

3次元クリスタライン運動によるガウス曲率流の近似

柳下浩紀 (Hiroki Yagisita)

東大数理・非常勤研究員

1 始めに

本講演では、凸閉曲面の発展方程式である3次元ガウス曲率流を凸多面体の運動によって近似することを考える。ガウス曲率流とは、ユークリッド空間内の凸閉曲面をそのガウス曲率と同じ法線速度で内向きに動かす運動のことである。ここで紹介する近似定理は、牛島健夫氏との共同研究 [38] による。

まず第2節で、非等方ガウス曲率流を定義し、等方なガウス曲率流についての解の存在定理を紹介する。本講演の近似定理ではガウス曲率流は等方なものだけが対象なのであるが、凸多面体の運動が非等方ガウス曲率流の離散版として自然に導入できるため非等方ガウス曲率流の定義も行った。第3節で非等方ガウス曲率流の離散版として、凸多面体の運動であるクリスタライン運動を導入する。第4節で3次元クリスタライン運動の等方ガウス曲率流への収束定理を述べ、第5節でその証明について簡単なコメントを与える。我々が用いた証明方法は、2次元平面内の曲線短縮流について類似の結果を得た石井克幸 & H. M. Soner [30] によるものであるが、我々は曲線ではなく曲面を取り扱っているので主曲率が二つあり、そのため新たな工夫を要するところがある。第6節で、曲率流の近似に関する先行研究や今後の課題について簡単に述べる。

2 ガウス曲率流

この節では凸閉曲面の運動である非等方ガウス曲率流を定義し、等方な場合について解の存在定理を述べる。

\hat{W} を \mathbf{R}^N 内の滑らかな狭義凸閉 (超) 曲面で原点をその内部に含むものとする。(この予稿では「狭義凸」で主曲率がすべて正であることを言うものとする。) 以後、 \hat{W} をウルフ超曲面と呼ぶ。そのとき、ウルフ超曲面 \hat{W} の支持関数 $\hat{h}: S^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\hat{h}(\nu) = \max_{x \in \hat{W}} \langle x, \nu \rangle$$

で定義する。ウルフ超曲面 \hat{W} が原点を内部に含むことにより、その支持関数 \hat{h} は正值関数である。 ν 方向の外向き単位法線ベクトルを持つ点におけるウルフ超曲

面 \hat{W} のガウス曲率 (すなわち、主曲率の積) を $\hat{K}(\nu)$ と書くことにする。さらに、 Γ を滑らかな狭義凸閉 (超) 曲面とする。 ν 方向に外向き単位法線ベクトルを持つ点における超曲面 Γ のガウス曲率を $K(\nu)$ と書くことにする。このとき、ウルフ超曲面 \hat{W} に対する超曲面 Γ の非等方ガウス曲率を

$$K(\nu)/\hat{K}(\nu)$$

で定義する。ここで、標語的に

$$(\Gamma \text{ の非等方ガウス曲率}) = (\text{ウルフ超曲面の微小表面積}) \div (\Gamma \text{ の微小表面積})$$

となっていることに注意されたい。さて、超曲面 Γ を外向き単位法線ベクトルが ν である点で外向き法線速度 $V(\nu)$ が

$$V(\nu) = -\hat{h}(\nu)K(\nu)/\hat{K}(\nu)$$

となるように動かす流れを \hat{W} -ガウス曲率流と呼び、そのように動く超曲面 $\Gamma(t)$ を \hat{W} -ガウス曲率流の解と呼ぶ。とくに、 $(-Nt)^{1/N}\hat{W}$ ($-\infty < t < 0$) は \hat{W} -ガウス曲率流の自己相似解であり、超曲面 $(-Nt)^{1/N}\hat{W}$ は時刻 $t=0$ において原点に収束し、時刻 $t=-\infty$ で無限遠方に発散する。(例えば [3] では、ここで定義されたものよりも一般の非等方ガウス曲率流について解の存在や漸近挙動などの研究がなされている。また、非等方ガウス曲率流による 2 次元平面内の曲線の運動については様々な結果が知られている。[1, 9, 12, 13, 17, 21, 40] などを見られたい。)

