

## 2次元 versal Galois 被覆 と 有限群のクレモナ群への埋め込み

徳永浩雄<sup>1</sup>, 坂内真三<sup>2</sup>

### イントロダクション

本原稿の話はすべて複素数体  $\mathbb{C}$  上のものとする.  $X, Y$  は正規射影多様体,  $X$  から  $Y$  への全射有限射  $\pi: X \rightarrow Y$  が存在するとき,  $X$  を  $Y$  の被覆と呼ぶ. このとき, それぞれの有理函数体を  $\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)$  で表すと  $\mathbb{C}(X)$  は  $\mathbb{C}(Y)$  の有限次代数拡大でその拡大次数は  $\deg \pi$  である. 代数拡大  $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$  が Galois 拡大のとき,  $X$  を Galois 被覆と呼ぶ. その Galois 群  $\text{Gal}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y))$  が有限群  $G$  に同型るとき, 単に  $G$ -被覆と呼ぶ.

**定義 0.1**  $G$  は有限群とする.  $G$ -被覆  $\varpi: X \rightarrow Y$  がつぎの性質を満たすとき,  $\varpi$  は versal であると呼ぶ:

任意の  $G$ -被覆  $\pi: W \rightarrow Z$  に対し,  $W$  から  $X$  への  $G$ -同値な有理写像  $\mu: W \dashrightarrow X$  で  $\mu(W) \not\subset \text{Fix}(X, G)$ , ただし  $\text{Fix}(X, G) = \{x \in X \mid x \text{ の固定化群 } G_x \text{ が自明でない}\}$ , を満たすものが存在する.

定義 0.1 は「任意の  $G$ -被覆が  $\varpi: X \rightarrow Y$  の有理的引き戻しで得られる」ことに同値である.

versal  $G$ -被覆については以下のような性質が知られている:

- 任意の有限群  $G$  に対し, versal  $G$ -被覆が存在する [7], [8]. ただし, 一意的ではない.
- $G$  に対し,  $\min\{\dim X \mid \varpi: X \rightarrow Y \text{ は versal } G\text{-被覆}\}$  とおくと, これは Buhler と Reichstein により導入された essential dimension,  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G)$  に等しい ([2] 参照).
- $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 1$  となる有限群は巡回群か位数が  $2n$  ( $n$  は奇数) の二面体群に限る.
- $G$  の部分群  $H$  に対し,  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) \geq \text{ed}_{\mathbb{C}}(H)$ .
- $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus r}$ ,  $p$  は素数ならば,  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = r$ .

<sup>1</sup>首都大学東京

<sup>2</sup>東京都立大学大学院

- $S_n$  で  $n$  次対称群を表すとき,  $n \geq 5$  ならば,  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(S_n) \leq n - 3$ .

この稿で考えるのは, 2次元 versal  $G$ -被覆である. 上記の性質を使えば, 例えば  $G$  が  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}, S_4, A_4, S_5, A_5$  ( $A_n$  は  $n$  次交代群をあらわす) の場合は2次元の versal  $G$ -被覆が存在する. 2次元の versal  $G$ -被覆に関しては次の定理が基本的である ([10]):

**定理 0.1**  $G$  は  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$  を満たす有限群とする. このとき, 以下の条件を満たす非特異有理曲面  $X$  が存在する:

- 単射準同型  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X)$  が存在する. すなわち,  $G$  は  $X$  に忠実に作用する.
- 対  $(X, G)$  は極小である. すなわち,  $G$  が忠実に作用する曲面  $X'$  と  $G$ -同値な双有理射  $f: X \rightarrow X'$  が存在すれば  $f$  は同型
- $G$  の作用による商を  $Y := X/G$  とおくと, 商写像  $\varpi: X \rightarrow Y$  は versal  $G$ -被覆を与える.

定理 0.1 から  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$  を満たす有限群  $G$  は2次元クレモナ群  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  の有限部分群となることがわかる.

