーブレットモードを「異方性」「ヘリシティ」に関してまとめ、「空間スケール」「位置」の情報を残した分析をした。本報告では、空間スケール番号 $j = 4, 5$ のウェーブレットモードに着目し (Figure 3 参照)、非線形輸送の「遷移行列」

$$\langle 5, \vec{l} | \mathbf{u} | 4, \vec{k} \rangle = - \int \mathbf{u}_{5\vec{l}}(\vec{x}, t) \cdot ((\mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{4\vec{k}}(\vec{x}, t)) d^3 \vec{x} \quad (7)$$

を数値的に計算し、渦構造の形成過程とエネルギーのスケール間輸送 (いわゆるエネルギー・カスケード) との関連を明らかにする。

4.1 非線形輸送の遷移行列の表示法

非線形輸送の「遷移行列」

$$\langle 5, \vec{l} | \mathbf{u} | 4, \vec{k} \rangle = - \int \mathbf{u}_{5\vec{l}}(\vec{x}, t) \cdot ((\mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{4\vec{k}}(\vec{x}, t)) d^3 \vec{x} \quad (8)$$

には from-mode と to-mode の「空間スケール」と「位置」の情報が含まれている。これらの情報を視覚的に表現する試みとして「カラーバー表現」を導入した (Figure 4 参照)。カラーバーの各パーツは各々次の意味を持っている：

- バーの末端: ウェーブレットの振幅のピークの位置
- 色 (緑 VS 赤/青): ウェーブレットの空間スケール (緑が大きなスケール)
- 色 (赤 VS 青): スケール間のエネルギー輸送の向き (青が順輸送、赤が逆輸送)

非線形相互作用の大きさは表現されていない (バーの半径を用いて表現可能である)。

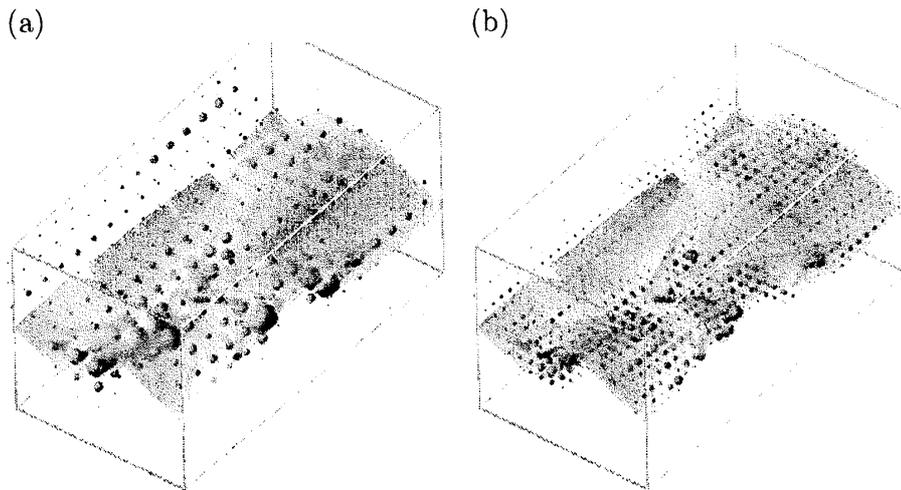


Figure 3: 解析を行なった解像度スケールのスケール・位置エネルギー・スペクトルのボール表示: (a) E_{4l} (larger scale) (b) E_{5l} (smaller scale).



Figure 4: 非線形輸送を発生している位置と向きを表すためのカラーバー

4.2 解析結果

主要な相互作用の空間分布に関して次のことが明らかになった：

- カラーバーは巻き上がっている渦の周辺に集中している (Figure 5 参照)。⁵ これより巻き上がりのプロセスにおいて、渦構造の運動がスケール間のエネルギー輸送過程に効いていることが直観的に理解される。
- Figure 6, Table 2 より分かるように、「順輸送」「逆輸送」ともにアクティブである。全体としては「順輸送」が勝っているが、キャンセルされる輸送量は大きい。
- 図より定性的に読み取れるが、大抵のカラーバーが「短い」。これはエネルギー輸送が物理空間での距離の意味で「局所的」⁶であることを示している。99%の輸送が $j=4$ モードの2格子間隔より短いところで生じている。ただしウェーブレットが局在した関数であることの影響が係数に出ているかもしれない。
- 図より定性的に読み取れるが、ボールのサイズ(ウェーブレットエネルギーの振幅)とカラーバーの位置(ウェーブレット非線形輸送の振幅)とは必ずしも対応がよくない。渦の「活動度」は渦度の振幅の大小とは必ずしも一致していないようだ。

⁵ 描画に際しては、カラーバーを振幅の上位のものから描いたのみで、例えば渦構造をなんらかの形で定義して、それに関するフィルタリングを行なうといった作為的なことはしなかった。