ウルフ超曲面 \hat{W} として原点中心の単位 (超) 球面 S^{N-1} を考えたときの \hat{W} -ガウス曲率流、すなわち S^{N-1} -ガウス曲率流は、等方な流れとなる。以後、簡単のため、単にガウス曲率流、または N 次元ガウス曲率流と言った場合には、 S^{N-1} -ガウス曲率流のこととする。2 次元ガウス曲率流は所謂、曲線短縮流であり、代表的な研究として [16, 25] などがある。3 次元ガウス曲率流は Firey [14] により『浜辺で小石が磨耗する過程の数理モデル』として導入され、近年 Andrews [2] により一点に収縮するときの漸近形状が 2 次元球面となることが示された。 N 次元ガウス曲率流の解の存在については、既に Tso [37] により次の結果が得られている ([10] も参照) :

ガウス曲率流の解の存在. Γ_0 を \mathbf{R}^N 内の滑らかな狭義凸閉超曲面とせよ。正の数 T_0 を

$$T_0 = \frac{(\text{超曲面 } \Gamma_0 \text{ が囲む } N \text{ 次元体積})}{N (\text{単位超球面 } S^{N-1} \text{ が囲む } N \text{ 次元体積})}$$

とおく。そのとき、初期曲面を Γ_0 とするガウス曲率流の解 $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T_0]}$ が一意に存在する。さらに、超曲面 $\Gamma(t)$ は滑らかで狭義凸であり、時刻 $t = T_0$ で一点に消滅する。——

さらに、初期凸閉超曲面に平坦な部分がある場合に、平坦な部分の境界の運動に関する研究などもなされている ([8, 11, 26] など)。

3 クリスタライン運動

この節では、前節で定義した非等方ガウス曲率流の離散版として、凸多面体の発展方程式であるクリスタライン運動を導入する。前節ではウルフ図形は滑らかな狭義凸閉曲面であったが、本節ではウルフ図形が凸多面体になった場合を考える。

\tilde{W} を \mathbf{R}^N 内の閉じた凸 (超) 多面体で原点をその内部に含むものとする。以後、 \tilde{W} をウルフ多面体と呼ぶ。今、ウルフ多面体 \tilde{W} の面の個数が n 個であるとし、その第 i 面 \tilde{W}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の外向き単位法線ベクトルを \tilde{v}_i で、面積 (すなわち、 $N-1$ 次元ルベグ測度) を \tilde{A}_i で表す。また、原点からの高さを \tilde{h}_i で表す。すなわち、

$$\tilde{h}_i = \max_{x \in \tilde{W}} \langle x, \tilde{v}_i \rangle$$

である。ウルフ多面体 \tilde{W} が原点を内部に含むことにより、 \tilde{h}_i は正である。さらに、 Γ を n 個の面を持つ閉じた凸 (超) 多面体であるとする。もし、多面体 Γ の第 i 面 Γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の外向き単位法線ベクトルがすべて \tilde{v}_i に一致しているならば、 Γ を \tilde{W} -許容多面体と呼ぶことにする。第 i 面 Γ_i の面積を A_i で表す。 Γ が \tilde{W} -許容多面体であるとき、ウルフ多面体 \tilde{W} に対する第 i 面 Γ_i のガウス・クリスタライン曲率を

$$\tilde{A}_i/A_i$$

で定義する。もちろん、これは非等方ガウス曲率からの類推に基づいている。同様に非等方ガウス曲率流からの類推により、 \tilde{W} -許容多面体 Γ を第 i 面 Γ_i の外向き法線速度 V_i が

$$V_i = -\tilde{h}_i \tilde{A}_i/A_i$$

となるように動かす流れを \tilde{W} -クリスタライン運動と呼び、そのように動く \tilde{W} -許容多面体 $\Gamma(t)$ を \tilde{W} -クリスタライン運動の解と呼ぶ。とくに、 $(-Nt)^{1/N} \tilde{W}$ ($-\infty < t < 0$) は \tilde{W} -クリスタライン運動の自己相似解であり、多面体 $(-Nt)^{1/N} \tilde{W}$ は時刻 $t = 0$ において原点に収束し、時刻 $t = -\infty$ で無限遠方に発散する。より一般に解の存在については、常微分方程式の比較的簡単な考察によって、次の結果が得られる：

クリスタライン運動の解の存在. \tilde{W} を \mathbf{R}^N 内の閉じた凸 (超) 多面体で原点をその内部に含むものとする. Γ_0 を \tilde{W} -許容多面体とせよ. 正の数 T を

$$T = \frac{(\text{多面体 } \Gamma_0 \text{ が囲む } N \text{ 次元体積})}{N (\text{多面体 } \tilde{W} \text{ が囲む } N \text{ 次元体積})}$$

