数理解析研究所講究録
1500巻 2006年 46-56

$SU(3)$型$U(1)$インスタントンについて

待田　芳徳　(沼津高専)
Yoshinori MACHIDA (Numazu College of Technology)

1. はじめに

1.1. 束の合成と分解

次の２種類 (1),(2) のファイバー束を考える.
(1) 4元 Hopf 束

$$Sp(1)(\cong SU(2)\cong S^3)\longrightarrow S^7\longrightarrow \mathbb{H}P^1\cong S^4$$

に対して，複素 Hopf 束と Penrose 束

$$U(1)(\cong S^1)\longrightarrow S^7\longrightarrow \mathbb{C}P^3,\quad \mathbb{C}P^1(\cong S^2)\longrightarrow \mathbb{C}P^3\longrightarrow \mathbb{H}P^1\cong S^4:$$

$$\begin{tikzcd}
S^7 \arrow[dd, "Sp(1)"'] \arrow[dr, "U(1)"] & \\
& \mathbb{C}P^3 \arrow[dl, "\mathbb{C}P^1"] \\
S^4 &
\end{tikzcd}$$

(2) $V=\mathbb{C}^3$ での $1,2$ 次元部分空間の旗多様体 $F_{12}=SU(3)/U(1)\times U(1)$ を考えて，$\mathbb{C}P^2=SU(3)/S(U(2)\times U(1))$, $N^7=SU(3)/U(1)$ として，

$$Sp(1)(\cong SU(2)\cong S^3)\longrightarrow N^7\longrightarrow \mathbb{C}P^2$$

に対して，

$$U(1)(\cong S^1)\longrightarrow N^7\longrightarrow F_{12},\quad \mathbb{C}P^1(\cong S^2)\longrightarrow F_{12}\longrightarrow \mathbb{C}P^2:$$

$$\begin{tikzcd}
N^7 \arrow[dd, "Sp(1)"'] \arrow[dr, "U(1)"] & \\
& F_{12} \arrow[dl, "\mathbb{C}P^1"] \\
\mathbb{C}P^2 &
\end{tikzcd}$$

を考えると，(1),(2) とも互いにファイバー束の合成，分解になっている．それらの上の接続についても同様なことがいえるが，特別なクラス同志，特に，よく知られた S^4, $\mathbb{C}P^2$ 上の $Sp(1)$

インスタントンに対して，それぞれ$\mathbb{C}P^3$, F_{12}上の「$U(1)$インスタントン」の対応やモジュライについてはどうであろうか.

1.2. $U(1)$ ゲージ場

ここで，通常のインスタントンはHodgeの$*$作用素からの自己双対性に基づくので，4次元多様体上の束でしか定義されない．$U(1)$Yang-Mills接続はYang-Mills汎関数の臨界点として任意次元の多様体M上の$U(1)$束で定義されるが，モジュライ空間は商空間$H^1(M;\mathbb{R})/H^1(M;\mathbb{Z})$と1対1対応するため，単連結な$\mathbb{C}P^3$, F_{12}では自明なものしか存在しない[M-I].

ここでは，6次元多様体上に幾何構造としての$SU(3)$構造(特に，nearly Kähler構造)を考え，そのもとで自然に定義される主$U(1)$束上にインスタントンを考える．それを，S^4, $\mathbb{C}P^2$のそれぞれツイスター空間である$\mathbb{C}P^3$, F_{12}に適用してみることを考える.

6次元nearly Kähler多様体$(M^6, g, J, \omega, \Phi = \phi + i\psi)$上の$SU(3)$型$U(1)$インスタントン$A$の議論は，M理論コンパクト化でのタイプIIA背景空間におけるNS-NS場の計量g, 2-形式ωとR-R場の3-形式$\Phi = \phi + i\psi$, S^1束からのゲージポテンシャルである1-形式A, 場の強さR_Aが登場人物として展開する話である.

