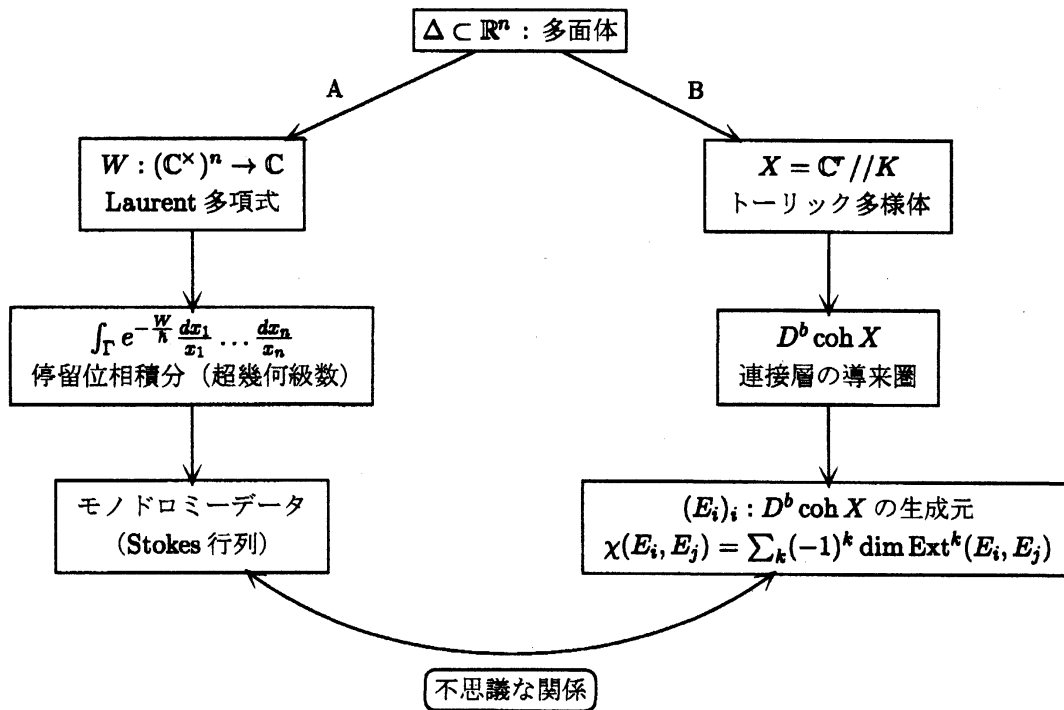


Mirror Symmetry and Monodromy of Hypergeometric Series

大阪大学大学院理学研究科 植田 一石 (Kazushi Ueda)
Graduate School of Science,
Osaka University

正の整数 n を1つ選んで固定する。 \mathbb{R}^n の部分集合 Δ で、 \mathbb{Z}^n の有限部分集合の凸包として得られるものをここでは多面体と呼ぶことにする。また、多面体は必ず原点を内点に含むと仮定する。そのような多面体に対し、2つの方法で幾何的な対象を対応させることができる: 1つは Δ を Newton 多面体として持つ Laurent 多項式 W を1つ選び、これを代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ の上の正則関数と思ってその臨界点や消滅サイクル、停留位相積分などを考えるという方法であり、もう1つは Δ の頂点の座標を使って代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{n+r}$ のアフィン空間への作用を定め、それによる商空間を考えるという方法である。これらは多面体から (広い意味での) トーリック多様体を作る2つの双対な方法 (多面体の方法と扇の方法) に対応しているが、これらの間の不思議な関係が今回の主題であり、模式的に表すと次のようになる:



A 側に現われる停留位相積分は \hbar の関数として無限遠に確定特異点を、原点に不確定特異点を持つ微分方程式を満たし、その原点におけるモノドロミーとして Stokes 行列が定義される。一方、B 側に現われるトーリック多様体の接続層の導来圏は完備例外列と呼ばれる三角圏とし

での良い生成元を持つが [14], それらの間の Ext の Euler 数が A 側における Stokes 行列と一致するというのが予想である. これはもともと Cecotti-Vafa [6] に由来し, Kontsevich や Zaslow [28], Dubrovin [8, 9], Guzzetti [12], 田邊 [24], 筆者 [25, 26, 27] 等によって研究された.

注意 1. この A, B という呼び方は位相的弦理論の A 模型, B 模型を意識しているが, 完全に一致しているわけではない. 本来 A 模型, B 模型という呼び方は 2 次元で $N=2$ の超対称性を持つ場の理論から位相的場の理論を作る 2 通りの方法を指しており, 大まかに言うと A 模型がシンプレクティック幾何に, B 模型が複素幾何に対応しているのだが, 上で言う A 側の停留位相積分は複素幾何的な対象である. にもかかわらずこちらを A 側と呼ぶのは, そこで着目するのが停留位相積分自身ではなくそのモノドロミーであり, このモノドロミーは Picard-Lefschetz 理論によって消滅サイクルの交点数から決まるからである; 消滅サイクルは Milnor ファイバーの中間次元のサイクル (実は Lagrange 部分多様体) であって, シンプレクティック幾何的な対象である. 一方, B 側で我々が今回注目するのはトーリック多様体の接続層の導来圏であり, これは複素幾何的な対象である. しかし, 古典的なミラー対称性では X 側で Gromov-Witten 不変量と呼ばれるシンプレクティック幾何的な不変量を考えるのが普通なので, その場合はこちらが A 模型になる. 術学的な言い方をすると, 古典的ミラー対称性で考えるのは閉じた弦の理論であり, 一方今回の話題の背後には開いた弦 (あるいは D プレーン) の理論であるホモロジー的ミラー対称性がある. 超幾何級数のモノドロミーを考える際には古典的ミラー対称性とホモロジー的ミラー対称性で A 模型と B 模型が入れ替わるのである. 一方, Kontsevich のもともとのプログラム [15] における古典的ミラー対称性とホモロジー的ミラー対称性の関係においては A 模型と B 模型は保たれる.