とおく. そのとき, 初期多面体を Γ_0 とする \tilde{W} -クリスタライン運動の解 $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$ が一意に存在する. さらに, 多面体 $\Gamma(t)$ の囲む N 次元体積は時刻 $t = T$ で 0 に収束する. —

既に, 2次元平面内の多角形の運動に関しては, \tilde{W} -許容多角形概念が多角形 Γ が凸でない場合にも拡張でき, 我々が上で定義した \tilde{W} -クリスタライン運動よりも一般のクリスタライン運動も含めて Angenent & Gurtin [5] と Taylor [35] によって導入されている (クリスタライン運動による \tilde{W} -許容多角形の運動については様々な研究がなされているので, 興味のある方は [4, 19, 21, 31, 32, 34, 36] などを参照されたい). [35] では, 3次元以上でも 平均クリスタライン曲率運動 と呼びうるようなものが導入されているが, これは比較定理を満たさないことが知られている ([6, 7]). 一方, 我々がここで導入したクリスタライン運動は, 3次元以上でも, 比較定理を満たすことが定義から容易に分かる:

比較定理. \tilde{W} を \mathbf{R}^N 内の閉じた凸 (超) 多面体で原点をその内部に含むものとする. $\{\Gamma^1(t)\}_{t \in [0, T]}$ と $\{\Gamma^2(t)\}_{t \in [0, T]}$ は \tilde{W} -クリスタライン運動の解であるとせよ. もしも多面体 $\Gamma^2(0)$ が多面体 $\Gamma^1(0)$ を囲むならば, 多面体 $\Gamma^2(T)$ は多面体 $\Gamma^1(T)$ を囲む. —

4 3次元クリスタライン運動のガウス曲率流への収束

ここでの我々の目的は, \mathbf{R}^3 内のクリスタライン運動とその解の列を考え, クリスタライン運動の解の列が3次元ガウス曲率流の解に収束する十分条件を与えることである.

Γ_0 を \mathbf{R}^3 内の滑らかな狭義凸閉曲面として, Γ_0 を初期曲面とする3次元ガウス曲率流 (すなわち, S^2 -ガウス曲率流) の解を $\Gamma(t)$ で, その消滅時刻を T_0 で表す. $\{\tilde{W}^k\}_{k \in \mathbf{N}}$ を原点を内部に含む \mathbf{R}^3 内の凸多面体の列とする. さらに, Γ_0^k ($k = 1, 2, \dots$) を \tilde{W}^k -許容多面体であるとして, Γ_0^k を初期多面体とする \tilde{W}^k -クリスタライン運動の解を $\Gamma^k(t)$ で表す. 以下では, d_H でハウスドルフ距離を表す: \mathbf{R}^3 内の空でない有界集合 A と B に対して

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \text{dist}(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \text{dist}(x, y)\right\}.$$

以上の準備のもとで、我々の主結果は次のように述べられる。

収束定理. (牛島健夫 & Y [38])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\tilde{W}^k, S^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\Gamma_0^k, \Gamma_0) = 0$$

であるとせよ。もしもウルフ多面体 \tilde{W}^k ($k = 1, 2, \dots$) が 原点に関して点対称 であるならば、次が成り立つ：任意の $t \in [0, T_0)$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} d_H(\Gamma^k(s), \Gamma(s)) = 0.$$

(注意)： S^2 を近似するウルフ多面体の列、及び、 Γ_0 を近似する許容多面体が存在することは、例えば次のようにして分かる。 $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を S^2 の稠密な部分集合とする。ここで、 l_0 を十分に大きい自然数であるとする、任意の自然数 k に対して

$$\tilde{W}^k = \partial\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \max_{i=1,2,\dots,k+l_0} |\langle x, v_i \rangle| \leq 1\}$$

は原点对称な凸多面体である。さらに、 $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\tilde{W}^k, S^2) = 0$ であることも分かる。そして、滑らかな凸閉曲面 Γ_0 の外接多面体 Γ_0^k は \tilde{W}^k -許容多面体になり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\Gamma_0^k, \Gamma_0) = 0$ が成立することも分かる。([33] の定理 1.8.7 を参照)

5 収束定理の証明について

我々の収束定理の証明法は石井 & Soner [30] と同じく、クリスタライン運動の解の上極限、下極限がそれぞれガウス曲率流の粘性解的な意味での劣解、優解となることを言うものである。この際、試験関数は滑らかに時間発展する凸曲面である。この試験関数をクリスタライン運動の初期曲面になりうる多面体、すなわち許容多面体で内側、及び、外側からそれぞれ近似していく。ところで、試験関数としては局所的には楕円面のみを考えれば、ほぼ十分である。これは滑らかな凸曲面は両側からそれぞれ、曲率まで込めて楕円面で局所的に近似できるからである。そこで、楕円面を許容多面体で近似し、楕円面のガウス曲率を許容多面体のガウス・クリスタライン曲率で近似する次の補題が、証明において鍵となる。