2. $SU(3)$ 構造，特に，nearly Kähler 構造

2.1. $U(n)$ 構造

$2n$次元多様体M^{2n}に対して，gをRiemann計量，Jを$g(JX, JY) = g(X, Y)$となる概複素構造，ωを$\omega(X, Y) = \omega(JX, Y)$となる基本2-形式を考える．そのとき，$M$は概Hermite構造，$U(n)$構造をもつという．3つのうち2つを与えれば，他の1つは定まる．gのLevi-Civita接続∇に対して，$\nabla J = 0$ ($\nabla\omega = 0$)のとき，構造は可積分(捩率0，平坦)といい，Kählerであるという.

Mの各点で次の$U(n)$既約分解をもつ([C-S], [Sa])：$T^* = T^*M, \Lambda^\bullet = \Lambda^\bullet T^*M$として，

$$
\begin{aligned}
T^* &\cong [\Lambda^{1,0}],\\
\Lambda^2 T^* &\cong [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R},\\
\Lambda^3 T^* &\cong [\Lambda^{3,0}] \oplus [\Lambda_0^{2,1}] \oplus T^*,\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
$$

ここで，$T^*_{\mathbb{C}} = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$として，

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^r T^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q},\ [\Lambda^{p,q}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{p,q} \oplus \Lambda^{q,p},\ [\Lambda^{p,p}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{p,p},\\
&\Lambda^1 = [\Lambda^{1,0}],\ \Lambda^1 + i\Lambda^1 = \Lambda^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1},\\
&\Lambda^2_{\mathbb{C}} = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2},\ \Lambda^2 = [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda^{1,1}] = [\Lambda^{2,0}] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

最後の式は，$\Lambda^2 = \mathfrak{so}(2n)$, $[\Lambda^{2,0}] = \mathfrak{u}(n)^\perp$, $\Lambda^{1,1} = \mathfrak{u}(n)$, $[\Lambda_0^{1,1}] = \mathfrak{su}(n)$, $\mathbb{R} = \langle\omega\rangle$と同一視される.

2.2. $SU(n)$ 構造

$U(n)$ 構造をもつ $2n$ 次元多様体 M に対して，M の各点で 2 次元 $[\Lambda^{n,0}]$ の単位円 S^1 をファイバーとする単位 (実) 標準束 B を考える：

$$\begin{array}{ccc} B & \longleftarrow & S^1 \subset [\Lambda^{n,0}] \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

この束の切断を指定するとき，M は $SU(n)$ 構造をもつという ([C-S], [Sa]). 束 B は主 S^1 束だから，そのとき自明束である．可積分な $U(n)$ 構造のときは Calabi-Yau といい，Ricci 平坦な Kähler である．

$SU(n)$ 構造をもつことは実 n-形式 ϕ を指定することであり，付随する $(n,0)$-形式

$$\Phi = \phi + i\psi,\ \psi = J\phi$$

が定義される．束 B の各ファイバーは,

$$S^1 = \{a\phi + b\psi \mid a^2 + b^2 = 1\} \subset [\Lambda^{n,0}]$$

である．

2.3. $SU(3)$ 構造

6 次元について考える．$U(3)$ 構造から $SU(3)$ 構造への簡約は局所的に存在する: $\{e^1, \cdots, e^6\}$ を T^* での局所的な正規直交基底場とすると，$Je^1 = -e^2$, $Je^3 = -e^4$, $Je^5 = -e^6$ であり，

$$\begin{aligned} \omega &= e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6, \\ \Phi &= (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6) \\ &= e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245} + i(e^{136} + e^{145} + e^{235} - e^{246}) \\ &= \phi + i\psi, \end{aligned}$$

ここで $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, である．そのとき，

$$\omega \wedge \phi = 0, \quad \omega \wedge \psi = 0, \quad \phi \wedge \psi = \frac{2}{3}\omega^3$$

を満たす.

2.4. nearly Kähler 構造

$U(n)$ 構造をもつ $2n$ 次元多様体 (M, g, J, ω) が nearly Kähler であるとは，Levi-Civita 接続 ∇ に対して $(\nabla_X J)X = \nabla_X JX - J\nabla_X X = 0$ $(X \in TM)$ を満たすときをいう．特に，$\nabla J = 0$ のときは Kähler である，以後 non Kähler とする．

6 次元のときの性質としては ([C], [C-S]),

(i) 標準束 K は自明，即ち，第 1Chern 類 $c_1(M) = 0$, ($2n$ 次元でもよい)

(ii) 正の Einstein, 従って完備ならばコンパクト,

(iii) 計量錐 $C(M)$: $dr^2 + r^2 g$ は G_2 ホロノミーをもつ,

(iv) 等質空間は次の 4 つである : S^6, $\mathbb{C}P^3$, F_{12}, $S^3\times S^3$.