次に有限群の「versal な埋め込み」を以下のように定義する:

**定義 0.2**  $X$  は正規射影多様体,  $\text{Bir}(X)$  は  $X$  の双有理写像全体からなる群とする. 有限群  $G$  から  $\text{Bir}(X)$  の単射準同型  $\rho: G \rightarrow \text{Bir}(X)$  が以下の条件を満たすとき,  $\rho$  を versal な埋め込みと呼ぶ:  $\exists$  正規射影多様体  $X'$  such that (i)  $X'$  は  $X$  に双有理同値, (ii)  $\rho$  の像は  $\text{Aut}(X')$  に含まれる, (iii) 商写像  $X' \rightarrow X'/G$  は versal  $G$ -被覆である.

$\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$  のときはつぎの性質が知られている:

「埋め込み  $\rho: G \rightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{C})$  が versal になるか否かは Definition 0.2 の  $X'$  のとり方に依らない. versality は  $\rho(G)$  の conjugate class に依る」 ([10])

従って, 2次元 versal  $G$ -被覆の研究は  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  の有限部分群の共役類の研究と関連があることがわかる. ここで例をひとつ挙げておく.

**例 0.1** (i)  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は以下のような  $\mathbb{P}^2$  の自己同型とする

$$\sigma_1: [X_0, X_1, X_2] \mapsto [\omega X_0, \omega^2 X_1, X_2]$$

$$\sigma_2: [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_1, X_2, X_0],$$

ただし,  $[X_0, X_1, X_2]$  は同時座標であり,  $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$  とする.  $G_1$  として  $\sigma_1, \sigma_2$  で生成された有限自己同型群を考えると

- (イ)  $G_1 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$  かつ  $\text{ed}_C(G_1) = 2$  となるが,
- (ロ)  $\varpi_{G_1} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/G_1$  は versal ではない.
- (ii)  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は以下のような  $\mathbb{P}^2$  の自己同型とする

$$\sigma_1 : [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0, \omega X_1, X_2]$$

$$\sigma_2 : [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0, X_1, \omega X_2],$$

ただし,  $[X_0, X_1, X_2]$  は同時座標であり,  $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$  とする.  $G_2$  として  $\sigma_1, \sigma_2$  で生成された有限自己同型群を考えると

- (イ)  $G_2 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$  かつ  $\text{ed}_C(G_2) = 2$  であり,
- (ロ)  $\varpi_{G_2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/G_2$  は versal  $G$ -被覆である.
- 特に例 0.1 の  $G_1, G_2$  は  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  の中で共役ではないことがわかる.

$\text{ed}_C(G) = 2$  を満たす有限群に関して, 素朴な問題として,

**問 0.1**  $\text{ed}_C(G) = 2$  を満たす群  $G$  で  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  への共役でない versal な埋め込みを二つ以上もつ例はあるか?

というものが考えられる. さて,  $S_4$  や  $A_5$  については, これまでの研究で二通りの versal 被覆が存在することが知られている (§1 参照). 本稿の主題は「これらの被覆から与えられる  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  への埋め込みの像が共役になるか?」という問題であり, この問題に関するわれわれの解答は以下の通りである.

**定理 0.2** §1 で与えられた  $S_4, A_5$  の  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  の二通りの埋め込みはともに versal であるが, 互いに共役ではない

以下この結果に関し, その概略を述べる. 詳細は [1] を参照して頂きたい.

## 1 ふたつの versal $S_4$ -被覆と versal $A_5$ -被覆

### 1.1 Versal $S_4$ -被覆

$S_4$  は 4 次対称群とする. ここでは  $S_4$  を記述するのにつぎの表現を用いる

生成元:  $\sigma, \tau, \lambda_1, \lambda_2$

関係式:  $\sigma^2 = \tau^3 = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$

$\sigma\tau = \tau^2\sigma, \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1$

