数理解析研究所講究録
1513 巻 2006 年 121-130

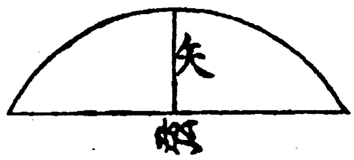
研幾算法第１問について

竹之内　脩

建部賢弘が、池田昌意「数学乗除往来」の遺題に解答を与えたものが「研幾算法」である。その第 1 問は、次のものである。

数学乗除往来四十九問之答術

一　今、弧形がある。只云う、矢若干。
問う、積幾何ぞ。
圓の率は、周 355 尺、径 113 尺を用う。



○答えて曰く、積を得る。

術に曰く、天元に一を立てて積と爲す。矢を以て相乗じて得る數に 16 を以て之に乗じ、得る數を甲位に寄せる。
○矢を列し、之を自して得る數に、これを四して弦冪に加入。共に得る數を乙位に寄せる。
○亦、矢を列し、之を自して得る數に、これを八して以て乙位を減じ、餘に弦を以て相乗じ、甲位を加入。共に得る數をこれを自して丙位に寄せる。
○矢七乗冪に乙位を相乗 183,275,520 段。乙位を四たび自乗 81 段。右二位相併せて共に得る數を丁位に寄せる。
○矢を九たび自乗 5,733,613,568 段。矢五乗冪乙位冪相乗 261,217,536 段。矢三乗冪乙位再乗冪相乗 96,337,664 段。矢冪乙位三乗冪相乗 73,573,068 段。右四位相併せて共に得る内、丁位を減じ、餘を左に寄せる。
○矢を列し、之を自乗し乙位を以て相乗じ、亦丙位を以て相乗じ、得る數を 7,3549,440 を以て之に乗じ、左に寄せたると相消して、開方式を得る。之を平方に開き、積を得て、問いに合す。

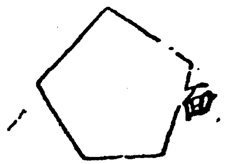
[原文には、「矢を列し、之を三たび自乗し乙位を以って相乗じ、…」とあるが、これでは、最後の結果と合わない。研幾算法演段諺解には、「三之字衍文也」とある。]

一

今有平圓弧、只云矢二尺六寸二分、弦一丈二尺、問弧積。

乃半円積法径一百一十三尺周三百五十五尺用之

二



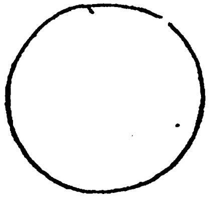
今有作五角、只云面一寸、而求積、問術。

乃問七角九角

三

今有平圓、只云如圖入面切、則五寸六寸七寸八寸九寸也、問円径。

四



今有平円積周以之分絶、或者径一寸、而周三一四二、或者径七尺、而周二十二尺、或者径五十尺、而周一百五十七尺、師曰子者径一百一十三尺、而周三百五十五尺ト云々

[illegible]

<現代記法>

弦$=a$,　矢$=c$,　弧背$=s$,　積$=S$,　径(直径)$=d$　とする。

[研幾算法]

天元$=c$

$16cS \longrightarrow$ 甲

$4c^2+a^2 \longrightarrow$ 乙

$((\text{乙}-8c^2)a+\text{甲})^2 \longrightarrow$ 丙

$183,275,520c^8\times\text{乙}+81\,\text{乙}^5 \longrightarrow$ 丁

$5,733,613,568c^{10}+261,217,536c^6\times\text{乙}^2+96,337,664c^4\times\text{乙}^3$
$+73,573,068c^2\times\text{乙}^4-\text{丁} \longrightarrow$ **左**

$73,549,440c^4\times\text{乙}\times\text{丙}$　…　**左**と相消す

開方の式を得て、平方に之を開き、積を得る。

[研幾算法演段諺解]