さらに,

$$d\omega = 3\nabla\omega \in [\Lambda^{3,0}]$$

が成り立つ. 大事なことは, 基本 2-形式 ω と複素体積形式 $\Phi=\phi+i\psi\in\Lambda^{3,0}$ が存在して,

$$d\omega = 3\phi\ (\Rightarrow d\phi=0),\quad d\psi=-2\omega\wedge\omega\ (\Rightarrow d(\omega\wedge\omega)=0)$$

を満たすことであり, $SU(3)$ 構造を定義する. $(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X=0$ に注意して,

$$\phi(X,Y,Z)=g((\nabla_X J)Y,Z),\ \psi(X,Y,Z)=g((\nabla_X J)Y,JZ)\in[\Lambda^{3,0}]$$

とすればよい.

3. $SU(3)$ 型インスタントン

3.1. $SU(3)$ 型インスタントン

$SU(3)$ 型インスタントンを定義する前に, 通常の 4 次元多様体上の束のインスタントンを復習して, $SU(3)$ 型インスタントンの定義の自然さ, 類似性をみる一助としよう.

向き付けられた 4 次元 Riemann 多様体 N での 2-形式の空間 $\Lambda^2\cong\mathfrak{so}(4)$ の $SO(4)$ 既約分解

$$\Lambda^2=\Lambda^2_+\oplus\Lambda^2_-,\qquad \mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)_+\cong\Lambda^2_+,\ \mathfrak{g}^\perp=\mathfrak{su}(2)_-\cong\Lambda^2_-$$

を考える. これは, Hodge の $*$ 作用素の ±1 の固有分解でもある.

P をコンパクト半単純 Lie 群 H を構造群とする N 上の主束とし, その上の接続形式 A の曲率形式 R_A が,

$$R_A\in\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^2_+)(\subset\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^2))$$

$(\mathrm{adP}=\mathrm{P}\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{h})$ を満たすとき, P 上の A をインスタントンという. そのとき, インスタントン A に対する楕円複体

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^0)\xrightarrow{\mathrm{D_0}}\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^1)\xrightarrow{\mathrm{D_1}}\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^2_-)\longrightarrow 0$$

ができる, ここで $D_0=D_A$, $D_1=p_-\circ D_A$ は共変外微分 ($p_-:\Lambda^2\longrightarrow\Lambda_-$ は直交射影) である.

N が $U(2)$ 構造 (概 Hermite 構造) をもつとき, Λ^2 の $U(2)$ 既約分解

$$\Lambda^2=[\Lambda^{2,0}]\oplus\langle\omega\rangle\oplus[\Lambda^{1,1}_0],\qquad \Lambda^2_+=[\Lambda^{2,0}]\oplus\langle\omega\rangle,\ \Lambda^2_-=[\Lambda^{1,1}_0]$$

をもつ. そのとき, A として反インスタントンのほうを考える :

$$R_A\in\Gamma(\mathrm{adP}\otimes\Lambda^2_-).$$

次に, $U(3)$ 構造 (概 Hermite 構造) をもつ 6 次元多様体 M での 2-形式の空間 $\Lambda^2\cong\mathfrak{so}(6)$ の $U(3)$ 既約分解

$$\Lambda^2=[\Lambda^{2,0}]\oplus\langle\omega\rangle\oplus[\Lambda^{1,1}_0],\qquad \mathfrak{g}^\perp=[\Lambda^{2,0}]\oplus\langle\omega\rangle,\ \mathfrak{g}=\mathfrak{su}(3)\cong[\Lambda^{1,1}_0]$$

を考える.

