

## 量子乱流における慣性領域とコルモゴロフ則

大阪市立大学理学部物理学科 小林 未知数 (Michikazu Kobayashi)  
Faculty of Science,  
Osaka City University

### 1 イントロダクション

超流動液体 $^4\text{He}$ で起こる超流動乱流は低温物理学という分野において、現在でもなお活発に研究が行われている現象の1つであるが [1]、近年さらに自然界における通常の乱流現象を要素還元的に理解するという視点において、低温物理学の範囲を超えて非常に注目を浴び、活発に議論されている。液体 $^4\text{He}$ は2.17K以下において、構成要素である $^4\text{He}$ 原子が Bose-Einstein 凝縮を起こし、粘性が消失する超流動状態となる。この超流動現象は、流体全体が粘性のある常流体成分と、粘性のない超流体成分から成るという二流体モデルにおいて記述される [1]。Vinen は超流動 $^4\text{He}$ 中に量子化された循環  $\kappa = \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{s}$  を持つ量子渦 ( $\mathbf{v}$  は流体の速度場、 $\oint d\mathbf{s}$  は渦回りの線積分) が存在することを明らかにし、「超流動乱流」が量子渦のタングル状態として存在すること、超流動乱流中において量子渦と常流体の間に相互摩擦力と呼ばれる散逸機構があることを発見した [2]。

ところが超流動乱流は通常、熱対向流と呼ばれる超流動固有の現象を用いて作成されるため、通常の古典流体との対応を持たず、それゆえに超流動乱流と古典乱流との関係は長い間謎のままであった。このような背景のもとで近年、Maurer 達が2枚の回転円盤中で超流動乱流を実現することに成功した [4]。彼らの方法はまさに古典流体において乱流を作る方法と同じであり、古典乱流との対応が可能になったという点において超流動乱流の研究は新しい局面に入ったといえよう。彼らは1K以上という比較的高温領域の超流動乱流において、そのエネルギースペクトルが古典乱流の最も重要な統計則である Kolmogorov 則に従い [5]、超流動乱流が古典乱流との類似性を持つことを見出した。

Kolmogorov 則は発達した一様等方定常な非圧縮性古典乱流において成り立つ統計則である [5]。大きなスケールであるエネルギー保有領域からエネルギーが系に注入されると、そのエネルギーのスケールは慣性領域にて小さくなってゆく。慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトル  $E(k)$  が Kolmogorov 則

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1)$$

に従う。ここで  $E(k)$  は  $E = \int dk E(k)$  で定義されるエネルギースペクトル、 $E$  は単位質量あたりの運動エネルギー、 $k$  は Fourier 変換の波数である。粘性が有効になるエネル

ギー散逸領域においてエネルギーは散逸率  $\varepsilon$  で散逸するが、これは慣性領域におけるエネルギー流束に等しい。Kolmogorov 定数  $C$  はオーダー 1 の無次元量である。

Maurer 達や Stalp 達が発見した超流動乱流と古典乱流の類似性は、古典流体のように振る舞う常流体成分と超流動成分との相互摩擦力を介してのカップリングによって両者が一緒になって古典乱流のように振る舞う、という考えによって理解されている [6]。そうすると常流体成分がほとんど存在しない 1K 以下といったような極低温における超流動乱流 (量子乱流) は古典乱流との類似性を持つのであろうか、という非常に大きな疑問が生じることになる。

この疑問に対して、我々は以下のような描像を考えることにした。古典乱流における Kolmogorov 則は通常、大きな渦が小さな渦へと分裂してゆくという Richardson カスケードという描像で理解される [5]。しかし古典流体では渦そのものの定義が粘性拡散のために不明瞭であるため、Richardson カスケードという描像は概念的なものである。一方、量子乱流における量子渦は量子化された循環  $\kappa$  を持った、明確に定義される位相欠陥である。粒子は低温で量子性を顕著に表すようになり、超流動はボース粒子である  $^4\text{He}$  個々の粒子の物質波がすべて重なって量子力学的巨視的波動関数を形成する、Bose-Einstein 凝縮によって引き起こされる。Bose-Einstein 凝縮によって形成される巨視的波動関数  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)}e^{i\phi(\mathbf{x}, t)}$  のダイナミクスは Gross-Pitaevskii (GP) 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

