数理解析研究所講究録
1514巻 2006年 141-147

孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーと ヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法

阿部 隆行
新潟大学大学院自然科学研究科
TAKAYUKI ABE
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIV.

田島 慎一
新潟大学工学部情報工学科
SHINICHI TAJIMA
DEPARTMENT OF INFORMATION ENGINEERING, NIIGATA UNIV.

1 はじめに

特異点の性質を研究する際(本研究では原点を孤立特異点として持つものを考える), 定義多項式のヤコビイデアルに対するスタンダード基底, グレブナー基底を求めることが必要となることが多い. これらの基底を求める方法としては, 冪級数環における Mora のスタンダード基底アルゴリズム, あるいは多項式環における準素イデアル分解アルゴリズムの利用が挙げられる. しかし, これら既存のアルゴリズムには, アルゴリズムが複雑で計算量が多いことや, 定義多項式にパラメータが含まれている場合には計算が困難という計算上の問題点がある.

そこで, 本研究では Grothendieck 双対性に注目することで, これらの問題を考察した. 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーを用いることでグレブナー基底の新しい計算法を確立し, 上記の問題を解決した.

2 代数的局所コホモロジー

本アルゴリズムは n 変数の定義多項式に対応しているが, 以下では簡単のため 2 次元の場合について説明していくこととする.

$\sum \frac{c_{i,j}}{x^i y^j}$ なる形の有理関数を考える. 2つの有理関数 $\sum \frac{c_{i,j}}{x^i y^j}$ と $\sum \frac{d_{i,j}}{x^i y^j}$ が次を満たすとき, これら 2 つの有利関数は同値であると定める.

$$\exists \begin{cases} p(x,y), a(x,y), b(x,y) \in K[x,y] \\ m, n \in N \end{cases} \quad s.t. \ \sum \frac{c_{i,j} - d_{i,j}}{x^i y^j} = p(x,y) + \frac{a(x,y)}{x^m} + \frac{b(x,y)}{y^n}$$

この同値関係による $\frac{c_{i,j}}{x^iy^j}$ の同値類を $[\frac{c_{i,j}}{x^iy^j}]$ で表すことにする.

この時，原点に台を持つ代数的局所コホモロジー群を

$$H^2_{[0,0]}(K[x,y]) = \{\sum_{i,j}^{\text{有限和}}[\frac{c_{i,j}}{x^iy^j}]|c_{i,j} \in \mathbf{K}\}$$

で定めることができる．この代数的局所コホモロジーと多項式の積は，次の計算ルールに従う．(相対 Cech コホモロジー群の定義より明らか)

$$x^\alpha y^\beta[\frac{1}{x^iy^j}] = \begin{cases} [\frac{1}{x^{i-\alpha}y^{j-\beta}}] & (i > \alpha \text{ かつ } j > \beta) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

さて，原点に孤立特異点を持つような多項式 $f \in K[x,y]$ が与えられたとする．f に対し $H^2_{[0,0]}(K[x,y])$ の要素であり，次のようにヤコビイデアル $I = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >$ により annihilate されるもの全体を H_f とおく.

$$H_f = \{\eta \in H^2_{[0,0]}(K[x,y])|\frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0, \frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0\}$$

H_f は有限次元 K ベクトル空間の構造をもつ．本稿ではこの H_f を，f に付随した代数的局所コホモロジーということにする．$\eta \in H_f$ に対して次の補題が成り立つ.