① $5,599,232c^5$

② $715,920c^4d$

③ $4,081,524c^3d^2$

④ $6,021,104c^2d^3$

⑤ $18,393,267cd^4$

⑥ $81d^5$

⑦ $4,596,840d^3$

$$s=\sqrt{\{①+③+④+⑤-(②+⑥)\}\div⑦}$$

解説

$$S=\frac{1}{2}\frac{1}{2}ds-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-c)a$$

である。ここでは、矢 c と、弦 a しか、与えられていないことから、これを次のように変形していく。

$$乙=4c^2+a^2=4cd$$

$$乙-8c^2=4cd-8c^2=8c(\frac{1}{2}d-c)$$

$$丙=((乙-8c^2)a+16cS)^2=(4cds)^2=16c^2d^2s^2$$

したがって、最後の $73,549,440c^2\times乙\times丙$ は、

$$73,549,440c^2\times乙\times丙=73,549,440c^2\times4\cdot cd\times16\cdot c^2d^2s^2$$

$$=2^6\times73,549,440c^5d^3s^2=2^{10}\times4,596,840c^5d^3s^2\qquad[73,549,440=2^4\cdot4,596,840]$$

となる。

問題では S を求めるようになっているが、S を直接求める式を作るのは困難である。まず、s を求め、それから S を求める式を得たものであろう。

いま、研幾算法演段諺解に与えられている s^2 の式を書くと、

$$s^2=\frac{1}{4,596,840d^3}\times$$
$$(5,599,232c^5-715,920c^4d+4,081,524c^3d^2+6,021,104c^2d^3$$
$$+18,393,267cd^4-81d^5)$$

となる。この分母の 4596840 という数は、$=360\cdot113^2$ である。また、

$$5,599,232=5,733,613,568/2^{10},\quad 715,920=183,275,520/2^8$$

$$4,081,524=261,517,536/2^6,\quad 6,021,104=96,337,664/2^4$$

$$18,393,267=73,573,067/2^2$$

これを上式の右辺 $2^{10}\times4596840c^5d^3s^2$ に代入した結果は、

$$2^{10}\cdot4596840c^5d^3\times\frac{1}{4,596,840d^3}\times(5,599,232c^5-715,920c^4d+4,081,524c^3d^2$$
$$+6,021,104c^2d^3+18,393,267cd^4-81d^5)$$

$$=2^{10}\cdot5,599,232c^{10}-2^8\cdot715,920\cdot2^2c^9d+2^6\cdot4,081,524\cdot2^4c^8d^2$$
$$+2^4\cdot6,021,104\cdot2^6c^7d^3+2^2\cdot18,393,267\cdot2^8c^6d^4-81\cdot2^{10}c^5d^5$$

$$=5,733,613,568c^{10}-183,275,520\cdot c^84cd+261,217,536\cdot c^64^2c^2d^2$$
$$+96,337,664\cdot c^44^3c^3d^3+73,573,068\cdot c^24^4c^4d^4-81\cdot4^5c^5d^5$$

これが、研幾算法の術に、左として与えられている式

$$5,733,613,568c^{10}+261,217,536c^6\times乙^2+96,337,664c^4\times乙^3$$
$$+73,573,068c^2\times乙^4-丁$$