によって記述され、超流動速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  は  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 2\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$  で与えられる。ここで  $\mu$  は化学ポテンシャル、 $g$  は粒子間相互作用の結合定数、 $\rho$  は凝縮体密度、 $\phi$  は凝縮体の位相である。渦度  $\text{rot } \mathbf{v}$  は  $\Phi$  の単連結領域では存在せず、 $\Phi$  の位相欠陥でのみ値を持つ。つまり  $\Phi$  の位相欠陥が量子渦の定義そのものになる。量子渦の回りでは循環が  $\kappa = 4\pi$  に量子化され、芯のサイズは回復長  $\xi = 1/\sqrt{g\rho}$  で与えられる。高温では量子渦は相互摩擦力を介して減衰するが、極低温では渦の再結合時や回復長  $\xi$  程度まで小さくなった渦輪の消失時に起こる圧縮性の素励起放出を通してのみ減衰する [7]。いずれの場合においても量子渦の減衰は回復長  $\xi$  よりも短いスケールで起こり、長いスケールでは量子渦は安定に存在することができる。いわば量子渦は古典流体中の渦に付随する粘性散逸といったようなよけいな自由度を取り除いた渦の本質のみの形となっており、これを構成要素とする量子乱流は、Kolmogorov 則と Richardson カスケードの関係を明らかにすることができるプロトタイプであるかもしれない。もしこれが真実であるなら、極低温の量子乱流も Kolmogorov 則を示すはずである。我々は本研究でこの描像が正しいかどうか、GP 方程式の数値シミュレーションを行って調べた。

## 2 計算方法

本研究以前にも Nore 達が GP 方程式の数値シミュレーションを用いて、Taylor-Green 渦から出発した量子乱流のエネルギースペクトルを計算している [8]。GP 方程式は圧縮

性流体の方程式であるので、彼らは運動エネルギーを圧縮成分と非圧縮成分に分けることによって、非圧縮成分のエネルギースペクトルが一時的に Kolmogorov 則に従うことを発見した。しかし渦の再結合時に渦のエネルギーは回復長  $\xi$  よりも短い圧縮性の短波長素励起へと転化し、転化した短波長素励起が再び量子渦と相互作用し、渦のカスケードに影響を与える [7, 9, 10]。よって Kolmogorov 則に従う統計性を長時間確認することができなかった。

Nore 達のこのような結果を踏まえ、我々は回復長  $\xi$  よりも短いスケールのみ働く現象論的な散逸項を導入し、短波長素励起の量子渦への影響を消すことを試みた。GP 方程式 (2) 式を高い精度で解くために、周期境界条件下での擬スペクトル法を用いる。そのために Fourier 変換された GP 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu] \Phi(\mathbf{k}, t) + \frac{g}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi(\mathbf{k}_1, t) \Phi^*(\mathbf{k}_2, t) \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t) \quad (3)$$

を解く。ところが量子渦は再結合時や小さな渦輪の消失時に短波長の圧縮性素励起を放出し、それが量子渦のダイナミクスに深刻な影響を与える。そこでこのような素励起を散逸させるため、(3) 式の左辺の虚数単位  $i$  を  $i \rightarrow [i - \gamma(k)]$  で置き換えることにより現象論的な散逸項  $\gamma(k)$  を導入する。この散逸項は  $\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$  の形をしており ( $\theta(x)$  は階段関数)、回復長  $\xi$  よりも短いスケールでのみ値を持つ。よってこの散逸項は、回復長  $\xi$  よりも短い構造を持たない量子渦を散逸させることなく、渦の再結合によって生じた短波長素励起のみを散逸させる。このようにして量子渦のみによって作られる量子乱流を理論的に議論することが可能になる。

### 3 計算結果

我々は乱流状態としてランダムな位相から出発した減衰乱流と、エネルギー注入を導入した定常乱流について計算を行った。減衰乱流の詳細に関しては我々の前回の報告を参照していただくとし [11, 12]、本研究では定常乱流に関して詳細に述べる。定常乱流は前章で導入した散逸項の他に大きなスケールからのエネルギー注入を導入することによって実現される。エネルギー注入は GP 方程式に時間依存ランダムポテンシャルを導入することによって行う。我々はこの定常乱流が量子乱流のエネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の明確な定義を与えることを明らかにし、慣性領域において波数に依存しないエネルギー流束が存在することを発見した。最終的に我々は図 2 で示されるような、量子渦と短波長圧縮性素励起が展開するカスケードプロセスの全容を明らかにすることに成功した。

エネルギー注入に対する時間依存ランダムポテンシャル  $U(\mathbf{x}, t)$  を

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + U(\mathbf{x}, t)] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

のように導入する。このとき  $U(\mathbf{x}, t)$  は

$$\langle U(\mathbf{x}, t)U(\mathbf{x}', t') \rangle = V_0^2 \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2X_0^2} - \frac{(t - t')^2}{2T_0^2} \right] \quad (5)$$