$\sigma\lambda_2\sigma = \lambda_2, \sigma\lambda_1\sigma = \lambda_1\lambda_2$

$\tau^2\lambda_2\tau = \lambda_1, \tau^2\lambda_1\tau = \lambda_1\lambda_2$

$\rho: S_4 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$  は以下のような忠実な既約表現とする:

$$\begin{aligned} \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \tau &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \lambda_2 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Versal  $S_4$ -被覆  $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$

$X_1$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  内で次の定義方程式で与えられる曲面とする:

$$x_0y_0z_0 - x_1y_1z_1 = 0,$$

ただし,  $([x_0, x_1], [y_0, y_1], [z_0, z_1])$  は同次座標を表す.  $x = x_1/x_0, y = y_1/y_0, z = z_1/z_0$  とおく.  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  上の  $S_4$  作用を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} (x, y, z)^\sigma &= (y, x, z) \\ (x, y, z)^\tau &= (y, z, x) \\ (x, y, z)^{\lambda_1} &= (-x, y, -z) \\ (x, y, z)^{\lambda_2} &= (-x, -y, z) \end{aligned}$$

$X_1$  の定義方程式は  $S_4$  の作用で不変なので  $S_4$  は  $X_1$  に作用する (この作用は忠実である).  $Y_1 = X_1/G$  とおき, 商写像を  $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$  で表す. [9] 及び [11] より,  $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$  は versal  $S_4$ -被覆である.

$X_1$  上のこの  $S_4$ -作用について少し見ておこう. まず,  $X_1$  は次数 6 の del-Pezzo 曲面, つまり,  $X_1$  は  $\mathbb{P}^2$  を相異なる 3 点で blow-up して得られる.

**補題 1.1** 方程式  $x_0y_0z_0 = 0$  で与えられる  $X_1$  上の因子は 6 つの既約成分  $C_1, C_2, \dots, C_6$  からなる. 各  $C_i$  は自己交点数が  $-1$  の非特異有理曲線である.

**証明.**  $p_{12} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  は最初の二つの成分への射影とする. すると, 定義方程式から,  $p_{12}$  の  $X_1$  への制限は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  を  $([1, 0], [0, 1])$  と  $([0, 1], [1, 0])$  で blow-up したものであることがわかる. 主張はこの考察から簡単に従う.

**補題 1.2**  $\text{Pic}(X_1)$  は  $X_1$  の Picard 群とする.  $\text{Pic}^{S_4}(X_1) = \mathbb{Z}(-K_{X_1})$  が成立する.

**証明.**  $-K_{X_1} \sim \sum_{i=1}^6 C_i$ , であり, これが,  $\text{Pic}^{S_4}(X_1)$  を生成することは容易に確かめられる.

$x \in X_1$  に対し,  $d_x = \#O(x)$ , ただし  $O(x)$  は  $x$  の  $S_4$  軌道を表すものとする. ここでは,  $d_x < 6$  をみたす点について考察する.

**補題 1.3** (i)  $d_x = 1, 2, 5$  をみたす点は存在しない.

(ii)  $d_x = 4$  を満たすのは以下の 12 点である.

$$\begin{array}{cccc} R_{11}(1, 1, 1) & R_{12}(1, -1, -1) & R_{13}(-1, -1, 1) & R_{14}(-1, 1, -1) \\ R_{21}(\omega, \omega, \omega) & R_{22}(\omega, -\omega, -\omega) & R_{23}(-\omega, -\omega, \omega) & R_{24}(-\omega, \omega, -\omega) \\ R_{31}(\omega^2, \omega^2, \omega^2) & R_{32}(\omega^2, -\omega^2, -\omega^2) & R_{33}(-\omega^2, -\omega^2, \omega^2) & R_{34}(-\omega^2, \omega^2, -\omega^2), \end{array}$$

ここで, 点を表す座標はアフィン座標  $(x, y, z)$  であり,  $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$  である. これらの 12 点は 3 つの軌道からなる.