である。

以下では、円の直径 $d = 1$ とする。

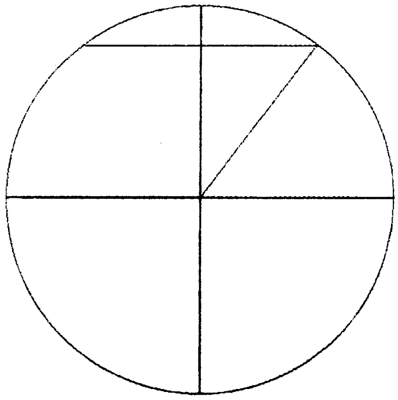
現代の計算では、弧の長さは、

$$s = \cos^{-1}(1 - 2c)$$

として求められる。。

そこで、建部の式による値と、

この式による値を比較してみよう。

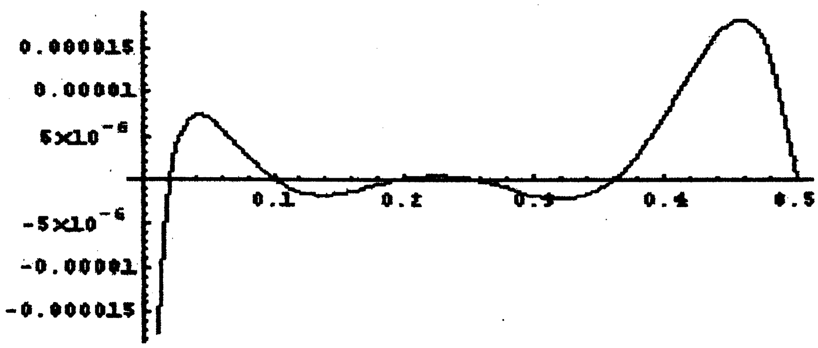


ただし、前者では、弧の長さそのものではなく、

$$\div \text{円周率} \times \frac{355}{113}$$

とした値が使われている。これは、問題文に「圓の率は、周 355 尺、徑 113 尺を用う」とあるのに従ったものであろう。

矢の長さ c に対して、前者で計算した弧の長さ s の値を $tk(c)$、後者で計算した s の値に $\frac{1}{3.14159265359} \times \frac{355}{113}$ を乗じた値を $ac(c)$ として、$tk(c) - ac(c)$ のグラフを描くと、次のようになる。



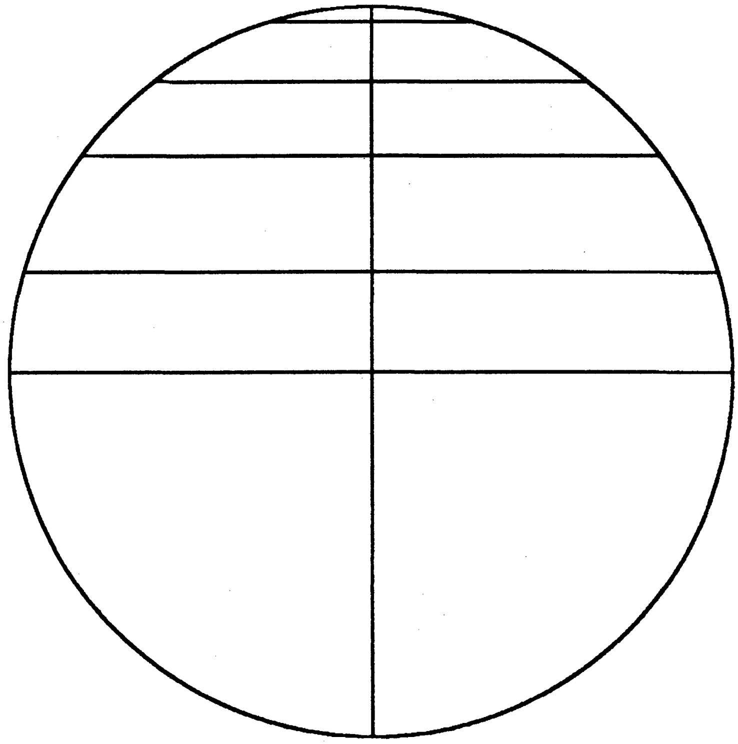
(この値は、10^{-5} 程度のものであることに注意。)

これで見ると、$c = 0.02,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.25,\ 0.36,\ 0.5$ に対しては、両者一致する値が使われている。