のような相関を持つように設定する。 $U(\mathbf{x}, t)$  は特徴的な空間スケール  $X_0$  を持っており、 $V_0$  が十分強いときには、半径  $X_0$  の渦輪を生成する。従ってエネルギー保有領域と慣性領域の境界を  $2\pi/X_0$  とすることができる。慣性領域とエネルギー散逸領域との境界は、 $2\pi/\xi$  とすることができるので、この定常乱流は  $k < 2\pi/X_0$  のエネルギー保有領域、 $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$  の慣性領域、 $2\pi/\xi < k$  のエネルギー散逸領域を持っていることが明らかになる。

数値計算のパラメーターとして長さを回復長  $\xi = 1$  で規格化し、結合定数  $g = 1$ 、散逸の大きさ  $\gamma_0 = 1$  を用いる。周期境界条件における体積  $V = 32^3$  の立方体を  $256^3$  の格子点に分け、空間解像度を  $\Delta x = 0.125$  とし、空間微分に関してはスペクトル法を用いる。時間微分に関しては解像度  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  において Runge-Kutta-Verner 法を用いる。 $U(\mathbf{x}, t)$  に対しては  $V_0 = 50$ 、 $X_0 = 4$ 、 $T_0 = 6.4 \times 10^{-2}$  を与え、一様な状態  $\Phi(\mathbf{x}, t = 0) = 1$  から出発して、式(4)を数値的に解く。

得られた状態に対して、運動エネルギー  $E_{\text{kin}} = \int d\mathbf{x} [(|\Phi|\nabla\phi)]^2$  と、その非圧縮成分  $E_{\text{kin}}^i = \int d\mathbf{x} [(|\Phi|\nabla\phi)^i]^2$ 、圧縮成分  $E_{\text{kin}}^c = \int d\mathbf{x} [(|\Phi|\nabla\phi)^c]^2$  を計算する。ここで  $\text{div}(|\Phi|\nabla\phi)^i = 0$ 、 $\text{rot}(|\Phi|\nabla\phi)^c = 0$  である。図1は  $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$  の時間発展である。どちらの図からも運動エネルギーの非圧縮成分  $E_{\text{kin}}^i(t)$  が全運動エネルギー  $E_{\text{kin}}(t)$  の中で支配的なことが分かる。これは時間依存ランダムポテンシャルが圧縮性の音波よりもむしろ、渦を生成していることを意味している。また図1(b)から明らかなように、全てのエネルギーが  $t \gtrsim 25$  においてほとんど一定となり、よって  $t \gtrsim 25$  から後を定常乱流の状態として扱う。

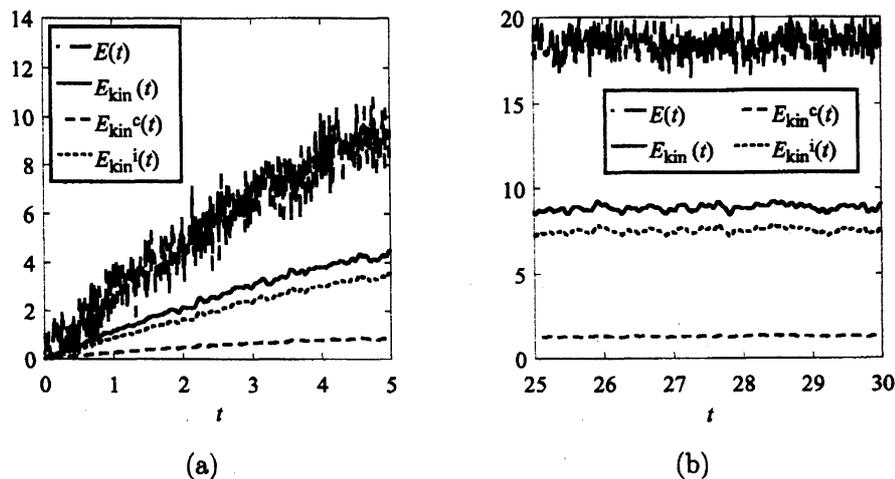


図1:  $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$  の時間発展。(a): 初期過程  $0 \leq t \leq 5$ 。(b): 定常過程  $25 \leq t \leq 30$ 。

