

## 保型 $L$ 関数の離散普遍性について (On discrete universality of automorphic $L$ -functions)

松本耕二 (Kohji Matsumoto)  
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1975 年にロシアの Voronin [21] は, Riemann ゼータ関数  $\zeta(s)$  による正則関数の近似についての, 次の普遍性定理 (universality theorem) を証明した。即ち,  $K$  を帯領域  $\{s \mid 1/2 < \sigma < 1\}$  に含まれるコンパクト集合で, 補集合が連結なものとする。  $K$  上連続で零点を持たず,  $K$  の内部では正則な関数の全体を  $\mathcal{G}(K)$  と書く。また  $m\{A\}$  で集合  $A$  の Lebesgue 測度を表わすことにすれば, 勝手な  $g(s) \in \mathcal{G}(K)$  と  $\varepsilon > 0$  に対して, Voronin の定理は

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m \left\{ \tau \in [0, T] \mid \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - g(s)| < \varepsilon \right\} > 0 \quad (1)$$

を主張する。(正確には Voronin の原論文に出ている主張は少し弱い形なのだが, ここでは上の形で述べておく。)

Voronin 以降の数年間で, この結果は Dirichlet の  $L$  関数, Hurwitz のゼータ関数, Dedekind のゼータ関数などの場合に直ちに拡張されたが, 保型  $L$  関数の普遍性は 20 世紀末になってようやく研究されるようになり, 若干の部分的結果を経て, 2001 年に出版された Laurinćikas と筆者との共著 [14] において,  $SL(2, \mathbf{Z})$  に関する正則な normalized Hecke-eigen cusp 形式  $f(z)$  に付随する  $L$  関数  $L(s, f)$  の普遍性が証明された。即ち,  $f(z)$  の weight を  $\kappa$  とし,  $K$  を帯領域  $D = \{s \mid \kappa/2 < \sigma < (\kappa+1)/2\}$  に含まれるコンパクト集合で, 補集合が連結なものとするれば, 勝手な  $g(s) \in \mathcal{G}(K)$  と  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m \left\{ \tau \in [0, T] \mid \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, f) - g(s)| < \varepsilon \right\} > 0 \quad (2)$$

が成り立つ。この結果は [16] において合同部分群の new form の場合に拡張され, また複数個の Dirichlet 指標で捻った保型  $L$  関数に対する同時普遍性も [15] において示された。

普遍性定理の証明には, Voronin の原証明以外に, Bagchi が 1980 年代初頭に開発した方法があって, この方法は Laurinćikas の教科書 [8] にも紹介され, 今日では一つのスタンダードとなっている。上述した保型  $L$  関数の普遍性の証明もその基本的な枠組みは Bagchi の方法に基づく。その鍵となるのは極限定理および稠密性定理と呼ばれる二つの命題であり, 普遍性定理はこの二つの命題を基盤にして, 多項式近似に関する Mergelyan の定理を用いて示されるのである。

まず極限定理の方から解説しよう。集合  $S$  の Borel 部分集合の全体を  $\mathcal{B}(S)$  と書くことにする。 $D_M = D \cap \{|t| < M\}$  とし、 $H(D_M)$  を  $D_M$  上の正則関数全体の集合とする。集合  $H(D_M)$  にはコンパクト一様収束位相を入れることができる。 $H(D_M)$  上の確率測度  $P_T$  を、 $A \in \mathcal{B}(H(D_M))$  に対し

$$P_T(A) = \frac{1}{T} m \{ \tau \in [0, T] \mid L(s + i\tau, f) \in A \} \quad (3)$$

で定義する。このとき、確率測度  $P_T$  が  $T \rightarrow \infty$  のときにある測度  $P_L$  に弱収束することを主張するのが極限定理である。しかもその極限測度  $P_L$  は次のように具体的に構成できる。複素単位円周を  $\gamma$  と書き、素数全体にわたる無限直積

$$\Omega = \prod_p \gamma_p \quad (\text{但しすべての } p \text{ に対し } \gamma_p = \gamma)$$