補題 2.1

$$\eta \in H_f \Rightarrow x\eta \in H_f \text{ かつ } y\eta \in H_f$$

3 代数的局所コホモロジーの求め方

代数的局所コホモロジーの組であり，ベクトル空間 H_f の基底となるものを求める.
まず，$[\frac{1}{x^iy^j}]$ なる形の代数的局所コホモロジーで，H_f に属すものを，

$$\Lambda_M = \{[\frac{1}{x^iy^j}] \in H^2_{[0,0]}(K[x,y]) \mid \frac{\partial f}{\partial x}[\frac{1}{x^iy^j}] = 0, \frac{\partial f}{\partial y}[\frac{1}{x^iy^j}] = 0\}$$

とおく．Λ_M は，$\frac{\partial f}{\partial x}[\frac{1}{x^iy^j}] = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}[\frac{1}{x^iy^j}] = 0$ を解けば簡単に求まる．(実際には３．３に述べるように，単項式と代数的局所コホモロジーの双対関係 $x^iy^j \to [\frac{1}{x^{i+1}y^{j+1}}]$ を用いることで Λ_M を求める)

次に，２つ以上の項の線形結合からなる代数的局所コホモロジーで，H_f に属すものを求めるわけであるが，アルゴリズミックに求める為に，$H^2_{[0,0]}(K[x,y])$ に項順序を定めておく．この線形結合の形をした代数的局所コホモロジーに対して，順序が一番大きい項を主項，それ以外を低階項と呼ぶことにする．主項の係数は 1 としてよい。先程定めた項順序に関して，順序が一番小さい項から順番に追っていき，主項候補を決め，主項候補より順序が低い項の中から後述する方法で低階項候補を選択する．そして，

$$\eta = \text{主項} + \sum(\text{未定係数} \times \text{低階項})$$

とおき，$\frac{\partial f}{\partial x}\eta=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\eta=0$ を解くことにより，低階項の未定係数を求め，η を決定する．今度は，先程の主項候補の次に順序が大きい項から順番に追っていくことで新たに主項候補を選択し，同様の計算をする．このように主項の順序が小さいようなものから順に，逐次基底を構成していく．求めたものを

$$\Lambda_S=\{\eta=[\frac{1}{x^iy^j}](\text{主項})+\Sigma[\frac{c_{i,j}}{x^iy^j}](\text{低階項})\in H^2_{[0,0]}(K[x,y])\mid\frac{\partial f}{\partial x}\eta=0,\frac{\partial f}{\partial y}\eta=0\}$$

とおく．

3.1　主項候補の選択における計算の効率化

主項候補を選択する際に，次の２つの条件を用いて計算を効率化する．

順序が一番小さい項から項順序に従って項を追っていくわけであるが．現在注目している項は，次の２種類の項のいずれかである．

$$\begin{cases}\Lambda_M\text{の元}\\ \quad\text{以外の項}\end{cases}$$

現在注目している項が主項候補になるか否かということがあらかじめ分かれば，主項候補にならない場合の余計な計算を避けることができる．Λ_M の元は単項の形の H_f の基底なので，明らかに Λ_S に入るわけがない．よって以下のようになる．

条件１：主項候補になる項とならない項

	主項候補
Λ_M	×
以外の項	○

これより，例えば主項候補を選択する際に，注目している項が Λ_M の元であれば，注目する項を次の項順序の項にしてよいことがわかる．

補題 2.1 より次の主項になるための必要条件が導出できる．

条件２：$[\frac{1}{x^iy^j}]$ が主項になるための必要条件

$$x[\frac{1}{x^iy^j}]\text{ と }y[\frac{1}{x^iy^j}]\text{ がそれぞれ}\begin{cases}\Lambda_M\\ or\\ 0\\ or\\ \text{既に求まった主項}\end{cases}$$

3.2 低階項候補の選択における計算の効率化

主項候補より順序の低い項が低階項になる可能性があるわけであるが，主項候補より順序の低い項は，次の4種類の項のいずれかである．

$$\begin{cases} \Lambda_M \text{の元} \\ \text{既に求まった主項} \\ \text{既に求まった低階項} \\ \text{NRT(No Role Term 以外の項)} \end{cases}$$