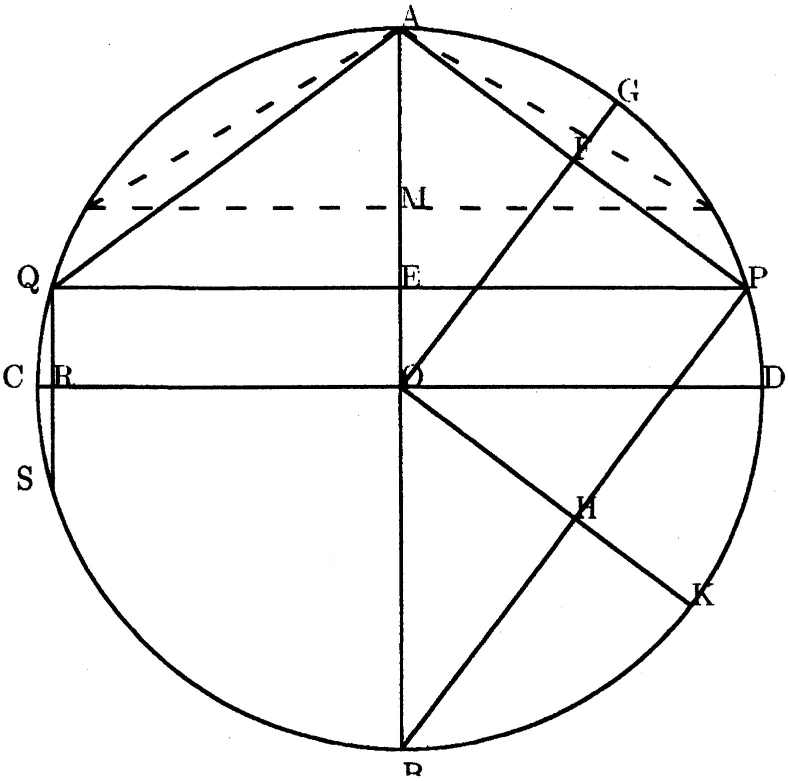
c	0.02	0.1	0.2	0.25	0.36	0.5
$tk(c)$	0.28379410812	0.64350115715	0.92729530077	1.04719764012	1.28700221564	1.57079646018
$ac(c)$	0.28379413331	0.64350116344	0.92729529674	1.04719764012	1.28700232687	1.57079646018

ここで、c に対してとった 0.1, 0.2, 0.25, 0.5 の値は自然であるが、0.02, 0.36 は、やや不自然で、どうしてこの値が用いられたのであろうか。

0 から 50 までの整数で、$x^2+y^2=50^2$ を満たすものを求めると、
14, 30, 40, 48 の 4 通りあり、これから、矢の長さとして、
0.36, 0.2, 0.1, 0.02 を用いることが考えられた、というのが、一つの解釈である。



また、次の解釈もある。(横塚啓之による)



直径＝1 とする。
円周上の点 P
AP=0.6, BP=0.8
矢 HK=0.2
矢 FG=0.1
矢 AE=0.36
BE=0.64
EP=0.48
矢 CR=0.02
矢 AM=0.25

建部は、このようにデータを得た上で、s^2 に対する近似の多項式を、どのようにして作ったのであろうか。

いま、現代の計算法でこの式を作ってみると、次のようになる。(Mathematica による)

$$c = \{.02.\ .1,\ .2,\ .25,\ .36,\ .5\}$$

$$s = \{0.28379410812,\ 0.64350115715,\ 0.92729530077,\ 1.04719764012,\ 1.28700221564,\ 1.57079646018\}$$

