数理解析研究所講究録
1500巻 2006年 117-120

量子探索アルゴリズムと量子情報幾何，可積分系* †

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 複雑系科学科
上野 嘉夫 (Yoshio Uwano)
Department of Complex Systems, School of Systems Information Science
Future University-Hakodate

1. 背景と目的

量子計算とは量子力学を動作原理とする新しい計算法であり，2値論理に基づく従来の計算法（以下，古典計算）では実現不可能な「効率的な」計算法が見出されている．有名なGroverの探索アルゴリズムでは，N個のデーターから1個のデータを探し出す探索問題が，古典計算では$O(N)$の計算量が必要なのに対して，量子計算では$O(\sqrt{N})$の計算量となっている．

さて，アルゴリズムとは或る規則にしたがって「状態」の移り変わりを規定する点では，一種の力学系と見なせる．Wadati-Miyakeの論文[1]では，Groverの探索アルゴリズムを力学的あるいは幾何学的な視点から捉えている．すなわち，キュビット状態と称される量子状態において位相因子を無視して得られる射線表現の全体が，ちょうど複素射影空間であることを利用し，Groverのアルゴリズムがキュビット状態のなす空間において生成する点列は，複素射影空間のFubini-Study計量に関する或る測地線上に射影されることを示している．本講演では，Wadati-Miyake[1]をひとつの動機として，nキュビット状態として表現されているデータの順序つき配列を探索する量子アルゴリズム探索を考え，その幾何学的な側面と力学的な側面に関して得られた結果を報告する．

順序つきデータ配列の空間(STMQ)上では，自然な左$U(n)$作用を考えることができる．この左$U(n)$作用に関するSTMQの商集合は，順序つき配列の中のnキュビット状態達の「相対的な配置」のなす空間(SRCMQ: Space of relativ-configurations of multi-qubit states)とみなせる．SRCMQの正則部分(SR^{2}CMQ)には，商集合としての構成に沿った自然なRiemann計量‡ を定義できる．さて，順序つきデータ配列を複素行列の形で表現すると，SRCMQは密度行列の集合と同一視でき，量子情報幾何が展開されるステージである．その正則部分としてのSR^{2}CMQには，SLD(Symmetric Logarithmic Derivative)に随伴する量子Fisher計量を定義できる．本講演の主結果のひとつは，上記の流れで定義される自然なRiemann計量とSLD量子Fisher計量とが定数倍を除いて一致することである[2,3]．

こうして，「相対的な配置」のなす空間(の正則部分)は，自然に量子情報幾何構造を有することが明らかになると，その上の力学系には量子情報論的な意味合いが付与される場合が期待できる．本講演の順序つきデータ配列の空間における探索目標は，「相対的な配置」の空間上で定義されるvon Neumannエントロピー，S，が最大値をとる点へと射影されることに着目する．解がこの最大値点に収束していく力学系の典型として，負von Neumannエントロピー，$-S$，をポテンシャルとしSLD量子Fisher計量に随伴する勾配力学系を考察する．この勾配力学系の解は陽に与えることができて，可積分性を示すことができる[2,4]．

* 本稿は数理解析研究所共同研究集会「力学系と微分幾何学」(2006年3月7日-9日)講演予稿に一部加筆したものである．
† 石渡 康恵氏(京大・情報学，日本IBM)，日野英逸氏(京大・情報学，日立)との共同研究に基づいている．
‡ 商集合を与える射影が，Riemann沈めこみになるような計量．

2. 探索アルゴリズムと量子情報幾何

2.1 順序つきデータ配列の探索アルゴリズム (速習)

1キュビット状態とは，2個の基底状態の重ね合わせ，$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$，で表現され[§]，その Hilbert 空間は $\mathbf{C}^2$ と同形である．n キュビット状態を記述する Hilbert 空間は，$\mathbf{C}^2$ の n 個のテンソル積，$(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$ である．我々は n キュビット状態の（順序込みの）並びを探索するので，並びのなす Hilbert 空間として，複素 $2^n\times m$ 行列の空間 $M(2^n,m)$ に内積

$$(\Phi,\Phi')=\frac{1}{m}\mathrm{tr}(\Phi^\dagger\Phi')\quad(\Phi,\Phi'\in M(2^n,m)) \tag{1}$$

を入れてとる．探索目標は，各列が $(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$ の互いに相異なる標準基底ベクトルの $\sqrt{m}$ 倍となる行列 W として表現される．探索開始状態として，全ての成分が $1/\sqrt{2^n m}$ に等しい行列 A をとると，順序つき配列の探索アルゴリズムは，点列

$$\Phi_k=\cos\left((k+\frac{1}{2})\theta\right)\left(\sqrt{\frac{2^n}{2^n-1}}A+\sqrt{\frac{1}{2^n-1}}W\right)+\sin\left((k+\frac{1}{2})\theta\right)W\qquad(k=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

を生成する [2-4]．ただし，$\sin(\theta/2)=1/\sqrt{2^n},\quad\theta\in[0,\pi]$.