(iii)  $d_x = 4$  を満たすのは以下の 6 点である.

$$\begin{array}{ccc} P_1([0, 1], [1, 0], [0, 1]) & P_2([1, 0], [0, 1], [0, 1]) & P_3([0, 1], [0, 1], [1, 0]) \\ Q_1([1, 0], [1, 0], [0, 1]) & Q_2([1, 0], [0, 1], [1, 0]) & Q_3([0, 1], [1, 0], [1, 0]). \end{array}$$

記号は (ii) と同様で, これらの 6 点は 2 つの軌道からなる.

**証明.** 以下の 2 点

- $\tau$  は  $x_0y_0z_0 = 0$  で与えられる因子に自由に作用する.
- 部分群  $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  はアフィン曲面  $xyz = 1$  上で固定点を持たない.

に考慮すれば, 上記の主張は容易に従う.

**補題 1.4** 方程式  $x_i = \omega^i x_0 (i = 0, 1, 2)$  で与えられる因子は自己交点数が 0 の非特異有理曲線である.

**証明.** 補題 1.1 の証明から, 上記の因子は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  上の自己交点数 0 の曲線から得られている. これらの曲線は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  で点  $([1, 0], [0, 1]), ([0, 1], [1, 0])$  を通らないので, 補題の主張が従う.

**Versal  $S_4$ -被覆**  $\varpi_{S_4,2} : X_2 \rightarrow Y_2$

Proposition 4.1 (ii) ([9]) より,  $\rho$  を用いて versal  $S_4$ -被覆  $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/S_4$  を得る.  $X_2 = \mathbb{P}^2, Y_2 = \mathbb{P}^2/S_4$   $\varpi_{S_4,2} =$  商写像とおいてふたつめの versal  $S_4$ -被覆を得る.

## 1.2 versal $A_5$ -被覆

まず, 以下の補題から始める:

**補題 1.5**  $S$  は非特異射影曲面とし, 5 次交代群  $A_5$  が  $S$  に忠実に作用するものとする.  $x \in S$  に対し,  $d_x$  はこれまで同様  $x$  の軌道の個数とするとき,  $S$  上で  $d_x < 5$  を満たす点は存在しない.

**証明.**  $d_x = 1$  のとき,  $d_x = 1$  を満たす点  $x$  が存在するとする. すると, 自明でない準同型  $\eta : A_5 \rightarrow \text{GL}(T_x S)$ , ただし  $T_x S$  は  $x$  における接空間, が存在する.  $A_5$  は単純群なので,  $\eta$  は単射となるが,  $A_5$  は 2 次の忠実な表現を持たないのでこれは矛盾である.

$d_x = 2, 3, 4$  のとき, このような点  $x$  が存在したとする.  $x$  における固定化群  $G_x$  は  $A_5$  の指数  $d_x$  の部分群である. このとき,  $A_5$  から  $d_x$  次対称群  $S_{d_x}$  へ準同型が存在する. この準同型は自明でない核をもつが, これは  $A_5$  が単純群であることに矛盾する.

**Versal  $A_5$ -被覆**  $\varpi_{A_5,1} : X_1 \rightarrow Y_1$

$X_1$  は次数 5 の del-Pezzo 曲面とする. このとき,  $\text{Aut}(X_1) \cong S_5$  (例えば [6] 参照) である. [3] にある結果をもちいると,  $X_1 \rightarrow X_1/A_5$  が versal  $A_5$ -被覆を与えることがわかる.  $Y_1 = X_1/A_5, \varphi_{A_5,1} : X_1 \rightarrow Y_1$  とおく.

**Versal  $A_5$ -被覆**  $\varphi_{A_5,2} : X_2 \rightarrow Y_2$

$\rho : A_5 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$  は  $A_5$  の 3 次既約表現とする. この  $\rho$  をもちいて versal  $S_4$ -被覆  $\varpi_{S_4,2} : X_2 \rightarrow Y_2$  と同様にして, もう 1 つの versal  $A_5$ -被覆  $\varpi_{A_5,2} : X_2 \rightarrow Y_2$  を得る.