P を M 上の主 H 束とする：

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

その上の接続形式 A の曲率形式 R_A が,

$$R_A \in \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \mathfrak{g})(\subset \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^2))$$

を満たすとき，P 上の A を $SU(3)$ 型 H インスタントンという ([C]). そのとき，インスタントン A に対する系列

$$0 \to \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^0) \xrightarrow{\mathrm{D}_0} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{\mathrm{D}_1} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes ([\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle)) \xrightarrow{\mathrm{D}_2} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes [\Lambda^{3,0}]) \to 0$$

は楕円的となる．M が可積分な $U(3)$ 構造，即ち，Kähler であるか，または，nearly Kähler であるとき，系列は複体となる．そのとき，M がさらにコンパクトならば，Atiyah-Singer の指数定理が適用できる．$\mathcal{M}$ を，P 上の $SU(3)$ 型 H インスタントン全体の集合の P のゲージ変換群による商空間であるモジュライ空間とする．そのとき，$SU(3)$ 型 H インスタントンの変形モジュライ $T_A\mathcal{M}$ は，$H^1 = \mathrm{Ker}D_1/\mathrm{Im}D_0$ で与えられる.

3.2. 作用積分と運動方程式

6 次元 nearly Kähler 多様体 $(M^6, g, J, \omega, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える：$d\omega = 3\phi$, $d\psi = -2\omega^2$. P を M 上の主 H 束とする.

命題

A が $SU(3)$ 型 H インスタントンである：$R_A \in \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \mathfrak{su}(3))$

$\Longleftrightarrow$ (運動方程式) $R_A \wedge \phi = 0, \quad R_A \wedge \omega^2 = 0$

$\Longleftrightarrow$ (作用積分) $S(A) = \int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{dA} + \frac{2}{3}\mathrm{A}^3) \wedge \Phi$ の臨界点である.

$A_t = A + t\alpha$ $(\alpha \in \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^1))$ に対して,

$$\left.\frac{dS(A_t)}{dt}\right|_{t=0} = 2\int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{R_A} \wedge \alpha) \wedge \Phi$$

となり，臨界点は $R_A \wedge \phi = 0$, $R_A \wedge \psi = 0$ で特徴づけられる.

3 次元多様体の場合の Chern-Simons 汎関数の作用積分と同様に，この作用積分はゲージ不変ではない．Φ のかわりに実部 ϕ をとって作用積分 $S_{re}(A) = \int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{dA} + \frac{2}{3}\mathrm{A}^3) \wedge \phi$ を考え，$H = U(1)$, あるいは $\mathbb{C}P^3, F_{12}$ のような $H^3 = 0$ であれば，ゲージ不変となる.

4. ツイスター理論

4.1. 一般論

向き付けられた 4 次元 Riemann 多様体 (N, h) の $T_xN (x \in N)$ での正の直交複素構造全体

$$Z_x = \{J \in \mathrm{End}(\mathrm{T_xN}) \mid \mathrm{J}^2 = -\mathrm{id}, \mathrm{h}(\mathrm{JX}, \mathrm{JY}) = \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{J} \gg 0\} \cong \mathrm{S}(\Lambda^2_-) \cong \mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

をファイバーとする N 上のツイスター空間 $Z = Z(N) = \bigcup_{x\in N} Z_x$ を考える．射影を $\pi : Z \to N$ とする．TZ を，h の Levi-Civita 接続による水平リフト H とファイバー $\mathbb{C}P^1$ に接する垂直成分 V に分解する：$TZ = H \oplus V$. そのとき，次が知られている ([B], [Sa]).

Z 上の概複素構造 J を，H 上ではトートロジカルな J^h, V 上では $\mathbb{C}P^1$ からの標準的な J^v をとることによって定義する：$J = J^h \oplus J^v$.

命題 ツイスター空間 Z の概複素構造 J が積分可能である $\Longleftrightarrow$ N が半共形的平坦 ((反) 自己双対的) である．

命題 コンパクトな N のツイスター空間 Z が Kähler である $\Longleftrightarrow$ 半共形的平坦な N が正の Einstein である $\Longleftrightarrow$ N が $S^4, \mathbb{C}P^2$ である．

4.2. $Z(S^4)$ と $Z(\mathbb{C}P^2)$

N を $S^4, \mathbb{C}P^2$ とする．それぞれのツイスター空間 Z は $\mathbb{C}P^3, F_{12}$ である．Z 上の概複素構造に対して ([E-S], [Sa], [H]),