$$\begin{aligned}
t &= s^2 \times 360 \times 113^2 \\
&= \{3.70225337154 \times 10^5,\ 1.90352266435 \times 10^6,\ 3.95271503424 \times 10^6, \\
&\qquad 5.04100000000 \times 10^6,\ 7.61408949000 \times 10^6,\ 1.13422500000 \times 10^7\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= (t_2 - t_1)/(c_2 - c_1) \\
&= 1.916621659 \times 10^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (t_3 - (t_1 + a_1(c_3 - c_1)))/(c_3 - c_1)/(c_3 - c_2) \\
&= 7.36503949417 \times 10^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \Big(t_4 - (t_1 + a_1(c_4 - c_1) + a_2(c_4 - c_1)(c_4 - c_2))\Big)/(c_4 - c_1]/(c_4 - c_2)/(c_4 - c_3) \\
&= 4.89912151232 \times 10^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \Big(t_5 - (t_1 + a_1(c_5 - c_1) + a_2(c_5 - c_1)(c_5 - c_2) + a_3(c_5 - c_1)(c_5 - c_2)(c_5 - c_3))\Big) \\
&\qquad /(c_5 - c_1)/(c_5 - c_2)/(c_5 - c_3)/(c_5 - c_4) \\
&= 4.49136563427 \times 10^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= \Big(t_6 - (t_1 + a_1(c_6 - c_1) + a_2(c_6 - c_2)(c_6 - c_2) + a_3(c_6 - c_1)(c_6 - c_2)(c_6 - c_3) \\
&\qquad + a_4(c_6 - c_1)(c_6 - c_2)(c_6 - c_3)(c_6 - c_4))\Big) \\
&\qquad /(c_6 - c_1)/(c_6 - c_2)/(c_6 - c_3)/(c_6 - c_4)/(c_6 - c_5) \\
&= 5.59923241414 \times 10^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tk(x) &= t_1 + a_1(x - c_l) + a_2(x - c_1(x - c_2) + a_3(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \\
&\qquad + a_4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) + a_5({}_x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)(x - c_5) \\
&= -81.0000660700607078 + 1.8393267003701597 \times 10^7 x + 6.0211039548790727 9 \times 10^6 x^2 \\
&\quad + 4.08152422806646786 \times 10^6 x^3 - 715920.510880200211 x^4 + 5.59923241414000 \times 10^6 x^5
\end{aligned}$$

このようにして、次の式が得られた。¶

$$tk(x) = -81 + 18,393,267x + 6,021,104x^2 + 4,081,524x^3 - 715,920x^4 + 5,599,232x^5$$

¶ 上の計算では、一々の数値に、小数第 11 位までの長い数字が使われている。このようにしないと、この最後の結果は得られない。この時代、ソロバンを使うので、このような長桁はあまり苦にならなかったのであろうか。なお、小数第 11 位までというのは、關の括要算法巻貞 圓率解において、圓の定周を小数第 11 位までにしていることによると思われる。

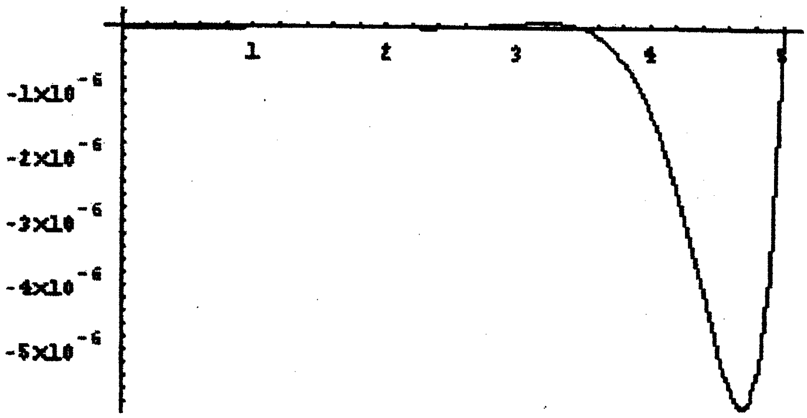
ここでは、Newton の補間式といわれる方法を使っている。

しかし、和算で、この時代に補間式を作る計算は他にない。建部は、どのようにして、この補間式を作ったのであろうか。

關孝和の括要算法巻貞の求弧術には、補間式を求める一つの方法が述べられている。いま、その方法によって、上のデータを用いて補間式を作ってみると、次の式が得られる。

$$sk(x) = \frac{1}{(10-x)^5} * (4000000\,x - 29235211.9235888672\,x^2$$
$$+55258118.162498917\,x^3 - 44152322.4022433602\,x^4$$
$$+17081125.218674118\,x^5 - 3147408.6912053103\,x^6$$
$$+220151.457073671608\,x^7)$$