## 2 定理 0.2 の証明の概略

ここでは定理 0.2 の証明の概略をのべる. 詳しくは [1] を参照されたい.

証明のアイデアは [4] にあるもので要となるツールは Noether の不等式と呼ばれるものである。

その一般形と証明は [1], [5] を参照されたい。我々のセッティングでは以下のようになる：

$G$  は  $S_4$  または  $A_5$  を表すものとし,  $X_1, X_2 (= \mathbb{P}^2)$  は §1 で述べたもののいずれかとする。  $X_1$  から  $X_2$  への  $G$ -同値な双有理写像

$$\Phi: X_1 \dashrightarrow X_2 = \mathbb{P}^2$$

が存在したとする。  $|l|$  は  $\mathbb{P}^2$  の直線のなす完備一次系とし,  $\mathcal{H} = \Phi^{-1}(|l|)$  とする。このとき, 以下の二つが成立する：

- $H \in \mathcal{H}$  は  $-aK_{X_1}$  ( $a > 0$ ) に線形同値
- $\mathcal{H}$  は fixed component free であり, その base point は  $\cup_{\lambda} O(x_{\lambda})$  ( $x_{\lambda} \in X_1$ ) の形をしている。

上記の軌道に関し,

$r_{\lambda}: x \in O(x_{\lambda})$  の  $\mathcal{H}$  における重複度,

$d_{\lambda} := \sharp(O(x_{\lambda}))$ ,

とおく。このとき, Noether の不等式の主張はつぎのようになる：

「 $\exists O(x_{\lambda_0})$  such that  $r_{\lambda_0} > a$ 」 ( $O(x_{\lambda_0})$  を  $\Phi$  の maximal singularity という)

$a^2 K_{X_1}^2 \geq r_{\lambda_0}^2 d_{\lambda_0}$  ゆえ, Noether の不等式から  $K_{X_1}^2 > d_{\lambda_0}$  を得る。

## 2.1 $G = S_4$ のとき

$K_{X_1}^2 = 6$  ゆえ,  $d_{\lambda_0} < 6$  となる。

**補題 2.1**  $d = 4$  をみたく  $O(x)$  は maximal singularity にはならない。

**証明.**  $E_i$  は 補題 1.4 に出てくる  $X_1$  上の因子で  $x_i = \omega^i x_0$  ( $i = 0, 1, 2$ ) で与えられるものとする。  $O((\omega^i, \omega^i, \omega^i))$  が maximal singularity であったとする。  $q: \hat{X}_1 \rightarrow X_1$  は  $O((\omega^i, \omega^i, \omega^i))$  での blow-up とする。すると線形系  $q^*\mathcal{H} - r(R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_{i4})$

は fixed component を持たない (ここでは, 点  $R_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) とこれから現れる例外曲線を同一視している).  $\bar{E}_i$  は  $E_i$  の proper transform とする. すると,

$$(-aq^*K_{X_1} - r \sum_{j=1}^4 R_{ij})\bar{E}_i = 2a - 2r < 0.$$

となるが, これは  $\bar{E}_i$  が  $q^*\mathcal{H} - r(R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_{i4})$  の fixed component であることを表し, 矛盾である.

**補題 2.2**  $d = 3$  をみたく  $O(x)$  は maximal singularity にはならない.

**証明.**  $O(P_1) = \{P_1, P_2, P_3\}$  が maximal singularity であったとする. このとき, (必要なら番号をつけかえて) 因子  $x_0y_0z_0 = 0$  の既約成分  $C_1$  が  $P_1$  を通ると仮定してよ.  $q: \hat{X}_1 \rightarrow X_1$  は  $O(P_1)$  での blow-up とする. このとき, 線形系  $q^*(\mathcal{H}) - r(P_1 + P_2 + P_3)$  fixed component を持たない (ここでは  $P_i$  ( $j = 1, 2, 3$ ) と対応する例外曲線を同一視している)  $\bar{C}_1$  は  $C_1$  の proper transform とする. すると

$$(-aq^*K_{X_1} - r \sum_{j=1}^3 P_j)\bar{C}_1 = a - r < 0.$$

となるが, これは  $\bar{C}_1$  が  $q^*\mathcal{H} - r(P_1 + P_2 + P_3)$  の fixed component であることを表し, 矛盾である.