補題. $\{\tilde{W}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を原点を内部に含む \mathbb{R}^3 内の凸多面体の列で、 $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(\tilde{W}^k, S^2) = 0$ を満たすとする。 E を楕円面とせよ。このとき、多面体の列 $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して次を満たす：

E^k は \tilde{W}^k -許容多面体である。 $\lim_{k \rightarrow \infty} d_H(E^k, E) = 0$ である。さらに、ウルフ多面体 \tilde{W}^k に対する E^k の第 i 面 E_i^k のガウス・クリスタライン曲率は、楕円面 E

の外向き単位法線ベクトルが第 i 面 E_i^+ の外向き単位法線ベクトルに一致する点での通常のガウス曲率（主曲率の積）に一致する。——

この補題は、微分幾何学のミンコフスキー問題に関する古典的理論（例えば [33]）を用いて比較的簡単に証明できる。ミンコフスキー問題とは、凸閉曲面の外向き単位法線ベクトルに対し、そのガウス曲率を与える関数とその曲面との関係性を問題にしたものである。ところで、上の補題を 2 次元平面で考えてみると、楕円面に対応するものは円である。円の曲率は定数であるので、ウルフ多角形を相対拡大すれば求める許容多角形が得られる。2 次元平面では、上の補題に対応する結果が自明となっていることが分かる。

6 関連する諸結果と今後の課題など

ガウス曲率流の解の近似手法については、多面体によるもの以外の研究もある ([27, 29] など)。とくに [29] では凸ではない曲面の運動にまで拡張された非等方ガウス曲率流（具体的には、曲面の凸包の境界になっていない点での運動速度は 0 に等しいと置いた流れ）の近似を扱っている。

2 次元平面内の曲率流の解に対する、クリスタライン運動の解による近似については多くの先行研究がある（例えば [15, 23, 24, 28, 30, 39]）。とくに、儀我美保 & 儀我美一 [18, 20] はウルフ曲線として、滑らかとも多角形とも限らない一般の凸閉曲線で考えている。[18] では、周期関数のグラフで与えられる初期曲線とウルフ曲線の列を考え、その解の収束を証明している。[20] では、等高線の方法を正当化し、等高線関数の収束を証明している。さらに、等高線集合が肥満現象を起こさない（つまり、内点を生じない）場合には等高線集合の収束を示している。（注意：[22] にある等高面関数の凸性保存を利用すれば、初期図形が凸閉曲線であれば肥満現象は起こらないことが比較的容易に示されると思われる。一方、初期曲線が滑らかな閉曲線であるとしても、凸でなければ短い時間の間でも肥満が起こらないか、どうかは一般には分かっていないようである。）そこで、3 次元以上の非等方ガウス曲率流についても、滑らかとも多面体とも限らない一般のウルフ凸閉曲面で考えることは興味深い問題と思われるが、今のところ手付かずである。また、収束定理においてウルフ図形の原点に関する点対称性が必要であるか、どうか不明である。

参考文献

- [1] B. Andrews, Evolving convex curves, *Calc. Var.*, 7 (1998), 315–371.
- [2] B. Andrews, Gauss curvature flow: the fate of the rolling stones, *Invent. Math.*, 138 (1999), 151–161.
- [3] B. Andrews, Motion of hypersurfaces by Gauss curvature, *Pacific J. Math.*, 195 (2000), 1–34.
- [4] B. Andrews, Singularities in crystalline curvature flows, *Asian J. Math.*, 6 (2002), 101–121.
- [5] S. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure 2. Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108 (1989), 323–391.
- [6] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature, *Interfaces Free Bound.*, 1 (1999), 39–55.
- [7] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, Characterization of facet breaking for nonsmooth mean curvature flow in the convex case, *Interfaces Free Bound.*, 3 (2001), 415–446.
- [8] D. Chopp, L. C. Evans and H. Ishii, Waiting time effects for Gauss curvature flows, *Indiana Univ. Math. J.*, 48 (1999), 311–334.
- [9] K.-S. Chou and X.-P. Zhu, A convexity theorem for a class of anisotropic flows of plane curves, *Indiana Univ. Math. J.*, 48 (1999), 139–154.
- [10] B. Chow, Deforming convex hypersurfaces by the n th root of the Gaussian curvature, *J. Differential Geometry*, 22 (1985), 117–138.
- [11] P. Daskalopoulos and K.-A. Lee, Worn stones with flat sides all time regularity of the interface, *Invent. Math.*, 156 (2004), 445–493.
- [12] C. Dohmen and Y. Giga, Selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations, *Proc. Japan Acad. A*, 70 (1994), 252–255.
- [13] C. Dohmen, Y. Giga and N. Mizoguchi, Existence of selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations, *Calc. Var.*, 4 (1996), 103–119.
- [14] W. J. Firey, Shapes of worn stones, *Mathematika*, 21 (1974), 1–11.
- [15] T. Fukui and Y. Giga, Motion of a graph by nonsmooth weighted curvature, *World Congress of Nonlinear Analysis '92* (ed. V. Lakshmikantham), Walter de Gruyter, pp. 47–56, 1996.
- [16] M. E. Gage and R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Differential Geometry*, 23 (1986), 69–96.