2.2 相対的配位のなす空間

量子状態はノルム1の行列であるから，その全体は $S^{2^n m-1}$ と同相であり $M(2^n,m)$ の内積から標準的な Riemann 計量が入る．左 $U(2^n)$-作用，$\Phi=(\phi_1,\cdots,\phi_m)\in S^{2^n m-1}\mapsto g\Phi=(g\phi_1,\cdots,g\phi_m)\in S^{2^n m-1}$ $(g\in U(2^n))$, による同値関係に関する $S^{2^n m-1}$ の商集合はトレース1の非負定値 m 次エルミート行列の全体 P_m と，射影 $\pi_m:\Phi\in S^{2^n m-1}\mapsto(1/m)\Phi^\dagger\Phi\in P_m$ によって同相となる．この商空間は，Wadati-Miyake[1] の単なる一般化ではない点を注意しておく[¶]．P_m を得るための同値関係では配列された m 個の nqubit データを一斉に $g\in U(2^n)$ で動かした状態を同一と見なされるという意味で，P_m は並べられた n キュビットデータ達の「相対的な配置」のなす空間と見なせる．

商空間としての P_m は滑らかではないが，滑らかな部分 $\dot{P}_m$ には，π_m を Riemann 沈めこみにする計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle^R$ が一意的に入る．この計量は，接ベクトル $\Xi\in T_\rho\dot{P}_m$ $(\rho\in\dot{P}_m)$ に対する水平リフト $\ell_\Phi(\Xi)\in T_\Phi\pi_m^{-1}(\dot{P}_m)$ $(\Phi\in\pi_m^{-1}(\rho))$ を

$$\pi_{m*,\Phi}(\ell_\Phi(\Xi))=\Xi,\quad\ell_\Phi(\Xi)\in\ker(\pi_{m*,\Phi})^\perp \tag{3}$$

を満たす唯一の接ベクトルとして定めるとき，

$$\langle\Xi,\Xi'\rangle^R_\rho=(\ell_\Phi(\Xi),\ell_\Phi(\Xi'))_\Phi\quad(\Xi,\Xi'\in T_\rho\dot{P}_m) \tag{4}$$

で定義される．

2.3 相対的配位のなす空間の量子情報幾何構造

上で構成した商空間 P_m は自然に m 次密度行列の全体と見なせるから，SLD 量子 Fisher 計量を以下のように定義できる[‖]．$\dot{P}_m$ の対称化対数微分 (SLD) は，$\rho\in\dot{P}_m$ における接空間を $T_\rho\dot{P}_m$ とするとき，

$$\Xi=\frac{1}{2}(\rho L_\rho(\Xi)+L_\rho(\Xi)\rho)\quad(\Xi\in T_\rho\dot{P}_m) \tag{5}$$

[§] $|0\rangle$, $|1\rangle$ は Dirac 表記に従っており，多くのテキストで用いられている．

[¶] 実際，1データでこの商空間を考えると1点になってしまう．

[‖] 「量子」が冠されるのは，量子統計モデルの空間での Fisher 計量という事情．

で定まる matrix-valued 1-form, $L_\rho : T_\rho \dot{P}_m \to M(m,m)$ として定まる [5]．SLD 量子 Fisher 計量は，L_ρ を用いて

$$\langle \Xi, \Xi' \rangle_\rho^{QF} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\left\{\rho\left(L_\rho(\Xi)L_\rho(\Xi') + L_\rho(\Xi')L_\rho(\Xi)\right)\right\}\right] \quad (\Xi, \Xi' \in T_\rho \dot{P}_m) \tag{6}$$

で定義される．幾何的な考察と，かなり具体的な計算から次を得る．

定理 1 [2,3]　$\dot{P}_m$ において，Riemann 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle^R$ と SLD 量子 Fisher 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle^{QF}$ は，定数倍の違いを除いて一致する．すなわち，

$$\langle \Xi, \Xi' \rangle_\rho^{QF} = 4\langle \Xi, \Xi' \rangle_\rho^R \quad (\Xi, \Xi' \in T_\rho \dot{P}_m). \tag{7}$$