命題 通常の $J_1 = J^h \oplus J^v$ は積分可能である，一方 $J_2 = J^h \oplus -J^v$ は積分可能ではない．

命題 Z 上の Riemann 計量を $g_t = \pi^* h + th^v (t > 0)$ とすると，$t = t_1 = 12/\tau, t = t_2 = 6/\tau$ (τ は Einstein な N の正のスカラー曲率) のとき，g は Einstein である，そして $(g_1 = g_{t_1}, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler, $(g_2 = g_{t_2}, J_2, \omega_2)$ は nearly Kähler である．

5. $\mathbb{C}P^3$ と F_{12} での $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン

5.1. $\mathbb{C}P^3$ の場合

nearly Kähler な $(\mathbb{C}P^3, g_2, J_2, \omega_2, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える．$(\mathbb{C}P^3, g_1, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler であることに注意する．$\mathbb{C}P^3$ 上で複素 Hopf 束による $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを考える：

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^7 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathbb{C}P^3 \end{array}$$

Einstein-Kähler な $(\mathbb{C}P^3, g_1, J_1, \omega_1)$ での Kähler 形式 ω_1 は，$\omega_1 \in \Lambda_0^{1,1}(J_2)$, 即ち，$\omega_1 \in \langle \omega_2 \rangle^\perp \subset \Lambda^{1,1}(J_2)$ である．従って，ω_1 を π によって引き戻した曲率をもつ接続 A は，$SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンであることがわかる：

$$R_A = \pi^* \omega_1 \in \Gamma(\mathrm{ad} S^7 \otimes \Lambda_0^{1,1}(J_2)).$$

これを基礎インスタントンとして，BPST 構成の類似の方法によって ([M-I], [K])，中心の位置と強さのスケールによる $6 + 3 = 9$ 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを構成する．

次の図式を考える：

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{H}^2 - \{0\} = \mathbb{C}^4 - \{0\} \longleftarrow \mathbb{C}^* \\ \cup \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Sp(1) & \longrightarrow & S^7 & \longleftarrow & U(1) \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & & & \mathbb{C}P^3 \longleftarrow \mathbb{C}P^1 \\ & & & \swarrow & \\ & & \mathbb{H}P^1 & & \end{array}$$

$\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ での標準座標を $\mathbb{H}^2 : (q_0, q_1)$, $\mathbb{C}^4 : (z_0, z_1, z_2, z_3)$ とする．$\mathbb{C}^4 - \{0\}$ 上の 1-形式

$$\theta = \frac{1}{|z|^2}\sum_{i=0}^{3}\bar{z}_i dz_i$$

を S^7 上に制限すると，u(1)-値 1-形式であり，$\mathbb{C}P^3$ の主 $U(1)$ 束 S^7 上の接続を定義する．$S^7 \longrightarrow \mathbb{C}P^3$ の U_0 上の切断 $z \longmapsto (\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_3}{\sqrt{1+|z|^2}})$ によって，θ を U_0 に引き戻すと，

$$\theta_{U_0} = \mathrm{Im}(\frac{1}{1+|z|^2}\sum_{i=1}^{3}\bar{z}_i dz_i),$$

ここで，$U_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \mid z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^3$, $z = [1, z_1, z_2, z_3] = (z_1, z_2, z_3)$ とする．曲率を U_0 上でみてみると，

$$\begin{aligned}\omega_{U_0} &= d\theta_{U_0} \\ &= \frac{1}{1+|z|^2}\sum_{i=1}^{3} d\bar{z}_i \wedge dz_i - \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\sum_{i<j}(z_i\bar{z}_j d\bar{z}_i \wedge dz_j)\end{aligned}$$

となり，$\mathbb{C}P^3$ での Kähler 形式 ω_1 の非同次座標表示にほかならない．

$a = (a_1, a_2, a_3) \in U_0 = \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ $(\lambda_i > 0)$ に対して，

$$\theta_{(a_i,\lambda_i)} = \mathrm{Im}(\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2|z_i - a_i|^2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2(\bar{z}_i - \bar{a}_i)dz_i)$$