を考える。これはコンパクト Abel 群になるので全測度 1 の Haar 測度  $m_H$  が存在する。この測度によって  $\Omega$  は確率空間になるわけである。さて一方、 $f$  が normalized Hecke-eigen という仮定により  $L(s, f)$  は

$$L(s, f) = \prod_p (1 - \alpha(p)p^{-s})^{-1} (1 - \beta(p)p^{-s})^{-1}$$

なる Euler 積表示を持つが、これに付随して、 $\omega = (\omega(p))_p \in \Omega$  に対して  $H(D_M)$  の元

$$L(s, \omega, f) = \prod_p (1 - \alpha(p)\omega(p)p^{-s})^{-1} (1 - \beta(p)\omega(p)p^{-s})^{-1}$$

を対応させる写像を考えると、これは  $H(D_M)$  に値をとる random element であり、その分布が上述の極限測度  $P_L$  に他ならない。即ち

$$P_L(A) = m_H \{ \omega \in \Omega \mid L(s, \omega, f) \in A \} \quad (A \in \mathcal{B}(H(D_M)))$$

である。

この極限定理は、Bagchi によって  $\zeta(s)$  に対して証明された同様の極限定理の類似として、Kačėnas-Laurinćikas [1] において証明が与えられているし、あるいはまた Laurinćikas [10] による一般的な極限定理の特殊な場合と見ることもできる。

Laurinćikas が [10] において扱ったのは、筆者が [18] で導入し、Laurinćikas によって Matsumoto ゼータ関数と名付けられた、Euler 積で定義される、かなり広いゼータ関数のクラスである。ここでそのクラスの定義を正確に述べることはしないが、保型  $L$  関数は Matsumoto ゼータ関数の一種となっている。以下、Matsumoto ゼータ関数全体の集合を  $\mathcal{M}$  で表わすことにする。筆者は [18] において、 $\mathcal{M}$  の元に対する複素平面上でのある種の極限定理を証明したが、Laurinćikas はまず [9] において、筆者の結果をもっと確率論的に味付けし直したものを重みつきに拡張した形で与え、次いで [10] [11] において、 $\mathcal{M}$  の元に対する正則関数の空間上での極限定理を得たわけである。

さて以上の極限定理は、(3) 式における  $\tau$  が連続変数になっていたが、この変数を離散化して、離散的な極限定理を考えることもできる。正の実数  $h$  を固定し、連続変数  $\tau$  の代わ

りに、離散的な変数  $mh$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) を考える。そして (3) の代わりに、離散的な変数に関する確率測度  $P_N^*$  を、

$$P_N^*(A) = \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N \mid L(s+imh, f) \in A\} \quad (A \in \mathcal{B}(H(D_M))) \quad (4)$$

と定義する。但し  $\#A$  は集合  $A$  の元の個数を表わす。上記 (4) は保型  $L$  関数に即して定義したが、この場合もより一般に  $M$  の元に対して離散的な変数の確率測度を考えることができる。こうした確率測度に対する極限定理は、Laurinčikas の弟子の Kačinskaitė によって組織的に研究された。離散の場合、 $h$  の数論的な性質によって扱いが異なる。簡単なのは

$$\text{任意の } 0 \text{ でない整数 } k \text{ に対して } \exp\left(\frac{2\pi k}{h}\right) \text{ が無理数} \quad (5)$$

という条件が満たされている場合である。この (5) の仮定の下で、Kačinskaitė は (時に師との共著で)

- 複素平面での  $M$  の元の離散的極限定理 [2]; その重みつき一般化 [6];
- 正則関数の空間での  $M$  の元の離散的極限定理 [3]; その高次元化 [4];
- 有理型関数の空間での  $M$  の元の離散的極限定理 [5]; その高次元化 [7];

といった諸結果を次々と発表した。また最近、Kačinskaitė と Laurinčikas は、条件 (5) をはずした場合の極限定理を得ることに成功した。このときには土台となる確率空間は  $\Omega$  の適当な部分空間となる。