それでは上の図の A, B 双方について詳しく説明しよう. まず A 側を議論する. Euler, Gauss, Appell, Lauricella, Horn 等による古典的な超幾何関数の一般化として, Gelfand, Kapranov および Zelevinski は A 超幾何関数の概念を導入した [11]. ここで, \mathcal{A} は \mathbb{Z}^{n+1} の有限部分集合である. 彼らにちなんでこの A 超幾何関数は GKZ 超幾何関数と呼ばれることも多い. 今回考察するのはこの A 超幾何関数の近い親戚にあたる超幾何型の関数のモノドロミーである. まず, 与えられた多面体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ に対し, Δ に含まれる格子点の集合を $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^n$ とおき, これを \mathbb{Z}^{n+1} に埋め込んで第 $n+1$ 方向に 1 だけ平行移動したものを \mathcal{A} とおく; $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} \times \{1\}$. 次に, ベクトル空間 $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ を

$$\mathbb{C}^{\mathcal{A}} = \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{A}} a_{\omega} x^{\omega} \mid a_{\omega} \in \mathbb{C} \right\}$$

で定義する. ここで, $\omega = (a_1, \dots, a_n, 1) \in \mathcal{A}$ に対し,

$$x^{\omega} = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$$

とおいた. この $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ が超幾何関数の定義域になる. $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ の元 W は n 変数の Laurent 多項式であり, 代数的トーラス $(\mathbb{C}^{\times})^n$ 上の関数を定める. W を一般に取って, W の臨界点が全て非退化であると仮定する. すると Kouchnirenko の定理 [17] によって, W の臨界点の個数 N は Δ の体積と等しい. ただし, 体積を測るときに n 単体の体積を 1 とおくことにする. この W の臨界点に番号を付けて p_1, \dots, p_N とおく. さらに, W を一般に取って臨界値たち $W(p_1), \dots, W(p_N)$ は相異なると仮定する. この状況で, $\hbar \in \mathbb{C}^{\times}$ に対し $\Re e(W/\hbar)$ は Morse 関数になり, 任意の $i = 1, \dots, N$ に対し W の臨界点 p_i はこの Morse 関数の指数 n の臨界点になる. $(\mathbb{C}^{\times})^n$ に完備な Kähler 計量を入れて, p_i から始まる $\Re e(W/\hbar)$ の不安定多様体 (つまり, $\Re e(W/\hbar)$ の勾配

ベクトル場で流したときに、時間が $-\infty$ での極限が p_i になるような点の集合) を $\Gamma_i(\hbar; W)$ とおくと、これは n 次元の円盤に同相な $(\mathbb{C}^\times)^n$ のサイクルになる。

$\Gamma_i(\hbar; W)$ の様子を理解するために局所的なモデルを取ろう。臨界値 p_i が非退化なので、Morse の補題 (の正則版) により、 p_i を中心とする局所座標 z_1, \dots, z_n をうまく取って、

$$W = W(p_i) + z_1^2 + \dots + z_n^2$$

となるようにできる。Kähler 計量としては p_i の周りで Kähler 形式が

$$\omega = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{z}_n)$$

となるものを取ろう。すると、不安定多様体は

$$\Gamma(\hbar; W) = \{(z_1, \dots, z_n) \mid t \in W(p_i) + \hbar\mathbb{R}^{\leq 0}, W(p_i) + z_1^2 + \dots + z_n^2 = t, \arg(z_1^2) = \dots = \arg(z_n^2)\}$$

となる。これは臨界値 $W(p_i)$ から始まる傾き $-\arg(\hbar)$ の半直線上の点 t でパラメーター付けられた $n-1$ 次元球面

$$C_i(t; W) = \{W(p_i) + z_1^2 + \dots + z_n^2 = t, \arg(z_1^2) = \dots = \arg(z_n^2)\}$$

の合併集合であり、 $C_i(t; W)$ の半径は t が $W(p_i)$ に近づくにつれて小さくなって、 $t = W(p_i)$ で1点に潰れる。その様子を描いたものが図1である。臨界値の上のファイバーは特異な2次超曲面であり、その近くの正則値の上のファイバーはそれを変形した滑らかな2次超曲面である。滑らかなファイバーの上の点線で書かれたサイクルは、特異ファイバーまで平行移動すると潰れるサイクル $C_i(t; W)$ であり、位相的には $n-1$ 次元球面と同相になっている。この $C_i(t; W)$ を p_i における消滅サイクルと呼び、これを $W(p_i)$ から出て $\Re e[W/\hbar]$ が小さくなる向きに伸びる半直線に沿って並べたものが $\Gamma_i(\hbar; W)$ である (図2)。

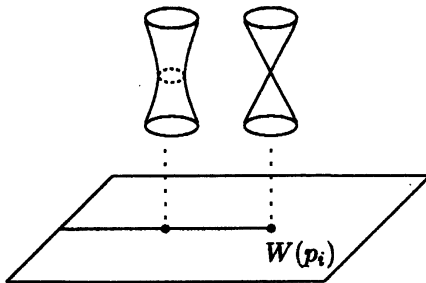


図 1: $W(p_i)$ の近くでの W のファイバー

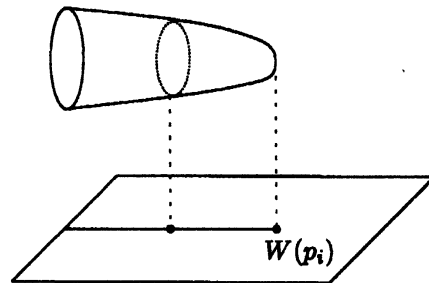


図 2: p_i に対する不安定多様体 $\Gamma_i(\hbar; W)$

この $\Gamma_i(\hbar; W)$ を使って、

$$I_i(\hbar; W) = \int_{\Gamma_i(\hbar; W)} e^{\frac{i}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

とおく。これは停留位相積分 (stationary-phase integral) と呼ばれ、消滅サイクルの上の周期積分

$$\Pi_i(t; W) = \int_{C_i(t; W)} \omega$$

と Laplace 変換

$$I_i(\hbar; W) = \int_{W(\Gamma_i(\hbar; W))} e^{\frac{1}{\hbar} \Pi_i(t; W)} dt$$