3. 探索アルゴリズムと勾配力学系，可積分性

探索目標 $W \in S^{2^n m-1}$ は，全ての列が $(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$ 互いに相異なる標準基底ベクトルの $\sqrt{m}$ 倍となる行列として表されるので，その射影 $\pi_m(W)$ は m 次単位行列 I_m である。$I_m \in \dot{P}_m$ において，$\dot{P}_m$ 上の von Neumann ノイマンエントロピー

$$S(\rho) = -\mathrm{trace}(\rho \log \rho) \tag{8}$$

が最大値をとることから，I_m に収束する $\dot{P}_m$ 上の点列を作るアイデアとして，$-S(\rho)$ をポテンシャルとする勾配力学系

$$\frac{d\rho}{dt} = -(\mathrm{grad}(-S))(\rho) \tag{9}$$

を考える。ここで，勾配作用素 grad は，SLD 量子 Fisher 計量に随伴して

$$\langle (\mathrm{grad}(-S))(\rho), \Xi \rangle_\rho^{QF} = d(-S)_\rho(\Xi) \quad (\Xi \in T_\rho \dot{P}_m) \tag{10}$$

定められる．幾何的なテクニックを使うことで，勾配方程式の陽な表示として

$$\dot{\rho} = \rho\Big((\mathrm{trace}(\rho \log \rho))I_m - \log \rho\Big) \tag{11}$$

が得られる。$\rho(t) \in \dot{P}_m$ を，$\rho(t) = h(t)\Delta(t)h(t)^\dagger$ $(h(t) \in U(m),\ \Delta(t) = \mathrm{diag}(\delta_1(t), \cdots, \delta_m(t)))$ と表すとき，(11) の初期値問題の解として

$$\rho(t) = h(0)\left\{\mathrm{trace}\Big((\Delta(0))^{e^{-t}}\Big)\right\}^{-1}(\Delta(0))^{e^{-t}}h(0)^\dagger \tag{12}$$

を得る。(12) から，不変量として $h(t)$ と

$$\frac{\log(\delta_{j+2}(t)/\delta_{j+1}(t))}{\log(\delta_{j+1}(t)/\delta_j(t))} \quad (j = 1, 2, \cdots, m-1) \tag{13}$$

が得られる。

定理 2 [2,4]　負のフォン・ノイマンエントロピー $-S(\rho)$ をポテンシャルとし，SLD 量子 Fisher 計量に関する勾配力学系 (9) は，自由度より 1 小さい個数の独立な保存量を持つという意味で可積分である。

4 いくつかの注意

勾配方程式 (9) は量子統計多様体上の力学系であるが，その解 (12) のスペクトル変形部分が，実は多項分布族のなす (古典) 統計モデル空間上の或る可積分な勾配系の解 [6] と一致しているという興味深い発見も得られている [2,4].

m 個の確率変数に対する多項分布

$$p_\theta(x) = \frac{\ell!}{x_1! \cdots x_m!}(\theta_1)^{x_1} \cdots (\theta_m)^{x_m} \tag{14}$$

のパラメータ θ のなす空間 $Q_m = \left\{\theta \in [0,1]^m \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} \theta_j = 1\right\}$ には，Fisher 情報行列を計量テンソルとする[§] Riemann 計量を導入できる．この計量には計量ポテンシャルが存在し，それは分布 $p_\theta(x)$ に随伴する負エントロピー $\psi(\theta) = m\sum_{j=1}^{m} \theta_j \log \theta_j$ に等しい [6]. $\psi(\theta)$ をポテンシャル関数とする Q_m 上の勾配系の解は，ちょうど (12) のスペクトル変形部分と一致する．Nakamura の方法 [6] を一般化により，勾配方程式 (9) の Lax 表示を得る試みも進行中である．

$S^{2^n m-1}$ 上の 1 階微分方程式で，(11) を何らかの意味で「持ち上げたもの」についても研究中である。こちらが，アルゴリズムとしては本題であろう。

参考文献

[1] M.Wadati and A.Miyake, Phys. Rev. A, **64**, 042317 (2001).

[2] Y.Uwano, H.Hino and Y.Ishiwatari, nlin.SI/0512004: Phys. Atom. Nuclei, **69**, *to appear.*

[3] Y.Uwano, H.Hino and Y.Ishiwatari, in preparation.

[4] Y.Uwano, Y.Ishiwatari and H.Hino, in preparation.

[5] A.Fujiwara and H.Nagaoka, Phys. Lett. A, **201**, 119 (1995).

[6] Y.Nakamura, Japn J. Indust. Appl. Math., **19**, 179 (1993).

[§] 座標 (θ_j) に関する計量テンソル．