さて保型  $L$  関数も上述したように  $M$  の元なので Kačinskaitė の結果が使える。彼女が [3] で得た定理は、今の場合、次を意味する。

**補題 1** 条件 (5) の下で、 $N \rightarrow \infty$  のとき  $P_N^*$  は  $P_L$  に弱収束する。

では次に稠密性定理について述べよう。 $P_L$  は空間  $H(D_M)$  上の測度であって、その台 (support)  $S_L$  とは  $P_L(S_L) = 1$  となるような、 $H(D_M)$  の最小の閉部分集合のことである。あるいは、 $H(D_M)$  の元  $\varphi$  で、 $\varphi$  の任意の近傍  $G$  に対して  $P_L(G) > 0$  となるようなものの全体が  $S_L$  である、と言っても同じである。さて  $H(D_M)$  の元で  $D_M$  上零点を持たないものの全体に、 $D_M$  上で恒等的に 0 という関数 (これも  $H(D_M)$  の一個の元) を付け加えた集合を  $S_M$  と書くと、次の補題が成り立つ。

**補題 2**  $S_L = S_M$  である。

これは [14] で示されている結果である。この証明はかなり長いですが、その中核は次の稠密性定理である。 $D_M$  上の関数  $\xi_p$  を、 $s \in D_M$  に対し

$$\xi_p(s) = \xi_p(s; a_p) = -\log\left(1 - \frac{\alpha(p)a_p}{p^s}\right) - \log\left(1 - \frac{\beta(p)a_p}{p^s}\right)$$

で定義する。但し  $a_p \in \gamma$  である。このとき稠密性定理は、 $\sum_p \xi_p(s; a_p)$  の形の収束する級数の全体が、空間  $H(D_M)$  の中で稠密であることを主張する。この形の命題はもともとは

Riemann ゼータ関数の場合に Bagchi が示したもので、その証明は Hardy 空間論や指数型の整関数の理論、そして素数分布についての性質

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + c_1 + O(\exp(-c_2 \sqrt{\log x})) \quad (6)$$

( $c_1, c_2$  は定数) を用いる、込み入ったものである。保型  $L$  関数の場合の稠密性定理の証明には、更に Fourier 係数の二乗和に関する Rankin の結果を (6) と組み合わせて使う、という新しい工夫 (正密度法) も必要となる。その詳細は原論文に譲ってここでは省略するが、とにかくそのようにして稠密性定理が得られ、更にその稠密性定理と Hurwitz のある定理を用いることで補題 2 が得られる。

ここで注意すべきことは、極限定理は補題 1 で見たように Matsumoto ゼータ関数というかなり広い枠組みで証明できるのに対して、稠密性定理の方はそうはいかない、という点である。冒頭で述べたように Voronin の結果が保型  $L$  関数へと拡張されるまで二十数年もかかったのは、まさにこの理由による。Laurinćikas と筆者との共同研究 [14] (および [13]) において正密度法が導入され、普遍性定理が証明可能なゼータ関数、 $L$  関数の範囲も広がってきた。関数等式や Euler 積を持つ  $L$  関数のひとつの広いクラスとして Selberg クラスというものがあるが、Steuding [20] は Selberg クラスと Matsumoto ゼータ関数のクラスの双方の部分集合であるようなある関数族に対して正密度法による普遍性定理の証明を与えている。

さて  $K$  を  $D$  に含まれるコンパクト集合で、補集合が連結なものとし、 $g(s) \in \mathcal{G}(K)$  とする。 $K$  はコンパクトだから、 $K \subset D_M$  となる  $M$  が存在する。もし

$$g(s) \text{ は } D_M \text{ 全体に解析接続でき、その上で零点を持たない} \quad (7)$$

という仮定が成り立つならば、 $g(s)$  の  $L(s+imh, f)$  による近似を見出すことはもはや簡単な作業である。実際、 $\varepsilon > 0$  に対し、

$$\sup_{s \in K} |\varphi(s) - g(s)| < \varepsilon$$

が成り立つような  $\varphi \in H(D_M)$  の全体を  $G_\varepsilon$  と書けば、これはもちろん  $g$  の開近傍である。仮定 (7) と補題 2 により  $g \in S_L$  だから、台の定義により  $P_L(G_\varepsilon) > 0$  である。一方、弱収束の性質 ([8] の Theorem 1.1.8) と補題 1 から、