で結ばれている。ただし、 ω は Gelfand-Leray 形式と呼ばれ、

$$\omega \wedge dW = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

を満たす $n-1$ 形式を表す。また、 $0 \in \Delta$ と仮定したので、 $\Pi(t; W)$ の t 依存性は a_0 依存性に吸収できる：

$$\Pi(t; W) = \Pi(0; W - t).$$

$I_i(\hbar; W)$ は $\hbar \in \mathbb{C}^\times$ と $W \in \mathbb{C}^A$ の関数であり、 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^A$ の一般の点では解析的であるが、特別な \hbar や W において不連続に変化する。例えば、一般の $W \in \mathbb{C}^A$ を固定して、 $I_i(\hbar; W)$ を $\hbar \in \mathbb{C}^\times$ の関数と見よう。この時、 W の臨界点 p_i に対し、複素平面上で $W(p_i)$ から始まって $\arg(-\hbar)$ の向きに伸びる半直線が $\Gamma_i(\hbar; W)$ の W による像であり、この半直線が i と異なる j に対して $W(p_j)$ を横切るとき、 $I_i(\hbar; W)$ は \hbar の関数として不連続に変化する。これが $I_i(\hbar; W)$ を解析接続して得られる超幾何関数のモノドロミーの由来であり、後で見るように Picard-Lefschetz 理論により統制されている。

さて、 $I_i(\hbar; W)$ の満たす微分方程式を議論しよう。 $I_i(\hbar; W)$ は $\hbar \in \mathbb{C}^\times$ と $W \in \mathbb{C}^A$ の関数であるが、積分の測度

$$\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

がトーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ の \mathbb{C}^n への自然な作用

$$(\mathbb{C}^\times)^n \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)$$

で不変なので、任意の $i = 1, \dots, N$ と $j = 1, \dots, n$ に対し、 $I_i(\hbar; W)$ は $(a_\omega)_{\omega \in A}$ を $(\alpha_j^{i_j} a_\omega)_{\omega \in A}$ に置き換える変換で不変である。この変換の生成作用素は

$$Z_j = \sum_{\omega \in A} \omega_j a_\omega \frac{\partial}{\partial a_\omega}$$

であり、従って $I_i(\hbar; W)$ は微分方程式

$$Z_j I_i(\hbar; W) = 0 \tag{1}$$

を満たすことが分かる。さらに、 A の関係式の集合 Λ を

$$\Lambda = \{(l_\omega)_\omega \in \mathbb{Z}^A \mid \sum_{\omega \in A} l_\omega \omega = 0\}$$

で導入し、 $l = (l_\omega)_\omega \in \Lambda$ に対し

$$\square_l = \prod_{\omega: l_\omega > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_\omega} \right)^{l_\omega} - \prod_{\omega: l_\omega < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_\omega} \right)^{-l_\omega}$$

と定義すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_\omega} I_i(\hbar; W) &= \int_{\Gamma_i(\hbar; W)} \frac{\partial}{\partial a_\omega} e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \int_{\Gamma_i(\hbar; W)} \frac{x^\omega}{\hbar} e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}\end{aligned}$$

なので, 任意の $i = 1, \dots, N$ に対し, $I_i(\hbar; W)$ は

$$\square_l I_i(\hbar; W) = 0, \quad l \in \Lambda \quad (2)$$

を満たす.

一般に, 有限集合 $\mathcal{A} \subset \mathbf{Z}^n \times \{1\} \subset \mathbf{Z}^{n+1}$ とベクトル $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ が与えられて, $i = 1, \dots, n+1$ に対し,

$$Z_i = \left(\sum_{\omega \in \mathcal{A}} \omega_i a_\omega \frac{\partial}{\partial a_\omega} \right) - \beta_i,$$

また, \mathcal{A} の元の間関係 $l \in \Lambda$ に対し

$$\square_l = \prod_{\omega: l_\omega > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_\omega} \right)^{l_\omega} - \prod_{\omega: l_\omega < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_\omega} \right)^{-l_\omega}$$

と定義したとき, \mathcal{A} 超幾何微分方程式とは以下の微分方程式を指す:

$$\begin{aligned}Z_i \Phi &= 0, & i = 1, \dots, n+1, \\ \square_l \Phi &= 0, & l \in \Lambda.\end{aligned}$$

従って, 任意の $i = 1, \dots, N$ に対し, $I_i(\hbar; W)$ は $\beta = 0$ に対する \mathcal{A} 超幾何微分方程式のうち

$$Z_{n+1} I_i(\hbar; W) = 0$$

以外の全ての方程式を満たすことが分かる. 実は, $I_i(\hbar; W)$ を Laplace 逆変換した $\Pi_i(t; W)$ は $\beta = (0, \dots, 0, -1)$ に対する \mathcal{A} 超幾何微分方程式を満たす. 実際, $\Pi_i(t; W)$ は $I_i(\hbar; W)$ と同じく $(\mathbf{C}^\times)^n$ の作用で不変であり, しかも全ての a_ω を α 倍すると, W は α 倍になり, それに伴って Gelfand-Leray 形式は α^{-1} 倍される. 一方, 消滅サイクルは W を定数倍しても変わらないので, 結局

$$\Pi_i(\alpha t; \alpha W) = \alpha^{-1} \Pi_i(t; W)$$

となり, その無限小部分が

$$Z_{n+1} \Pi(t; W) = -\Pi(t; W)$$

を与える.