## 2.2 $G = A_5$ のとき

$S_4$  のときと同様,  $\Phi$  の存在から  $\sharp(O(x)) < 5$  を満たす  $A_5$ -軌道  $O(x)$ ,  $x \in X_1$  が存在することがわかる. これは補題 1.5 に反する.

以上で定理 0.2 が証明された.

## 3 $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$ と $\varpi_{S_4,2}: X_2 \rightarrow Y_2$ の比較

前節までで,  $\varpi_{S_4,1}$  と  $\varpi_{S_4,2}$  から与えられる  $S_4$  の  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  への埋め込みが互いに共役でないことを示した. この節では, 二つの関係を調べる.

$\varpi_{S_4,1}$  と  $\varpi_{S_4,2}$  がともに versal であることから,  $S_4$ -同値な有理射像  $\mu_1: X_1 \dashrightarrow X_2$ ,  $\mu_2: X_2 \dashrightarrow X_1$  で  $\mu_1(X_1) \not\subset \text{Fix}(X_2, S_4)$ ,  $\mu_2(X_2) \not\subset \text{Fix}(X_1, S_4)$  を満たすものが存在する.  $\text{ed}_{\mathbb{C}}(S_4) = 2$  であることから, 1次元の versal  $S_4$ -被覆は存在しないので,  $\mu_1, \mu_2$  はともに支配的である.

$\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) は以下の条件を満たすようにとることができることを示す.



1.  $\mu_i (i = 1, 2)$  によって引き起こされる拡大  $\mathbb{C}(X_1)/\mathbb{C}(X_2)$  と  $\mathbb{C}(X_2)/\mathbb{C}(X_1)$  はともに3次の巡回拡大である.
2.  $\mathbb{C}(X_2)/(\mu_2 \circ \mu_1)^*(\mathbb{C}(X_2))$  は Galois 拡大であり, その Galois 群は  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$  と同型である.

$G$  を  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$  の有限部分群で, 以下の行列で生成される物とする:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

このとき, 以下のことが成立する:

1.  $|G| = 216$ .
2.  $H_1$  を  $A, B, C_1, C_2$  で生成される部分群とすると,  $H_1 \cong S_4$
3.  $H_2$  を  $D_1, D_2$  で生成される部分群とすると,  $H_1$  は  $G$  の正規部分群であり,  $G$  は  $H_1$  と  $H_2$  の半直積である.
4.  $H_3$  を  $D_1 D_2^2$  で生成される部分群とすると,  $H_3$  は  $G$  の正規部分群である.
5.  $S_4$  の  $A, B, C_1, C_2$  による表現は, §1.1 で与えられたものと共役であり, その対応は  $\rho(\tau)(\rho(g))\rho(\tau)^{-1}$ ,  $g \in S_4$  で与えられる.

$[X_0, X_1, X_2]$  を  $\mathbb{P}^2$  の斉次とし,  $\mathbb{P}^2$  への  $G$  の作用を

$$[X_0, X_1, X_2]^g := [X_0, X_1, X_2]A_g,$$

で定める. ここで  $A_g$  は  $g \in G$  に対応する行列を表す.  $x = X_1/X_0$ ,  $y = X_2/X_0$  とおくと,  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(x, y)$  であり,  $G$  の作用は

$$\begin{aligned} (x, y)^A &= (y, x), & (x, y)^B &= (y/x, 1/x), & (x, y)^{C_1} &= (x, -y), \\ (x, y)^{C_2} &= (-x, -y), & (x, y)^{D_1} &= (\omega x, y), & (x, y)^{D_2} &= (x, \omega y). \end{aligned}$$

で与えられる.