とおくことによって，$\omega_{(a_i,\lambda_i)} = d\theta_{(a_i,\lambda_i)}$ を π によって引き戻した曲率をもつ接続 $A_{(a_i,\lambda_i)}$ は，$6+3=9$ 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである．以下の 5.3.Atiyah-Singer の定理を適用して，次がわかる．

定理 上のように構成した $\mathbb{C}P^3$ の主 $U(1)$ 束 S^7 上の接続 $A_{(a,\lambda)}$ $((a,\lambda) \in \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}^3_+)$ は，9 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである．

5.2. F_{12} の場合

nearly Kähler な $(F_{12}, g_2, J_2, \omega_2, \Phi = \phi + i\psi)$ を考える．$(F_{12}, g_1, J_1, \omega_1)$ は Einstein-Kähler であることに注意する．F_{12} 上で $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを考える：

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & N^7 \\ & & \downarrow \pi \\ & & F_{12} \end{array}$$

Einstein-Kählerな $(F_{12}, g_1, J_1, \omega_1)$ でのKähler形式 ω_1 は，$\omega_1 \in \Lambda_0^{1,1}(J_2)$, 即ち，$\omega_1 \in \langle \omega_2 \rangle^{\perp} \subset \Lambda^{1,1}(J_2)$ である．従って，ω_1 を π によって引き戻した曲率をもつ接続 A は，$SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンであることがわかる：

$$R_A = \pi^* \omega_1 \in \Gamma(\mathrm{ad}N^7 \otimes \Lambda_0^{1,1}(J_2)).$$

Donaldson構成の類似の方法によって ([D])，$SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンを構成する．
自然な埋め込み

$$\begin{array}{ccc} S^{11} \hookleftarrow N^7 & & \\ & \searrow & \\ \downarrow & & F_{12} \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^{2*} \hookrightarrow \mathbb{C}P^5 \\ & \swarrow & \\ \mathbb{H}P^2 \hookleftarrow \mathbb{C}P^2 & & \end{array}$$

のもとで，次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^* & \longrightarrow & \mathbb{H}^3 - \{0\} = \mathbb{C}^6 - \{0\} & \longleftarrow & \mathbb{C}^* & & \\ & & \cup & & & & \\ Sp(1) & \longrightarrow & S^{11} & \longleftarrow & U(1) & & \\ & & & & \searrow & & \\ & & \downarrow & & & \mathbb{C}P^5 & \longleftarrow \ \mathbb{C}P^1 \\ & & & & \swarrow & & \\ & & \mathbb{H}P^2 & & & & \end{array}$$

$\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}^6 = \mathbb{R}^{12}$ での標準座標を $\mathbb{H}^3 : (q_0, q_1, q_2)$, $\mathbb{C}^6 : (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ とする．$\mathbb{C}^6 - \{0\}$ 上の1-形式

$$\theta = \frac{1}{|z|^2} \sum_{i=0}^{5} \bar{z}_i dz_i$$

を S^{11} 上に制限すると，$\mathfrak{u}(1)$-値1-形式であり，$\mathbb{C}P^5$ の主 $U(1)$ 束 S^{11} 上の接続を定義する．$S^{11} \longrightarrow \mathbb{C}P^5$ の U_0 上の切断 $z \longmapsto (\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_3}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_4}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{z_5}{\sqrt{1+|z|^2}})$ によって，θ を U_0 に引き戻すと，

$$\theta_{U_0} = \mathrm{Im}(\frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^{5} \bar{z}_i dz_i),$$

ここで，$U_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] \mid z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^5$, $z = [1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ とする．曲率を U_0 上でみてみると，

$$\begin{aligned} \omega_{U_0} &= d\theta_{U_0} \\ &= \frac{1}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^{5} d\bar{z}_i \wedge dz_i - \frac{1}{(1+|z|^2)^2} \sum_{i<j} (z_i \bar{z}_j d\bar{z}_i \wedge dz_j) \end{aligned}$$

となり，$\mathbb{C}P^5$ でのKähler形式 ω の非同次座標表示にほかならない．

$\mathbb{C}P^5$ でのKähler形式 ω の埋め込み $\iota : F_{12} \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^{2*} \hookrightarrow \mathbb{C}P^5$ からの引き戻しが，F_{12} でのKähler形式 ω_1 にほかならない：$\omega_1 = \iota^* \omega$.