さて,

$$I_i(\hbar; W) = \int_{W(\Gamma_i(\hbar))} e^{\frac{1}{\hbar} W} \Pi_i(t; W) dt$$

であるので, この $\Pi_i(t; W)$ の同次性は $I_i(\hbar; W)$ の \hbar 依存性に反映されるはずである. 実際, 変数 \hbar と x_i , $i = 1, \dots, n$ に次数 1 を, 変数 a_ω , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathcal{A}$ に次数 $\deg(a_\omega) = 1 - \omega_1 - \dots - \omega_n$ を与えると, W/\hbar は次数が零の同次多項式になるので, 任意の $i = 1, \dots, N$ に対し

$$\left[\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} + \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \deg(a_\omega) a_\omega \frac{\partial}{\partial a_\omega} \right] I_i(\hbar; W) = 0 \quad (3)$$

が成り立つ. この微分方程式 (3) は \hbar 方向だけでなく W 方向の微分も含んでいるが, 実は次のようにして \hbar に関する常微分方程式 (つまり, W 方向の微分を含まない) で, 原点に不確定特異点, 無限遠に確定特異点を持つものに置き換えることができる. まず, $\partial\Gamma = \emptyset$ なるサイクル Γ と $i = 1, \dots, n$, それに $h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ に対し, 部分積分によって,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} h(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial W}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\Gamma} \hbar \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]/(\partial W)$ の完全代表系 $(f_i(x_1, \dots, x_n))_{i=1}^N$ を 1 つ選んで

$$I_{i,j}(\hbar; W) = \int_{\Gamma_j(\hbar; W)} f_i(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\wedge dx_n}{x_n}$$

とおけば, 任意の $h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ に対し, 積分

$$\int_{\Gamma_j(\hbar; W)} h(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{1}{\hbar} W(x_1, \dots, x_n)} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\wedge dx_n}{x_n}$$

は $(I_{i,j}(\hbar; W))_{i=1}^N$ の (\hbar と W の関数を係数とした) 線形結合で表すことができる. ここで, (∂W) は Jacobi イデアルと呼ばれ,

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

で生成される $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ のイデアルを表す. $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]/(\partial W)$ は Jacobi 環と呼ばれ, その Spec は W の臨界点の集合になる. 特に, 今の状況では Kouchnirenko の定理により W の臨界点は Δ の体積 N と同じ個数の点からなるので, Jacobi 環の次元も有限の値 N になる. 従って, 単独の $I_j(\hbar; W)$ を考えるのではなく, $I_{i,j}(\hbar; W)$ を並べたベクトル $(I_{i,j}(\hbar; W))_{i=1}^N$ を考えると, このベクトルに対する W 方向の微分作用素の作用は W と \hbar の関数を係数とする行列で表すことができる. このようにして, 微分方程式 (3) は \hbar に関する常微分方程式に書き直せるが, 実は斎藤恭司による原始形式の理論 [20] から, Jacobi 環の代表元 $(f_\alpha(x_1, \dots, x_n))_{\alpha=1}^N$ をうまく取って, この微分方程式が

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \hbar} I_{i,j}(\hbar; W) = \sum_{k=1}^N [A_0(W)_{i,k} + \hbar A_\infty(W)_{i,k}] I_{k,j}(\hbar; W) \quad (4)$$

となるようにできることが分かる [3, 7, 21]. ここで, $A_0(W)$, $A_\infty(W)$ は \hbar によらない N 次の正方行列で, $A_\infty(W)$ は対角化可能である. さらに, 一般の W に対し $A_0(W)$ は対角化可能で, その固有値の集合は W の臨界値の集合に等しい. 以下, そのような W を 1 つ固定して考える. 原点を通る直線

$$l = \{\hbar \in \mathbb{C}^\times \mid \arg(\hbar) = \phi, \phi - \pi\}$$

は, 任意の $i \neq j$ に対し, $W(p_i)$ と $W(p_j)$ を通る直線が l と直交していないとき, 許容できる (admissible) と言われる. 許容できる直線 l に対し, 十分小さな実数 $\epsilon > 0$ を取って, 原点を

通り, l とのなす角が $-\epsilon$ から $+\epsilon$ の間にある全ての直線が許容できるようにできる. そのような直線を 1 つ選んで,

$$\begin{aligned} D_r &= \{z \in \mathbb{C} \mid \phi - \pi - \epsilon < \arg(z) < \phi + \epsilon\}, \\ D_l &= \{z \in \mathbb{C} \mid \phi - \epsilon < \arg(z) < \phi + \pi + \epsilon\}, \\ D_- &= \{\hbar \in \mathbb{C}^\times \mid \phi - \pi - \epsilon < \arg(\hbar) < \phi - \pi + \epsilon\}. \end{aligned} \quad (5)$$

と定義する (図 3).

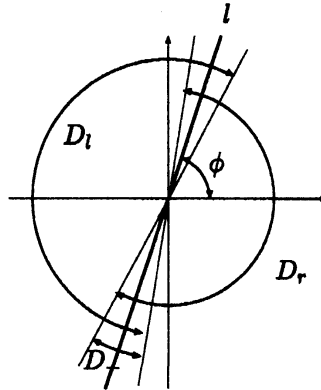


図 3: 角領域

補題 2 ([9, Lemma 4.3]). 微分方程式 (4) の形式基本解 $I_{\text{formal}}(\hbar)$ で,

$$\begin{aligned} I_{\text{formal}}(\hbar) &= R(\hbar)e^{\frac{U}{\hbar}}, \\ R(\hbar) &= (1 + R_1\hbar + R_2\hbar^2 + \dots), \\ R^T(-\hbar)R(\hbar) &= 1 \end{aligned}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する. ここで, U は臨界値を成分に持つ対角行列 $U = \text{diag}(W(p_1), \dots, W(p_N))$ で, \bullet^T は行列の転置を表す.

微分方程式 (4) が原点で不確定特異点を持つので, この形式解 $I_{\text{formal}}(\hbar)$ は収束しない. しかし, 角領域 D_r と D_l でそれぞれ定義された真の解 $Y_r(\hbar)$ と $Y_l(\hbar)$ で, 各々の定義域において形式解 $I_{\text{formal}}(\hbar)$ に漸近するものがただ 1 つ存在する:

$$I_{r/l}(\hbar) \sim I_{\text{formal}}(\hbar) \quad \text{as } \hbar \rightarrow 0 \text{ in } D_{r/l}.$$

これら二つの真の解は共通の定義域 D_- において同一の線形微分方程式を満たすので, 線形変換で互いに移り合う:

$$I_l(\hbar) = I_r(\hbar)S, \quad \hbar \in D_-.$$

この行列 S を Stokes 行列という [9].