この式によって、建部の場合と同様のグラフを描くと、次のようになる。



この關の補間式は、次のようにして作られた。

$$\begin{aligned} s^2 &= a^2 + A_0x^2 - A_1\frac{d-2x}{d-x}x^2 + A_2\frac{(d-2x)(x-c_1)}{(d-x)^2}x^2 \\ &- A_3\frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)}{(d-x)^3}x^2 + A_4\frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}{(d-x)^4}x^2 \\ &- A_5\frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}{(d-x)^5}x^2 \end{aligned}$$

ここで、

$$a^2 = 4x(d-x), \qquad A_0 = \frac{355^2}{113^2} - 4$$

で、$a^2 + A_0c^2$ の部分は、堅亥録などにある s^2 の式を、$x = \dfrac{d}{2}$ の場合に正確にあてはまるように、A_0 の値を定め、そして、上の式にあてはまるように、次々、係数 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の値を定めたものである。

上の式では、分母に 113^2 および $(d-x)^k$ $(k=1,2,3,4,5)$ が出てくる。径率を 113 としているので、弧の長さとしては 113^2 を掛ける。また、$(d-x)^5$ を掛けると、次の式になる。ただし、$P_k = 113^2 \cdot A_k$ $(k=1,2,3,4,5)$

$$\begin{aligned} 113^2\cdot(d-x)^5 s_0(x) &= 113^2\cdot(d-x)^5 a^2 + P_0 x^2 (d-x)^5 \\ &- P_1(d-2x)(d-x)^4 x^2 \\ &+ P_2(d-2x)(x-c_1)(d-x)^3 x^2 \\ &- P_3(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(d-x)^2 x^2 \\ &+ P_4(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(d-x)x^2 \\ &- P_5(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)x^2 \end{aligned}$$

これを、次のスキームの形に直してみる。ただし、ここでは、$d=1$ とした。
表中、2 重線の右側は、上式の右辺を表し、縦に並んでいるものの積をとり、それを加える、とする。

$113^2(1-x)^5 s^2$	$113^2\cdot a^2+P_0x^2$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$

$-P_1(1-2x)x^2$	$+P_2(1-2x)x^2$	$-P_3(1-2x)x^2$	$-P_4(1-2x)x^2$	$-P_5(1-2x)x^2$
$(1-x)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_3)$	$(x-c_3)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_4)$

ここで、建部は、両辺にかかる $(1-x)$ の累乗は不要とし、また、右辺の最初の項

$$113^2\cdot a^2+P_0x^2$$

は、$x=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $113^2\times 1.57079646018$ を用い、それに伴って右辺の後の項にかかる x^2 をすべて取り去って、次の形にする。

$113^2 s^2$	$113^2\times 1.57079646018$

$-P_1(1-2x)$	$+P_2(1-2x)$	$-P_3(1-2x)$	$-P_4(1-2x)$	$-P_5(1-2x)$
	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$
		$(x-c_2)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$
			$(x-c_3)$	$(x-c_3)$
				$(x-c_4)$

このようにして、(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の値は、当然上のものとは異なる)

$$\begin{aligned} tk(x) \;=\; & \frac{1}{113^2}\Big(113^2 \times 1.57079646018 \\ & -P_1(1-2x) \\ & +P_2(1-2x)(x-c_1) \\ & -P_3(1-2x)(x-c_1)(x-c_2) \\ & -P_4(1-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3) \\ & -P_5(1-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)\Big) \end{aligned}$$

の式を作ったものと考えられる。