**補題 3.1**  $u, v \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$  で以下の条件を満たすものが存在する,

1.  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3} = \mathbb{C}(u, v)$

2.  $H_1$  によって引き起こされる  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$  への  $S_4$  の作用は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} (u, v)^A &= (v, u), & (u, v)^B &= (v, 1/(uv)), \\ (u, v)^{C_1} &= (-u, v), & (u, v)^{C_2} &= (-u, -v). \end{aligned}$$

**証明.**  $u = x^2/y, v = y^2/x$  とすればよい.

補題 3.1 により  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$  と  $\mathbb{C}(X_1)$  は  $S_4$  の作用を含めて次の様に同一視できる.  $(x, y, z)$  を §1 で与えられた  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の非同次座標とすると,  $X_1$  は  $xyz = 1$  で定義されている.  $x = u, y = v, z = 1/uv$  とおけばよい. また,  $\mathbb{P}^2/H_2 \cong \mathbb{P}^2$  であり,  $H_1$  により誘導される  $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2/H_2$  への  $S_4$  の作用は,  $X_2$  への  $S_4$  の作用と同一視される.

次に以下の体の系列を考える:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}(\mathbb{P}^2) & \supset & \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3} & \supset & \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_2} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{C}(X_2) & & \mathbb{C}(X_1) & & \mathbb{C}(X_2) \end{array}$$

この系列に対応して,  $\mu_2: X_2 \dashrightarrow X_1$  と  $\mu_1: X_1 \dashrightarrow X_2$  が得られる.  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) が  $S_4$  同値であるのは,  $S_4$  の作用が  $H_1$  から引き起こされていることから従う. また,  $(\mu_2 \circ \mu_1)^*(\mathbb{C}(X_2)) \subset \mathbb{C}(X_2)$  は  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ -拡大である. よって, 求める条件を満たす  $S_4$ -同値な有理射  $\mu_1$  と  $\mu_2$  が得られた.

**注意 3.1**  $A_5$  についても,  $\varpi_{A_5,1}$  と  $\varpi_{A_5,2}$  の間に上のように簡明な関係があるか調べるのも興味深い問題であると思われる.

## 参考文献

- [1] S. Bannai and H. Tokunaga: *A note on embeddings of  $S_4$  and  $A_5$  into the Cremona group and versal Galois covers*, arXiv: mathAG/0510503.
- [2] J. Buhler and Z. Reichstein: *On the essential dimension of a finite group*, *Comp. Math.* **106** (1997), 159-179.

- [3] K. Hashimoto and H. Tsunogai: *Generic polynomials over  $\mathbb{Q}$  with two parameters for the transitive groups of degree five*, Proc. Japan Acad. **79** (2003), 142-145.
- [4] V.A Iskovskikh: *Two non-conjugate embeddings of  $S_3 \times \mathbb{Z}$  into the Cremona group II*, arXiv:math.AG/0508484.
- [5] V. A. Iskovskikh: *Factorization of birational maps of rational surfaces from the viewpoint of Mori theory*, Russian Math. Surveys **51**(1996), 585-652.
- [6] M. Koitabashi: *Automorphism Groups of Generic Rational surfaces*, J. of Algebra, **116**, 130-142 (1988).
- [7] M. Namba: *On finite Galois Coverings of projective manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **41**, 391-403.
- [8] M. Namba: *Finite branched coverings of complex manifold*, Sugaku Expositions **5** (1992) 193-211.
- [9] H. Tokunaga: *2-dimensional versal  $S_4$ -covers and rational elliptic surfaces*, Séminaire et Congrès **10**, Société Mathématique de France (2005), 307-322.
- [10] H. Tokunaga: *2-dimensional versal  $G$ -covers and Cremona embeddings of finite groups*, to appear in Kyushu J. of Math.
- [11] H. Tsuchihashi: *Galois coverings of projective varieties for the dihedral groups and the symmetric groups*, Kyushu J. of Math. **57**(2003), 411-427.