この Stokes 行列は次のようにして消滅サイクルの交叉形式から定まることが分かる: \hbar 平面上の局所系で, $\hbar \in \mathbb{C}^\times$ 上のファイバーが相対ホモロジー群 $H_n((\mathbb{C}^\times)^n, \Re e(W/\hbar) \ll 0; \mathbb{Z})$ であるようなものを考える. D_l と D_r におけるこの局所系の切断の組 $\{\Gamma_{i,l}(\hbar)\}_{i=1}^N$ と $\{\Gamma_{i,r}(\hbar)\}_{i=1}^N$

を、それぞれ $\hbar = \exp[(\phi + \pi/2)\sqrt{-1}]$ と $\hbar = \exp[(\phi - \pi/2)\sqrt{-1}]$ における値が不安定多様体の代表するホモロジー類に一致するものとして定める；

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,l}(\exp[(\phi + \pi/2)\sqrt{-1}]) &= [\Gamma_i(\exp[(\phi + \pi/2)\sqrt{-1}])], \\ \Gamma_{i,r}(\exp[(\phi - \pi/2)\sqrt{-1}]) &= [\Gamma_i(\exp[(\phi - \pi/2)\sqrt{-1}])].\end{aligned}$$

D_l と D_r が単連結なので、これらの条件は $\Gamma_{i,l}(\hbar)$ と $\Gamma_{i,r}(\hbar)$ を一意的に定める。図4は $\Gamma_i(\hbar)$

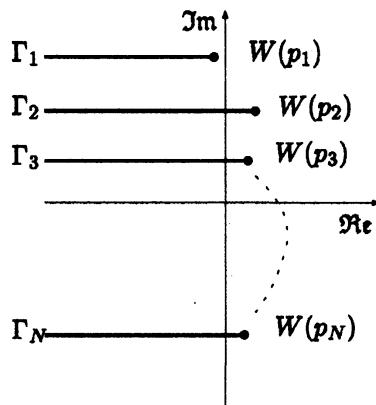


図4: $\hbar = 1$ での被積分サイクル

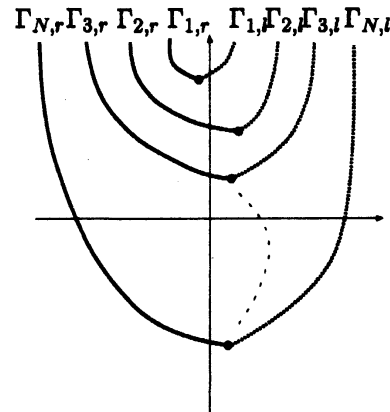


図5: $\hbar = -\sqrt{-1}$ での被積分サイクル

の $\hbar = 1$ における W による像であり、図5は $\Gamma_{i,l}(\hbar)$ と $\Gamma_{i,r}(\hbar)$ (の代表元) の $\hbar = -\sqrt{-1}$ における W による像である。ここで、虚軸 $\Re e(\hbar) = 0$ は許容線であるとした。 $I_{i,j,l}(\hbar)$ と $I_{i,j,r}$ をそれぞれ $\Gamma_{j,l}(\hbar)$ および $\Gamma_{j,r}(\hbar)$ を被積分サイクルとする積分で定義すると、停留位相近似 (鞍点法) によって、それらはそれぞれの定義域において $\arg \hbar$ を固定したまま $\hbar \rightarrow 0$ とする極限で、

$$I_{i,j,l/r}(\hbar; W) \sim \pi^{\frac{1}{2}} \frac{f_i(p_{j,1}, \dots, p_{j,n}; \hbar)}{p_{j,1} \cdots p_{j,n}} \left[\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_l \partial x_m}(p_j) \right)_{l,m} \right]^{-\frac{1}{2}} (1 + O(\hbar)) e^{\frac{1}{\hbar} W(p_j)} \quad (6)$$

という漸近挙動を示す。ただし、臨界点 p_j の座標を $p_j = (p_{j,1}, \dots, p_{j,n}) \in (\mathbb{C}^x)^n$ とおいた。ここで大事なのは、 $\Re e(W(p_i)/\hbar) > \Re e(W(p_j)/\hbar)$ ならば

$$e^{\frac{W(p_i)}{\hbar}} (1 + O(\hbar)) + e^{\frac{W(p_j)}{\hbar}} (1 + O(\hbar)) \sim e^{\frac{W(p_i)}{\hbar}} (1 + O(\hbar)) \quad \text{as } \hbar \rightarrow 0$$

だという事である。作り方からこの漸近展開も微分方程式(4)の形式解を与えるので、必要に応じて f_i を定数倍すれば補題2にある形式解 $Y_{\text{formal}}(\hbar)$ を与える。すなわち、 $I_{i,j,r}(\hbar; W)$ と $I_{i,j,l}(\hbar; W)$ は、それぞれ D_r と D_l を定義域とし、形式解 $Y_{\text{formal}}(\hbar)$ に漸近する真の解である。従って Stokes 行列はこれらの2つの停留位相積分の間の変換行列で与えられるが、被積分関数が一価なので、この変換行列は結局2組のサイクル $(\Gamma_{i,l}(\hbar))_{i=1}^N$ と $(\Gamma_{i,r}(\hbar))_{i=1}^N$ の変換行列で与えられる。有名な Picard-Lefschetz 理論 (例えば [1] を見よ) によって、この変換行列は消滅サイクルの交点数で与えられる：

$$\Gamma_{i,l}(\hbar) = \Gamma_{i,r}(\hbar) - (C_{i-1}, C_i) \Gamma_{i-1,r}(\hbar) - \cdots - (C_1, C_i) \Gamma_{1,r}(\hbar).$$

ここから, Stokes 行列が

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ -(C_i, C_j) & \text{if } i < j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

で与えられることが従う.

次に B 側を議論する. Δ の頂点の集合を $\{v_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{Z}^n$ とおき, $\phi: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^n$ を, i 番目の標準基底 $e_i \in \mathbb{Z}^k$ を v_i に送る準同型として定義する. この準同型に \mathbb{C}^\times をテンソルしたものを $\phi_{\mathbb{C}^\times}: (\mathbb{C}^\times)^k \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^n$ と呼び, $K = \text{Ker} \phi_{\mathbb{C}^\times}$ とおくと, $K \subset (\mathbb{C}^\times)^k$ は \mathbb{C}^k に自然に作用する. 次に, $\{0, v_1, \dots, v_k\}$ を頂点の集合とするような Δ の単体分割 Σ を 1 つ選んで固定する. この時, Δ の頂点の集合 $S = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ が原始的集合 (primitive collection) であるとは, S を含む Σ の単体は存在しないが, S から任意の 1 つの元を取り除いた集合は必ず Σ のどれかの単体に含まれることを指す. この状況で, \mathbb{C}^k の部分集合 Z を

$$Z = \{x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \mid \text{ある原始的集合 } S \text{ が存在して, } v_i \in S \text{ ならば } x_i = 0\}$$

で定め, $\mathbb{C}^k \setminus Z$ の K によるスタック論的な商を X とおく:

$$X = [(\mathbb{C}^k \setminus Z)/K].$$

X は Δ だけでなく, Δ の単体分割 Σ にも依存することに注意.