⁶ 通常「局所的」という表現はエネルギーカスケードの過程において、エネルギーの輸送が「空間スケール」の意味で隣接したスケール間で起こることを意味している。

References

- [1] Meneveau, C., "Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation", *J. Fluid Mech.*, (1991) Vol. 232, p. 469-520.
- [2] Farge, M., "Wavelet Transforms and their Applications to Turbulence", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, (1992) Vol. 24, pp.395-458.
- [3] K. Araki, K. Suzuki, K. Kishida, S. Kishiba, "Multiresolution approximation of the vector fields on \mathbb{T}^3 ", NIFS-report NIFS-590 (National Institute for Fusion Science, Toki, 1999); e-print is available at <http://xxx.lanl.gov/abs/math-ph/?9904015>
- [4] Urban, K., "Wavelet bases in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$ ", *Math. Comp.*, (2001) Vol. 70, pp.739-766.
- [5] 岸田圭史, 博士論文(2000, 広島大学).
- [6] Arnol'd, V. I., "Mathematical methods of classical mechanics" 2nd ed., (1989, Berlin, New York, Springer), appendix 2.
- [7] K. Kishida, K. Araki, S. Kishiba, K. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, p.5487 (1999).
- [8] K. Kishida, K. Araki, "Orthonormal divergence-free wavelet analysis of spatial correlation between kinetic energy and nonlinear transfer in turbulence", in Y. Kaneda, T. Gotoh (Eds.), "Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows", pp.248-259, (Springer, Tokyo, 2002).
- [9] あらきけいすけ, 三浦英昭, 『渦構造の非線形相互作用のウェーブレット解析』, 数理解析研究所講究録 1434 「乱流現象と力学系的縮約」, pp.234-244 (京大数理研, 2005 May).
- [10] Miura, H. and Kida, S., "Identification of Tubular Vortices in Turbulence", *J. Phys. Soc. Japan*, (1997) Vol. 66, pp. 1331-1334.

方向	輸送量	全輸送量との比
順輸送	4.298×10^{-5}	8.6 倍
逆輸送	3.796×10^{-5}	7.6 倍
全輸送(順)	5.025×10^{-6}	—

Table 2: クラス $j = 4$ と $j = 5$ の間の非線形相互作用量。

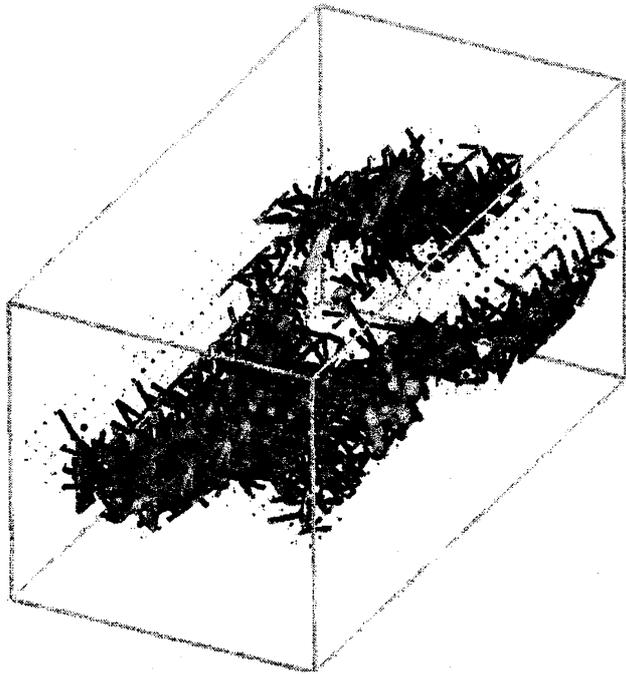
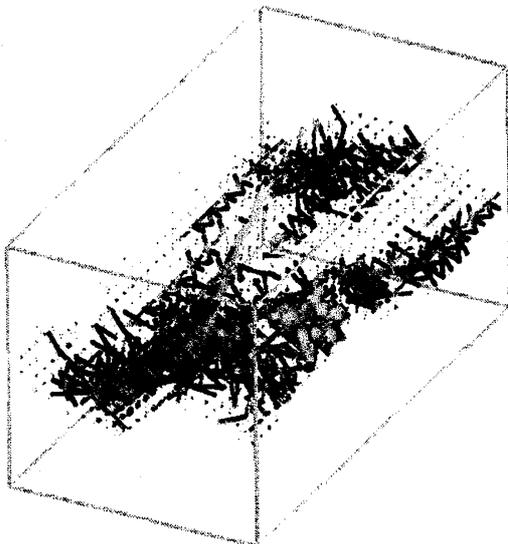


Figure 5: 非線形輸送 $\langle 5, \vec{l} | u | 4, \vec{k} \rangle$. のうち、相互作用総量の上位 30% の輸送量を担うペア (8,388,608 ペアのうちの 2,071 個) を表示している。

(a)



(b)

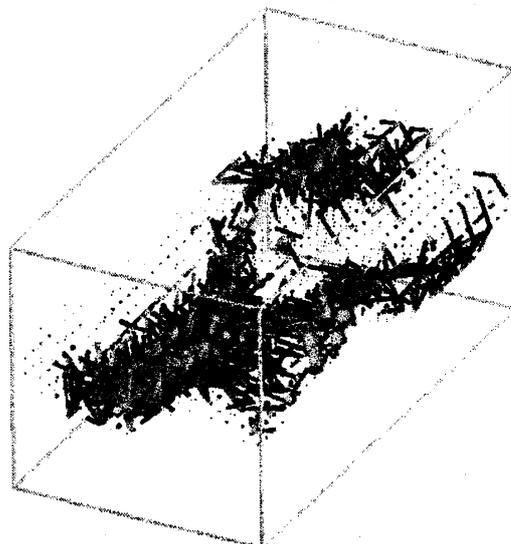


Figure 6: 上位 30% の非線形相互作用を順輸送、逆輸送に分けて表示したもの: (a) 順輸送 (4195247 ペアのうちの 863 個), (b) 逆輸送 (4193361 ペアのうちの 1208 個).