- [17] M. E. Gage and Y. Li, Evolving plane curves by curvature in relative geometries II, *Duke Math. J.*, 75 (1994), 79–98.
- [18] M.-H. Giga and Y. Giga, Stability for evolving graphs by nonlocal weighted curvature, *Commun. in PDE*, 24 (1999), 109–184.
- [19] M.-H. Giga and Y. Giga, Crystalline and level set flow - convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 13 (2000), 64–79.
- [20] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 159 (2001), 295–333.
- [21] Y. Giga, Anisotropic curvature effects in interface dynamics, *Sugaku Expositions*, 16 (2003), 135–152.
- [22] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii and M.-H. Sato, Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains, *Indiana Univ. Math. J.*, 40 (1991), 443–470.
- [23] P. M. Girão, Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a simple closed convex curve by weighted curvature, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 (1995), 886–899.
- [24] P. M. Girão and R. V. Kohn, Convergence of a crystalline algorithm for the heat equation in one dimension and for the motion of a graph by weighted curvature, *Numer. Math.*, 67 (1994), 41–70.
- [25] M. A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Differential Geometry*, 26 (1987), 285–314.
- [26] R. S. Hamilton, Worn stones with flat sides, *A Tribute to Ilya Bakelman (College Station, TX, 1993)*, Texas A & M University, pp. 69–78, 1994.
- [27] H. Ishii, Gauss curvature flow and its approximation, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 14 (2000), 198–206.
- [28] H. Ishii and T. Mikami, A two-dimensional random crystalline algorithm for Gauss curvature flow, *Adv. Appl. Prob.*, 34 (2002), 491–504.
- [29] H. Ishii and T. Mikami, Convexified Gauss curvature flow of sets: a stochastic approximation, *SIAM J. Math. Anal.*, 36 (2004), 552–579.
- [30] K. Ishii and H. M. Soner, Regularity and convergence of crystalline motion, *SIAM J. Math. Anal.*, 30 (1998), 19–37.
- [31] T. Ishiwata, T. K. Ushijima, H. Yagisita and S. Yazaki, Two examples of nonconvex self-similar solution curves for a crystalline curvature flow, *Proc. Japan Acad. A*, 80 (2004), 151–154.

- [32] T. Ishiwata and S. Yazaki, On the blow-up rate for fast blow-up solutions arising in an anisotropic crystalline motion, *J. Comput. Appl. Math.*, 159 (2003), 55–64.
- [33] R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [34] A. Stancu, Uniqueness of self-similar solutions for a crystalline flow, *Indiana Univ. Math. J.*, 45 (1996), 1157–1174.
- [35] J. E. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, *Differential Geometry* (eds. B. Lawson and K. Tanenblat), Pitman, pp. 321–336, 1991.
- [36] J. E. Taylor, Motion of curves by crystalline curvature, including triple junctions and boundary points, *Differential Geometry* (eds. R. Greene and S. T. Yau), AMS, pp. 417–438, 1993.
- [37] K. Tso, Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, 38 (1985), 867–882.
- [38] T. K. Ushijima and H. Yagisita, Convergence of a three-dimensional crystalline motion to Gauss curvature flow, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 22 (2005), 443–459.
- [39] T. K. Ushijima and S. Yazaki, Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a closed convex curve by a power of curvature $V = K^\alpha$, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 (2000), 500–522.
- [40] H. Yagisita, Non-uniqueness of self-similar shrinking curves for an anisotropic curvature flow, *Calc. Var.*, to appear.