さて, 射影的トーリック多様体や Grassmann 多様体を含む特別なクラスの多様体に対しては, 以下で定義される完備例外列 (full exceptional collection) と呼ばれる非常に特別な性質を持った接続層の導来圏の三角圏としての生成元が存在することが知られている [4, 13, 14, 18, 19]:

定義 3. 1. 三角圏の対象 E は以下を満たすとき例外的 (exceptional) と呼ばれる:

$$\text{Ext}^i(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, \\ 0 & i \neq 0. \end{cases}$$

2. 三角圏の対象の順序集合 $(E_i)_{i=1}^N$ が例外列 (exceptional collection) であるとは, 全ての E_i が例外的で, $\text{Ext}^k(E_i, E_j) = 0$ が任意の $i > j$ と k に対して成り立つことを指す.
3. 三角圏の例外列 $(E_i)_{i=1}^N$ が完備 (full) であるとは, $\{E_i\}_{i=1}^N$ を含む最小の三角充満部分圏が全体と同値であることを指す.

三角圏の対象 E と F に対し, その Ext の Euler 数を

$$\chi(E, F) = \sum_k (-1)^k \dim \text{Ext}^k(E, F)$$

とおくと, $\chi(E, F)$ は E と F の K 群における類にしか依らない. この χ が定める K 群の上の双線形形式を Euler 形式と呼ぶ. 次の予想は半単純な量子コホモロジーを持つ射影多様体の接続層の導来圏と, 対応する超幾何級数の Stokes 行列の関係に関して, Cecotti-Vafa [6] や Kontsevich, Zaslow [28] 等の研究に基づいて Dubrovin が 1998 年の国際数学会議で提出した予想 [8, Conjecture 4.2.2] を多面体 Δ の言葉で書き直したものであり, 今回の主題である:

予想 4. 多面体 Δ に対し, その適当な単体分割 Σ と対応するスタック X の接続層の導来圏 $D^b \text{coh } X$ の完備例外列 $(E_i)_{i=1}^N$ で, その Euler 形式の Gram 行列が停留位相積分を \hbar の関数と見たときの原点における Stokes 行列 S と一致するものが存在する:

$$S_{ij} = \chi(E_i, E_j).$$

今の場合, Stokes 行列は (7) によって消滅サイクルの交点数で与えられるので, 上の予想は次の等式に帰着される; $i < j$ に対し,

$$-(C_i, C_j) = \chi(E_i, E_j). \quad (8)$$

以下ではこの等式が成立する具体例をいくつか挙げる. まず, 最も単純な 1 次元の場合を考えよう. この時, 任意の多面体 Δ で原点を内点に含むものは適当な正の整数 p と q を用いて $\Delta = [-p, q] \subset \mathbb{R}$ と表せ,

$$\begin{array}{ccc} \phi: & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & \cup & & \cup \\ & (a, b) & \mapsto & -pa + qb \end{array}$$

となる. 従って

$$\begin{array}{ccc} \phi_{\mathbb{C}^\times}: & (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & \cup & & \cup \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha^{-p}\beta^q \end{array}$$

となり,

$$K = \{(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \alpha^p = \beta^q\}$$

である. Δ の単体分割は 1 通りしかなく, 対応する Z は

$$Z = (0, 0) \subset \mathbb{C}^2$$

となる. ここで, $m = \gcd(p, q)$, $p = mp'$, $q = mq'$ とおくと, $K \cong \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ であり, それぞれの成分の \mathbb{C}^2 への作用は

$$\mathbb{C}^\times \ni \lambda: (x, y) \mapsto (\lambda^{q'} x, \lambda^{p'} y)$$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \ni [1]: (x, y) \mapsto (x, \zeta_m y)$$

となる. ただし, $\zeta_m = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ とおいた. 従って, この時

$$X = [\mathbb{P}^1(p', q') / (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})]$$

となる. ただし, $\mathbb{P}^1(p', q') = [\mathbb{C}^2 / \mathbb{C}^\times]$ は重み (p', q') の重み付き射影空間である.

ここで簡単のために $p' = q' = 1$ の場合に制限する. この時, $\Delta = [-m, m]$ であり,

$$X = [\mathbb{P}^1 / (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})]$$

である. $i = 0, \dots, m-1$ に対し, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の既約表現 ρ_i を $\rho_i([1]) = \exp[2i\pi\sqrt{-1}/m]$ で定義する. Beilinson [4] によって $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$ は $D^b \text{coh } \mathbb{P}^1$ の完備例外列なので,

$$(\mathcal{O} \otimes \rho_0, \dots, \mathcal{O} \otimes \rho_{m-1}, \mathcal{O}(1) \otimes \rho_0, \dots, \mathcal{O}(1) \otimes \rho_{m-1})$$

は

$$D^b \text{coh } X = D^b \text{coh}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\rho_0 \oplus \rho_1)$$

の完備例外列であり、それらの間の零でない Ext は

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{O} \otimes \rho_i, \mathcal{O} \otimes \rho_j) &= \begin{cases} \mathbb{C} & i = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &= \text{Hom}(\mathcal{O}(1) \otimes \rho_i, \mathcal{O}(1) \otimes \rho_j) \\ \text{Hom}(\mathcal{O} \otimes \rho_i, \mathcal{O}(1) \otimes \rho_j) &= \begin{cases} \mathbb{C} & i = j \text{ or } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。一方、A 側に現われる停留位相積分は

$$I_i(\hbar; a_{-m}, \dots, a_m) = \int_{\Gamma_i(\hbar; a_{-m}, \dots, a_m)} e^{-\frac{1}{\hbar}(\frac{a_{-m}}{x^m} + \dots + a_m x^m)} \frac{dx}{x}$$