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P_N^*(G_\varepsilon) \geq P_L(G_\varepsilon) \quad (8)$$

である。しかしこの式の右辺は上の議論により正であり、また左辺は、定義により

$$\begin{aligned} & \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N \mid L(s+imh, f) \in G_\varepsilon\} \\ &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N \mid \sup_{s \in K} |L(s+imh, f) - g(s)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

である。従って次の定理が、仮定 (7) の下で示された。

定理 1 (保型  $L$  関数の離散普遍性定理, [17]) 正の数  $h$  が仮定 (5) を満たすとする。このとき、勝手な  $g(s) \in \mathcal{G}(K)$  と  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N \mid \sup_{s \in K} |L(s+imh, f) - g(s)| < \varepsilon\} > 0 \quad (9)$$

が成り立つ。

仮定 (7) が成り立たない場合には、まず Mergelyan の多項式近似定理を使って、 $D_M$  全体で正則で非零、かつ  $g(s)$  を十分によく近似するような関数を作り、(7) が成り立つ場合に帰着させることにより、定理の証明が完結する。なお [17] においては実際には合同部分群に拡張した形の定理が証明されている。

それでは次に、保型  $L$  関数の導関数  $L'(s, f)$  に対する普遍性定理について論じよう。この場合、関数  $g(s)$  が零点を持たないという仮定は不要になり、次の形の結果が成立する。

定理 2 (保型  $L$  関数の導関数の離散普遍性定理, [17]) 正の数  $h$  が仮定 (5) を満たすとする。このとき、 $K$  上連続で  $K$  の内部で正則な任意の  $g(s)$  と勝手な  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N \mid \sup_{s \in K} |L'(s+imh, f) - g(s)| < \varepsilon\} > 0 \quad (10)$$

が成り立つ。

この結果は、もし  $g(s)$  が  $K$  を少し膨らませた領域  $K_1$  にまで正則に解析接続できるならば、 $K_1$  における定理 1 と Cauchy の積分公式から直ちに導くことができる。しかし一般にはそういうわけにはいかないので、定理 1 の証明に平行した議論を展開する必要があるし、またその方が本質がよく見て取れる。 $L(s, \omega, f)$ ,  $P_L$  のアナロジーを導関数に対して考えてそれぞれ  $L'(s, \omega, f)$ ,  $P'_L$  と書くと、補題 2 に相当する結果として  $P'_L$  の台  $S'_L$  を決定せねばならないが、実は

$$S'_L = H(D_M) \quad (11)$$

となる。つまり  $S'_L$  は零点を持つ関数も含むのであって、この違いが定理 2 においては  $g(s)$  に非零という条件がいらぬ、という結論をもたらすのである。

式 (11) の証明は、 $S_M$  の元  $\varphi$  に対してその導関数  $\varphi'$  を対応させる  $S_M$  から  $H(D_M)$  への写像  $\Phi$  を用いて補題 2 に帰着させることによって行なわれる。 $H(D_M)$  の任意の開集合  $G$  に対して、 $\Phi^{-1}(G)$  は  $S_M$  の開集合であるが、再び Mergelyan の定理を使えば  $\Phi^{-1}(G)$  が空ではないことがわかる。よって

$$\begin{aligned} P'_L(G) &= m_H\{\omega \in \Omega \mid L'(s, \omega, f) \in G\} \\ &= m_H\{\omega \in \Omega \mid L(s, \omega, f) \in \Phi^{-1}(G)\} = P_L(\Phi^{-1}(G)) > 0 \end{aligned}$$