$\mathbb{C}P^5$ の主 $U(1)$ 束 S^{11} 上の接続 θ を，埋め込み ι から引き戻すことによって，F_{12} の主 $U(1)$ 束 N^7 上に上記の接続 A が定義される：$A = \iota^*\theta$, $R_A = \pi^*\omega_1 = \pi^*\iota^*\omega$.

$\mathbb{C}P^3$ の場合と同様に，F_{12} 上に θ, A から中心の位置と強さのスケールによる $6+3=9$ 次元パラメーターの $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン $A_{(a_i,\lambda_i)}$ が構成できる．

さらに，複素 Hopf 束を考える：

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^5 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathbb{C}P^2 \end{array}$$

$\mathbb{C}P^2$ 上の Kähler 形式 ω を S^5 に引き戻した曲率をもつ S^5 上の接続 θ から，$\mathbb{C}P^3$ の場合と同様に，$b = (b_1, b_2) \in U_0 = \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ $(\mu > 0)$ に対して，中心の位置と強さのスケールによる接続 $\theta_{(b_i,\mu_i)}$ ができる．束 $\varpi : F_{12} \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ による引き戻し $\varpi^*\theta_{(b_i,\mu_i)}$ によって，F_{12} 上に 6 次元パラメーターの $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントン $B_{(b_i,\mu_i)}$ が構成できる．以下の 5.3.Atiyah-Singer の定理を適用して，次がわかる．

定理 上のように構成した F_{12} の主 $U(1)$ 束 N^7 上の接続 $A_{(a,\lambda)}$ $((a,\lambda) \in F_{12} \times \mathbb{R}^3_+)$ と $B_{(b,\mu)}$ $((b,\mu) \in \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}^2_+)$ は，15 次元パラメーターをもつ $SU(3)$ 型 $U(1)$ インスタントンである．

5.3. Atiyah-Singer の指数定理の適用

M をコンパクトな 6 次元 nearly Kähler 多様体とし，P をコンパクト半単純 Lie 群 H を構造群とする M 上の主束とする．3.1. の話から，A が P 上の $SU(3)$ 型 H インスタントンのとき，A に対する楕円複体の系列ができる：

$$0 \to \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{D_1} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes ([\Lambda^{2,0}] \oplus \langle \omega \rangle)) \xrightarrow{D_2} \Gamma(\mathrm{adP} \otimes [\Lambda^{3,0}]) \to 0.$$

Atiyah-Singer の指数定理によって ([Sh], [K]),

$$h^0 - h^1 + h^2 - h^3 = -\frac{\mathrm{ch}(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \mathrm{Ad}P \otimes \Lambda^i_{\mathbb{C}})\mathrm{td}(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)}[M],$$

ここで $h^i = \dim H^i$, $H^i = \mathrm{Ker}D_i/\mathrm{Im}D_{i-1}$, そして $\mathrm{ch}(\mathrm{Ad}P \otimes \Lambda^i_{\mathbb{C}}) = \mathrm{ch}(\mathrm{Ad}P)\mathrm{ch}(\Lambda^i_{\mathbb{C}})$,

$$\Lambda^i_{\mathbb{C}} = \begin{cases} \Lambda^0 \otimes \mathbb{C}, & i = 0, \\ \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}, & i = 1, \\ \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \mathbb{C}\,\omega, & i = 2, \\ \Lambda^{3,0} \oplus \Lambda^{0,3}, & i = 3. \end{cases}$$

左辺は D_i に関する解析的指数，右辺は Chern 指標，Todd 類，Euler 類に関する位相的指数を表わす．

$H = U(1)$ とする．そのとき，$h^0 = 1$, $\mathrm{ch}(\mathrm{Ad}P) = 1$ となる．T_C を M の複素接束，$\bar{T}_C$ をその複素共役束とする：

$$TM \otimes \mathbb{C} = T_C \oplus \bar{T}_C, \; T^*M \otimes \mathbb{C} = T^*_C \oplus \bar{T}^*_C.$$