である。我々が興味があるのは I_i の \hbar に関するモノドロミーであり、これは一般の $W \in \mathbb{C}^A$ の取り方によらないので、 a_{-m}, \dots, a_m は一般の元を 1 つ選んで固定して良い。そこで、

$$W = x^m - \frac{1}{x^m}$$

とおくと、 W の臨界点は -1 の $2m$ 乗根の集合になる。臨界値は $\pm 2\sqrt{-1}$ であり、異なる臨界点に対応する臨界値が一致するという点でこの W の取り方は一般ではないが、これはモノドロミーの計算には何ら問題を起こさない。なぜなら、臨界点は全て非退化であり、また、同じ臨界値を持つ臨界点に対応する消滅サイクルは互いに交わらないからである。この W の $t \in \mathbb{C}$ におけるファイバーは

$$W^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{C}^\times \mid x^m - \frac{1}{x^m} = t\}$$

である。ここで $X = x^m$ とおくと、 $X - X^{-1} = t$ より

$$X = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

である。 t を 0 から $\pm\sqrt{-2}$ に向かう線分に沿って動かした時の X の振る舞いはそれぞれ図 6 および図 7 のようになり、対応する x の振る舞いはこの m 乗根で与えられる (図 8, 図 9)。

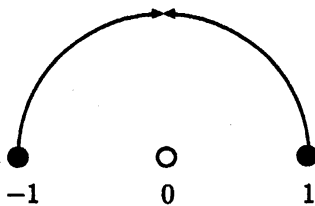


図 6: $t \rightarrow \sqrt{-2}$ での X の振る舞い

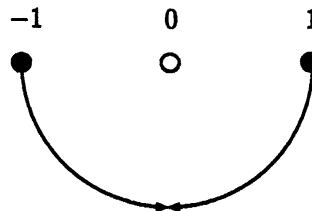


図 7: $t \rightarrow -\sqrt{-2}$ での X の振る舞い

これから、 $t = 0$ におけるファイバー $W^{-1}(0)$ のサイクルで、 $t = 2\sqrt{-1}$ まで平行移動すると消滅するものは、向きを適当に入れると $C_{0,j} := [\zeta_{2m}^{2j}] - [\zeta_{2m}^{2j-1}]$, $j = 0, \dots, m-1$ であり、

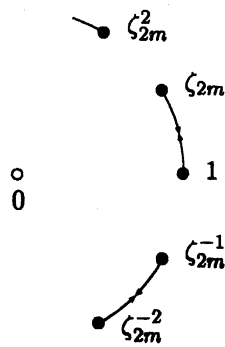


図 8: $t \rightarrow \sqrt{-2}$ での x の振る舞い

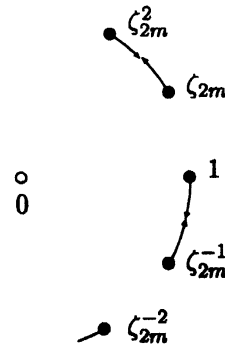


図 9: $t \rightarrow -\sqrt{-2}$ での x の振る舞い

$t = -2\sqrt{-1}$ まで平行移動すると消滅するものは $C_{1,j} := [\zeta_{2m}^{2j+1}] - [\zeta_{2m}^{2j}]$, $j = 0, \dots, m-1$ であることが分かる. 従って, $C_{0,i}$ と $C_{1,j}$ の交点数は

$$(C_{0,i}, C_{1,j}) = \begin{cases} -1 & i = j \text{ or } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり, この場合に予想 4 が成り立つことが分かる. $p' = q' = 1$ とは限らない場合にも同様の考察を行うことによって, 1次元の場合には予想 4 が成立することを確かめることができる.

次に Δ が 4 点 $(p, 0), (-q, 0), (0, r), (0, -s) \in \mathbf{Z}^2$ の凸包として与えられる 4 角形の場合を考える. この時, W として 1 変数の Laurent 多項式の和

$$W(x, y) = W_1(x) + W_2(y),$$

$$W_1(x) = x^p + \frac{1}{x^q}, \quad W_2(y) = y^r + \frac{1}{y^s},$$

を取ると, Gabrielov [10] により, $W(x, y)$ の消滅サイクルの交叉形式は $W_1(x)$ と $W_2(y)$ の消滅サイクルの交叉形式から次のようにして求まる: $W_1(x)$ の消滅サイクルを $(C_{1,i})_{i=1}^{N_1}$, $W_2(y)$ の消滅サイクルを $(C_{2,j})_{j=1}^{N_2}$ とおくと, $W(x, y)$ の消滅サイクルは $N_1 N_2$ 個あって, それらを $(D_{i,j})_{i,j}$ とおくと, それらの間の交点数は

$$(D_{i,j}, D_{k,l}) = (C_{1,i}, C_{1,k}) \cdot (D_{2,j}, D_{2,l})$$

となる. 一方, X_1 を 1次元の多面体 $[-p, q]$ から定まるスタック, X_2 を多面体 $[-r, s]$ から定まるスタックとすると, Δ から定まるスタックは $X_1 \times X_2$ となる. 従って, X_1 と X_2 の完備例外列をそれぞれ $(E_{1,i})_{i=1}^{N_1}$, $(E_{2,j})_{j=1}^{N_2}$ とおくと,

$$F_{i,j} = (\mathbb{L}p_1^* E_{1,i} \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{L}p_2^* E_{2,j})_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2$$

は $D^b \text{coh } X_1 \times X_2$ の完備例外列になる. ただし, p_1, p_2 は $X_1 \times X_2$ から X_1, X_2 への射影である. ここで Künneth の公式

$$\text{Ext}^n(F_{i,j}, F_{k,l}) = \bigoplus_{p+q=n} \text{Ext}^p(E_{1,i}, E_{1,k}) \otimes \text{Ext}^q(E_{2,j}, E_{2,l})$$