となり、(11) が従う。ここから定理 2 を導く議論は定理 1 のときと同様である。

類似の結果は同様にして高階導関数に対しても証明できる。導関数に対する上述のような論法は Laurinćikas の最近の研究 [12] を嚆矢とする。

筆者の論説 [19] でも紹介したように、普遍性定理には様々な応用がある。ここでは  $L'(s, f)$  の零点に関する次の結果のみ述べておく。この結果は定理 2 と Rouché の定理から容易に導出できる。

定理 3 ([17])  $\kappa/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < (\kappa+1)/2$  なる勝手な  $\sigma_1, \sigma_2$  に対し、定数  $c = c(\sigma_1, \sigma_2) > 0$  が存在して、十分大きい任意の  $N$  に対し、円板

$$\left| s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

上で  $L'(s + imh, f)$  が零点を持つような  $N$  以下の非負整数  $m$  の個数が  $cN$  以上になる。

即ち  $L'(s, f)$  は臨界線  $\Re s = \kappa/2$  の外側に多くの零点を持つことがわかる。類似の結果は  $L(s, f)$  そのものに対してはもちろん期待できないが、二個以上の twist された保型  $L$  関数の線型結合に対しては示されている ([15])。

## 参考文献

- [1] A. Kačėnas and A. Laurinčikas, On Dirichlet series related to certain cusp forms, Lith. Math. J. **38** (1998), 64-76.
- [2] R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function on the complex plane, Lith. Math. J. **40** (2000), 364-378.
- [3] R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of analytic functions, Lith. Math. J. **41** (2001), 344-350.
- [4] R. Kačinskaitė, A multidimensional discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of analytic functions, Lith. Math. J. **41** (2001), Special Issue, 76-83.
- [5] R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of meromorphic functions, Lith. Math. J. **42** (2002), 37-53.
- [6] R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem with weight for the Matsumoto zeta-function on the complex plane, Fiz. Mat. Fak. Moksl. Sem. Darb. **6** (2003), 42-51.
- [7] R. Kačinskaitė and A. Laurinčikas, A joint discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of meromorphic functions, in "Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory", A. Dubickas et al. (eds.), TEV, 2002, pp. 109-118.
- [8] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.
- [9] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Matsumoto zeta-function, J. Th. Nomb. Borbeaux **8** (1996), 143-158.

- [10] A. Laurinćikas, On limit distribution of the Matsumoto zeta-function II, *Lith. Math. J.* **36** (1996), 371-387.
- [11] A. Laurinćikas, On limit distribution of the Matsumoto zeta-function, *Acta Arith.* **79** (1997), 31-39.
- [12] A. Laurinćikas, On the derivatives of zeta-functions of certain cusp forms, preprint.
- [13] A. Laurinćikas and K. Matsumoto, The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, *Nagoya Math. J.* **157** (2000), 211-227.
- [14] A. Laurinćikas and K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, *Acta Arith.* **98** (2001), 345-359.
- [15] A. Laurinćikas and K. Matsumoto, The joint universality of twisted automorphic  $L$ -functions, *J. Math. Soc. Japan* **56** (2004), 923-939.
- [16] A. Laurinćikas, K. Matsumoto and J. Steuding, The universality of  $L$ -functions associated with new forms, *Izv. Math.* **67** (2003), 77-90.
- [17] A. Laurinćikas, K. Matsumoto and J. Steuding, The discrete universality of  $L$ -functions of new forms, preprint.
- [18] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in "Analytic Number Theory", K. Nagasaka and E. Fouvry (eds.), *Lecture Notes in Math.* vol. 1434, Springer, 1990, pp. 178-187.
- [19] K. Matsumoto, ゼータ関数の確率論的値分布論, *数学* **53** (2001), 279-296. (英訳は *Sugaku Expositions* **17** (2004), 51-71.)
- [20] J. Steuding, On the universality for functions in the Selberg class, in "Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations", D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), *Bonner Math. Schriften* 360, Univ. Bonn, 2003, n. 28, 22pp.
- [21] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Math. USSR Izv.* **9** (1975), 443-453.