全 Chern 類を

$$\begin{aligned} c(TM\otimes\mathbb{C}) &= c(T_C)\cdot c(\bar{T}_C) \\ &= (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \end{aligned}$$

のように分裂原理によって分解する．そのとき，次がいえる：

$$\mathrm{ch}(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\Lambda^i_{\mathbb{C}}) = \mathrm{ch}(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\Lambda^{i,0}) + \mathrm{ch}(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\Lambda^{0,i}) = \prod_{i=1}^{3}(1-e^{-x_i}) + \prod_{i=1}^{3}(1-e^{x_i}),$$

$$\mathrm{td}(TM\otimes\mathbb{C}) = \mathrm{td}(T_C)\cdot\mathrm{td}(\bar{T}_C) = \prod_{i=1}^{3}\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\cdot\prod_{i=1}^{3}\frac{-x_i}{1-e^{x_i}},$$

$$e(TM) = c_3(T_C) = \prod_{i=1}^{3}x_i.$$

よって，位相的指数である右辺は，

$$\begin{aligned} &-\{(\prod_{i=1}^{3}(1-e^{-x_i}) + \prod_{i=1}^{3}(1-e^{x_i}))\prod_{i=1}^{3}\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\cdot\prod_{i=1}^{3}\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}/\prod_{i=1}^{3}x_i\}[M] \\ &= -(\prod_{i=1}^{3}\frac{-x_i}{1-e^{x_i}} - \prod_{i=1}^{3}\frac{x_i}{1-e^{-x_i}})[M] \\ &= -(\mathrm{td}(\bar{T}_C)-\mathrm{td}(T_C))[M] \\ &= (\mathrm{td}(T_C)-\mathrm{td}(\bar{T}_C))[M] \\ &= 2\mathrm{td}(T_C)[M] \end{aligned}$$

となる．もし M が複素多様体ならば，Todd 類を M 上で積分した $\mathrm{td}(T_C)[M]$ は算術種数に等しいことに注意する．

以上から，A の $SU(3)$ 型 H インスタントンの変形モジュライの次元は，空でないとして，

$$h^1 = \dim H^1 = -2\mathrm{td}(T_C)[M] + h^2 - h^3 - 1$$

である．

5.4. おわりに

（1） $\mathbb{C}P^3$ 上の主 $U(1)$ 束の同型類は $H^2(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ であるが，主 $U(1)$ 束のため，他の束の $U(1)$ インスタントンのモジュライの次元は変わらない．通常の S^4 上の $Sp(1)$ インスタントンのモジュライの次元は $8k-3$ であることと比較せよ．

（2） nearly Kähler な $S^6, S^3\times S^3$ 上の $U(1)$ インスタントンは，$H^2=0$ のため，自明なものしか存在しない．

（3） 通常の Einstein-Kähler な $(\mathbb{C}P^3, g_1, J_1, \omega_1)$ 上の $U(1)$ インスタントンは，自明なものしか存在しない．

（4） 通常の $N=S^4, \mathbb{C}P^2$ 上の H インスタントンのそれぞれ nearly Kähler な $Z=\mathbb{C}P^3, F_{12}$ への引き戻しは，概複素構造の定め方より，$SU(3)$ 型 H インスタントンである．

References

[B] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987.

[C] R.R. Carrión, *A generalization of the notion of instanton*, Diff. Geom. Appl. 8 (1998) pp.1–20.

[C-S] S. Chiossi-S. Salamon, *The intrinsic torsion of $SU(3)$ and G_2 structures*, Differential geometry, Valencia 2001, pp.115–133, World Sci. Pub., 2002.

[D] S.K. Donaldson, *Vector bundles on the flag manifold and the Ward correspondence*, Geometry of today, Roma 1984, pp.109–119, Birkhäuser, 1985.

[E-S] J. Eells-S. Salamon, *Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifods*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12 (1985) pp.589–640.

[H] N.J. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. 43 (1981) pp.133–150.

[K] 小林, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.

[M-I] 茂木-伊藤, 微分幾何学とゲージ理論，共立出版，1986.

[Sa] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes Math. Ser. 201, Longman Scientific & Technical, 1989.

[Sh] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer index theorem*, Lecture Notes Math. 638, Springer-Verlag, 1978.