と1次元の時に予想4が成立することをを使うと、この場合にも予想4が成立することが分かる。より一般に n 次元の多面体 Δ が、 n_1 次元の多面体 Δ_1 と n_2 次元の多面体 Δ_2 で $n_1 + n_2 = n$ となるものに対し、 $\Delta_1 \times \{0\} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ と $\{0\} \times \Delta_2 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ の凸包として表される時、 Δ に対する予想4は Δ_1 に対する予想4と Δ_2 に対する予想4に帰着される。

最後に予想4の背景について少しだけ解説する。多項式に対し、その消滅サイクルで生成される自由アーベル群に交叉形式によって格子の構造を入れたものは Milnor 格子と呼ばれるが、予想4は、多面体 Δ に対し、 Δ を Newton 多面体とする一般の Laurent 多項式の Milnor 格子が、 Δ (の単体分割) から定まるスタックの接続層の導来圏の K 群に Euler 形式によって格子の構造を入れたものと一致することを主張している。従って、次のような問題を考えることは自然である：

1. Laurent 多項式から自然に定義される三角圏で、その K 群に Euler 形式によって格子の構造を入れたものが Milnor 格子と同型になるものは存在するか。
2. Δ を Newton 多面体として持つ Laurent 多項式 W から1によって定まる三角圏は、 Δ から定まるトーリック多様体の接続層の導来圏と三角圏として同値になるか。

1は Seidel [22] によって肯定的に解かれており、 W の定義域であるトーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ に適当なシンプレクティック構造を入れたときの W の有向深谷圏の導来圏 $D^b\text{gut} \rightarrow W$ が求める性質を持つことが知られている。ここで有向深谷圏とは、大雑把に言うとお対象が消滅サイクルで、射が Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーであるような A_∞ 圏である。ただし、 A_∞ 圏は通常の圏を拡張した概念で、2つの射の合成が結合的にならないかわりに、射の微分や、3つ以上の射の高次の合成が定義されていて、ある複雑な整合性条件を満たすものを指し、その導来圏は twisted complex と呼ばれる概念を用いて定義される [5, 15]。2は Kontsevich によって定式化されたもので、ホモロジー的ミラー予想と呼ばれる [15, 16]：

予想 5 (Kontsevich). 多面体 Δ に対し、 Δ を Newton 多面体とする一般の多項式 W と、 Δ の単体分割 Σ を適当に取れば、三角圏の同値

$$D^b \text{coh } X \cong D^b \text{gut} \rightarrow W$$

が存在する。

これは予想4の圏論化 (categorification) であり、行列の一致という数値的な (あるいは K 群の) レベルを越えて、 W のシンプレクティック幾何と X の複素幾何の間に深い関係があることを主張している。この予想は Δ が1次元の場合や、 X が射影平面 [23] や重み付き射影平面 [2]、トーリック del Pezzo 曲面 [27] の場合などに証明されており、従ってこれらに対しては予想4も正しい。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. II*, volume 83 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988. Monodromy and asymptotics of integrals, Translated from the Russian by Hugh Porteous, Translation revised by the authors and James Montaldi.

- [2] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov, and Dmitri Orlov. Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations. *math.AG/0404281*, 2004.
- [3] Serguei Barannikov. Semi-infinite Hodge structures and mirror symmetry for projective spaces. *math.AG/0010157*, 2000.
- [4] A. A. Beĭlinson. Coherent sheaves on P^n and problems in linear algebra. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 12(3):68–69, 1978.
- [5] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Mat. Sb.*, 181(5):669–683, 1990.
- [6] Sergio Cecotti and Cumrun Vafa. On classification of $N = 2$ supersymmetric theories. *Comm. Math. Phys.*, 158(3):569–644, 1993.
- [7] A. Douai and C. Sabbah. Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. I. In *Proceedings of the International Conference in Honor of Frédéric Pham (Nice, 2002)*, volume 53, pages 1055–1116, 2003.
- [8] Boris Dubrovin. Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 315–326 (electronic), 1998.
- [9] Boris Dubrovin. Painlevé transcendents in two-dimensional topological field theory. In *The Painlevé property*, CRM Ser. Math. Phys., pages 287–412. Springer, New York, 1999.
- [10] A. M. Gabrièlov. Intersection matrices for certain singularities. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 7(3):18–32, 1973.
- [11] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. Generalized Euler integrals and A -hypergeometric functions. *Adv. Math.*, 84(2):255–271, 1990.
- [12] Davide Guzzetti. Stokes matrices and monodromy of the quantum cohomology of projective spaces. *Comm. Math. Phys.*, 207(2):341–383, 1999.
- [13] M. M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 92(3):479–508, 1988.
- [14] Yujiro Kawamata. Derived categories of toric varieties. *math.AG/0503102*, 2005.
- [15] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [16] Maxim Kontsevich. Lectures at ENS Paris, spring 1998. set of notes taken by J. Bellaïche, J.-F. Dat, I. Martin, G. Rachinet and H. Randriambololona, 1998.

- [17] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1):1–31, 1976.
- [18] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):852–862, 1992.
- [19] A. N. Rudakov. Exceptional collections, mutations and helices. In *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–6. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [20] Kyoji Saito. Period mapping associated to a primitive form. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 19(3):1231–1264, 1983.
- [21] Morihiko Saito. On the structure of Brieskorn lattice. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(1):27–72, 1989.
- [22] Paul Seidel. Vanishing cycles and mutation. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 65–85. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [23] Paul Seidel. More about vanishing cycles and mutation. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 429–465. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
- [24] Susumu Tanabé. Invariant of the hypergeometric group associated to the quantum cohomology of the projective space. *Bull. Sci. Math.*, 128(10):811–827, 2004.
- [25] Kazushi Ueda. Stokes matrices for the quantum cohomologies of Grassmannians. *Int. Math. Res. Not.*, (34):2075–2086, 2005.
- [26] Kazushi Ueda. Stokes matrix for the quantum cohomology of cubic surfaces. [math.AG/0505350](#), 2005.
- [27] Kazushi Ueda. Homological mirror symmetry for toric del Pezzo surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 264(1):71–85, 2006.
- [28] Eric Zaslow. Solitons and helices: the search for a math-physics bridge. *Comm. Math. Phys.*, 175(2):337–375, 1996.