この定常乱流は時間依存ランダムポテンシャルによるエネルギー注入と、散逸項によるエネルギー散逸との釣り合いによって引き起こされており、量子渦の定常的な分布が実現

されている。定常乱流における波数空間中のエネルギーの流れは図2のようになると考えられる。ここで図の上部は渦のエネルギー  $E_{\text{kin}}^i(t)$ 、下部は圧縮性素励起のエネルギー  $E_{\text{kin}}^c(t)$  に関するものである。この図は以下のようなシナリオである。エネルギー保有領域  $k < 2\pi/X_0$  では、時間依存ランダムポテンシャル  $U(x,t)$  によって系に非圧縮性のエネルギーが注入され、大きな渦が生成される。慣性領域  $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$  においてリチャードソンカスケードにより渦が分裂し、エネルギーが小さな  $k$  から大きな  $k$  へと流れてゆく。エネルギー散逸領域  $2\pi/\xi < k$  では、非圧縮性の運動エネルギーが渦の再結合や小さな渦輪の消滅により圧縮性の運動エネルギーへと転化し、最終的に散逸項  $\gamma(x,t)$  によって散逸する。時間依存ランダムポテンシャル  $U(x,t)$  はまた長波長の音波を生成し、量子渦との相互作用を生み出す可能性がある。しかしそのような相互作用は弱い。なぜなら図1が示すように、 $E_{\text{kin}}^i(t)$  は  $E_{\text{kin}}^c(t)$  に比べて圧倒的に大きいためである。また長波長の音波と  $\xi$  のスケールを持つ渦芯との散乱断面積は小さいと考えられ、よって渦と音波との相互作用は弱い。

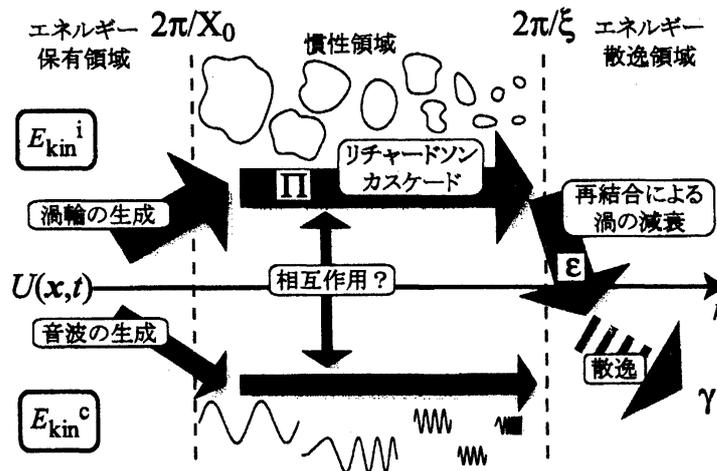


図2: 非圧縮性運動エネルギー  $E_{\text{kin}}^i(t)$  (図の上部) と圧縮性運動エネルギー  $E_{\text{kin}}^c(t)$  (図の下部) の波数空間上での流れ。

図2で示されるようなシナリオを確認するため図中に表示される  $E_{\text{kin}}^i(t)$  の散逸率  $\varepsilon$  と、慣性領域中のリチャードソンカスケードによるエネルギー流束  $\Pi(k,t)$  を計算する。定常乱流におけるエネルギー散逸率  $\varepsilon$  は時間依存ランダムポテンシャルを切った後の  $\varepsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i(t)/\partial t$  で与えられる。なぜなら非圧縮性運動エネルギー  $E_{\text{kin}}^i$  はもはや圧縮性運動エネルギーへと転化するプロセスしか残っていないからである。図3(a)は定常乱流の状態から時間依存ランダムポテンシャルを切った後の  $E_{\text{kin}}^i(t)$  の時間変化である。切った初期の段階では  $E_{\text{kin}}^i(t)$  は時間に対して線形に小さくなり、 $\varepsilon \simeq 12.5 \pm 2.3$  が得られる。一方慣性領域における非圧縮性運動エネルギーのエネルギー流束  $\Pi(k,t)$  は古典乱流と類似のエネルギー収

支方程式を用いて計算される [13]。図 3(b) は計算されたエネルギー流束  $\Pi(k, t)$  の  $k$  依存性であり、慣性領域においてほぼ一定の値  $\Pi(k, t) \simeq 11 \pm 1$  となる。この値は図 3(a) において得られたエネルギー散逸率  $\varepsilon$  とも近く、この結果から非圧縮性運動エネルギーは波数空間において一定の割合  $\Pi$  で大きな  $k$  へと流れ、最終的に散逸率  $\varepsilon \simeq \Pi$  で圧縮性素励起へと散逸するという描像を確かなものにする。この描像はまた図 2 で与えられているものと一致する。エネルギー流束  $\Pi$  はエネルギー散逸率  $\varepsilon$  より若干小さいが、これは量子渦と音波との弱い相互作用が原因の 1 つであると考えられる。