これらが低階項になるか否かがあらかじめ分かれば，余計な計算を避けることができる．本研究により以下のことがわかった．

条件3：低階項候補になる項とならない項

	低階項候補
Λ_M	×
既に求まった主項	×
既に求まった低階項	○
NRT	○

また，補題の $\eta \in H_f$ であるための 必要条件より以下が導出できる．

条件4：$[\frac{1}{x^i y^j}]$ が低階項になるための必要条件

$$x[\frac{1}{x^i y^j}] \text{ と } y[\frac{1}{x^i y^j}] \text{ がそれぞれ} \begin{cases} \Lambda_M \\ or \\ 0 \\ or \\ \text{既に求まった主項} \\ or \\ \text{既に求まった低階項} \end{cases}$$

低階項候補の選び方が冗長であると，連立方程式 $\frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0$ を解く際に，未知係数の個数が多くなり計算量が多くなる．冗長な未知係数は0になるわけなので，この余分な計算をなくすために次の低階項候補最少選択アルゴリズムを提案する．

低階項候補最少選択アルゴリズム

1. 順序が主項項補より低い項から，条件1を満たす項，すなわち低階項とNRTを全て選択．これらを低階項候補とする．
2. 条件3を用いて低階項候補を削減
3. $\eta =$ 主項 $+ \Sigma(c_{i,j} \times$ 低階項$)$ とおく

4. 補題の $\eta \in H_f$ であるための必要条件である $x\eta \in H_f, y\eta \in H_f$ を満たすように低階項候補を更に削減．これで低階項候補の数がほぼ最少になる

3.3 H_f の基底を求める手順

1. Λ_M を求める
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ に出てくる項を結んだ枠内に存在する単項式を選択
   (b) $x^i y^j \to [\frac{1}{x^{i+1}y^{j+1}}]$ のようにその単項式の双対を取る．これらが Λ_M の元となる．
2. Λ_S を求める
   (a) 項順序を指定
   (b) 主項候補の選択
   項順序の低い項から順番に追っていき，条件 1 と条件 2 を満たす項を選択
   (c) 低階項候補の選択
   低階項候補最少選択アルゴリズムを用いて冗長なく低階項候補を選択する，
   (d) 連立方程式 $\frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0, \frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0$ を解いて，低階項の係数 $c_{i,j}$ を求め，η を決定

注：ベクトル空間 H_f の次元は f の原点におけるミルナー数と等しい．従って上記の方法により，ミルナー数も求めることができる．

4 Grothendieck 双対性

ヤコビイデアル I を $I = I_0 \cap I_1$(ただし $V(I_0) = (0,0)$) のように準素イデアル分解したとき，$p(x,y) \in I_0$ となるための必要十分条件は，Grothendieck 双対性より，次で与えられる．

$$p(x,y) \in I_0 \Leftrightarrow \mathrm{Res}_O(p(x,y),\eta) = 0, \forall \eta \in H_f$$

すなわち，

$$p(x,y) \in I_0 \Longleftrightarrow \quad (p(x,y) \times \eta_i \text{における} [\frac{1}{xy}] \text{の係数}) = 0 (i = 1,\ldots,\mu)$$
$$(\text{ここで} \{\eta_1 \ldots \eta_\mu\} \text{は} H_f \text{の基底})$$

5 グレブナー基底を求める

先程求めた代数的局所コホモロジーを用いるわけであるが，まず Λ_M を求めたときと逆に単項式の方へ双対をとり $([\frac{1}{x^i y^j}] \to x^{i-1}y^{j-1})$，イデアル I_0 に属すための条件を用いてグレブナー基底を求める．このとき，

$$\begin{cases} \Lambda_M の元の双対を取った単項式全部 \\ \Lambda_S の元に出てくる各項の双対を取った単項式全部 \\ \quad と \quad 以外の単項式全部 \end{cases}$$

とおくと，イデアル I_0 に属すための条件より，　は明らかにイデアル I_0 に属さなくて，　はこれら単項式の作る一次結合の形でイデアル I_0 に属す可能性があり，　は明らかに単項でイデアル I_0 に属す．