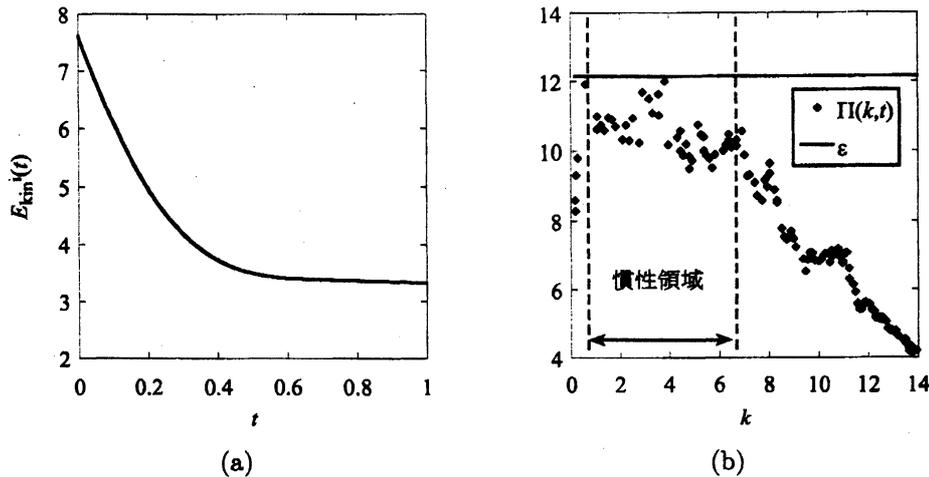


図 3: (a): 定常乱流において時間依存ランダムポテンシャルを切った後の  $E_{kin}^i(t)$  の時間変化。(b):  $\Pi(k, t)$  の  $k$  依存性。 $\Pi(k, t)$  は  $t > 25$  における任意の 50 個のサンプルにおいて計算し、アンサンブル平均をとっている。実線は図 (a) から求められたエネルギー散逸率  $\varepsilon$  である。

量子乱流の描像を完成させるため、定常乱流におけるエネルギースペクトル  $E_{kin}^i(k)$  を計算する。ここで  $E_{kin}^i(k)$  は  $E_{kin}^i = \int dk E_{kin}^i(k)$  によって得られる。図 4 がその結果である。エネルギースペクトルは慣性領域  $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$ 、つまり  $0.79 \lesssim k \lesssim 6.3$  においてコルモゴロフ則と良く一致している。このようにして本研究において、極低温での量子乱流における量子渦のダイナミクスは、短波長の圧縮性素励起の影響がないときに古典乱流と類似の統計を示すことが証明された。

#### 4 量子乱流の今後の展望

これまで量子力学の物性への応用はほとんど固体に限定されてきた。しかし本研究を通して、量子流体力学が通常の古典流体を要素還元的に理解できる可能性を持っていることが示された。つまり量子渦という概念が、流体の渦に有する非常に多くの複雑な自由度を減らす可能性を持っているということである。今後、量子渦という要素還元的な見方が、流体のより深い理解に貢献するであろうことが期待される。

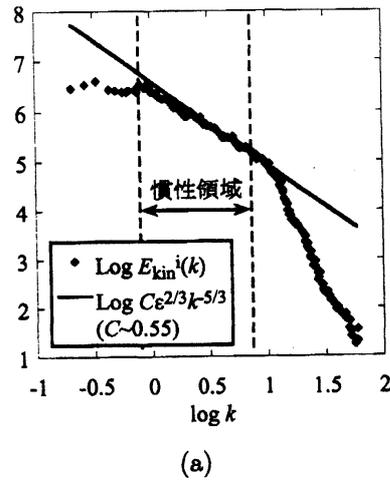


図 4: 定常乱流におけるエネルギースペクトル  $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ 。  $t > 25$  における任意の 50 個のサンプルにおいて計算し、アンサンブル平均をとっている。実線はコルモゴロフ則  $C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$  である。

## 参考文献

- [1] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [2] W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **240**, 114 (1957); *ibid.* A **240**, 128 (1957); *ibid.* A **240**, 493 (1957).
- [3] J. T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics* Vol. VIII, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955), P. 133.
- [4] J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998).
- [5] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [6] W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000).
- [7] M. Leadbeater *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).
- [8] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997); Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).
- [9] S. Ogawa, M. Tsubota and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 813 (2002).
- [10] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993); *ibid.* **76**, 4745 (1996).
- [11] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005).
- [12] 小林未知数, 京都大学数理解析研究所講究録 **1434**, 73 (2005).
- [13] M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005).