5.1 グレブナー基底を求める手順

1. $[\frac{1}{x^i y^j}] \to x^{i-1}y^{j-1}$ のように代数的局所コホモロジーに出てくる項の全ての双対をとる
2. グレブナー基底の候補となる多項式 (２つ以上の項を持つ) に表われる項を選択
3. その候補の各単項式の係数を未知係数とし，それらの一次結合として多項式を作成
4. 作成した多項式がイデアル I_0 に属すための条件より，連立方程式を求め，その線形の連立方程式を解くことでグレブナー基底を求める．
5. 　の単項式の中で x 倍，y 倍しても表すことができない項を，単項式の形のグレブナー基底の候補として加える．
6. 求めたグレブナー基底に対して項順序を与え，reduced することによって reduce グレブナー基底を求める

6 グレブナー基底の計算時間の測定

提案したアルゴリズム (代数的局所コホモロジーを用いた新しい計算法) の計算時間を測定した．(単位：sec)

$$定義多項式 \begin{cases} f = (x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^3 (ミルナー数：15) \\ f = (x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^5 (ミルナー数：19) \\ f = (x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^{10} (ミルナー数：29) \\ f = (x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^{20} (ミルナー数：49) \\ f = (x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^{30} (ミルナー数：69) \end{cases}$$

代数的局所コホモロジーの計算	0.015	0.047	0.906	5.906	39.000
グレブナー基底の計算	0.078	0.156	31.625	66.578	919.469
合計時間	0.093	0.203	32.531	72.484	958.469

7 考察

H_f の基底を求めるステップの計算は，低階項最少選択アルゴリズムを用いることにより効率化をすることができた．それに対して，グレブナー基底を求めるステップに計算時

間が必要なことがわかる．これはグレブナー基底の候補を求める際に問題のミルナー数が大きくなるに伴い解く連立方程式のサイズが大きくなるためである．

この方法を利用すると，ボトルネックとなっていた準素イデアル分解をしなくて済み，S多項式の計算をする必要もなくなるので，グレブナー基底を求める計算時間がかなり短縮される．

8 まとめ

代数的局所コホモロジーを用いたヤコビイデアルのグレブナー基底の新しい計算法を確立し，数式処理ソフト Risa/Asir に実装 (n 変数の定義多項式に対応) した．さらに，低階項候補最少選択アルゴリズムを提案することにより，代数的局所コホモロジーを求めるステップの計算量を軽減した．

9 今後の課題

H_f の基底を求めるステップのプログラムの最適化と，H_f の基底からヤコビイデアル I_0 のグレブナー基底を求めるステップの計算量を軽減するアルゴリズムの考案．また，代数的局所コホモロジーを用いたヤコビイデアルのスタンダード基底の計算法の確立を今後の課題とする．

参考文献

[1] T. Abe and S. Tajima：Algorithm for local cohomology classes attached to an isolated hypersurface singularity - toward computing of standard bases -ACA'2005 Conference on Applications of Computer Algebra, Nara.

[2] H. Grassmann：On an implementation of standard bases and syzygies in SINGULAR, AAECC7, 235-249(1996).

[3] A. Grothendieck：Theoreme de dualite pour les faisceaux algebriques coherents, Seminaire Bourbaki **149**, Paris, 1957.

[4] A. Grothendieck：Local Cohomorogy, Lecture Notes in Math, **41**(1967), Springer.

[5] 宮下真依：孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの計算法，平成16年度新潟大学卒業論文．

[6] Y. Nakamura and S. Tajima：O_n weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiguasihomogeneous singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics, Simgularities in Geometry and Topology, to appear.

[7] 野呂正行，横山和弘：グレブナー基底の計算 基礎篇—計算代数入門，東京大学出版会．

[8] 田島慎一：零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底の計算について，京都大学数理解析研究所講究録 1456 Computer Algebra(2005),126-132.

[9] S. Tajima and Y. Nakamura：Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. 41(2005),1-10.