数理解析研究所講究録
1514巻 2006年 15-21

従変数に重みをつけた拡張 Hensel 構成と Newton 多面体

小副川 健 (Takeshi Osoekawa)*
筑波大学 数理物質科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki)†
筑波大学 数学系
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

Hensel 構成は多変数多項式の因数分解のべき級数根計算などに用いられ、計算代数における重要な算法の一つであるが、展開点が特異点の場合には破綻する。展開点が特異点の場合 2 変数多項式用の（1 変数）Puiseux 級数をそのまま多変数化した多変数 Puiseux 級数（各変数について分数べき級数となる）があるが [Mcd95]、それはべき級数根としては扱いにくいものである。一方、Kuo[Kuo89] や Sasaki-Kako[SK99] らによって導入された拡張 Hensel 構成は、特異点での Hensel 構成を可能にし、特異点を経由する解析接続 [SS96] や、多変数多項式の因数分解 [Ina05]、解析的因数分解 [Iwa03, Iwa04] などに応用されている。

[SK99] は、拡張 Hensel 構成において従変数の重みを変えれば解析的振舞の異なる無限級数因子（Hensel 因子と呼ぶ）が得られることを述べている。しかしながら、従来は単純な全次数変数 (重みは $(1,1,\ldots,1)$) を導入し、その指数を位数とする簡単な場合のみが扱われており、従変数の重みに関してはほとんど議論がなされていない。本稿では従変数の重みと Hensel 因子との関係を考察する。

2 拡張 Hensel 構成の概要と算法

ℓ を 2 以上の自然数とし、$x,u_1,\ldots,u_\ell$ を不定元とする。x を主変数、$u_1,\ldots,u_\ell$ を従変数と呼び、$(\boldsymbol{u})=(u_1,\ldots,u_\ell)$ と略記する。不定元の指数を $e_x,e_1,\ldots,e_\ell\in\mathbf{N}$ で表し、$e_u=(e_1,\ldots,e_\ell)\in\mathbf{N}^\ell$ を多重指数として $\boldsymbol{u}^{e_u}=u_1^{e_1}\cdots u_\ell^{e_\ell}$ と略記する。$F(x,\boldsymbol{u})$ は $(\ell+1)$ 変数多項式環 $\mathbf{C}[x,u_1,\ldots,u_\ell]=\mathbf{C}[x,\boldsymbol{u}]$ の多項式とし、$F(x,\boldsymbol{u})=\sum_{(e_x,e_u)}c_{(e_x,e_u)}x^{e_x}\boldsymbol{u}^{e_u}$ と表す。F の台 (support) を $T(F)=\{x^{e_x}\boldsymbol{u}^{e_u}\mid c_{(e_x,e_u)}\neq 0\}$ とする。$F(x,\boldsymbol{u})$ の x に関する次数を n とし、$F(x,\boldsymbol{u})=f_nx^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_0$（ただし $f_i\in\mathbf{C}[\boldsymbol{u}]$）と表す。以下では $F(x,\boldsymbol{u})\in\mathbf{C}[x,\boldsymbol{u}]$ は x についてモニックな多項式とする（すなわち $f_n=1$）。

$\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_\ell)\in\mathbf{N}_0^\ell$ ($\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$) とし、$F(x,\boldsymbol{u})$ に対して次の変換を施す。

$$u_i\mapsto t^{w_i}u_i \qquad (i=1,\cdots\ell)$$

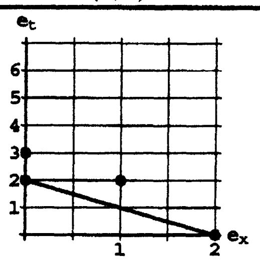
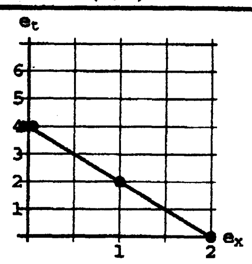
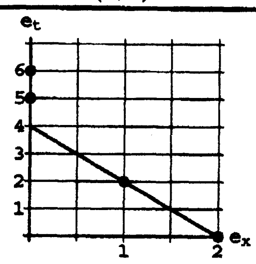
$\boldsymbol{w}$ を（従変数の）重みベクトルという。

*osoken@math.tsukuba.ac.jp
†sasaki@math.tsukuba.ac.jp

t の指数を $e_t \in \mathbb{N}$ と表すと、e_t は F の各項の従変数の重みつき全次数となる。(e_x, e_t)-平面上に変換後の各項に対応した点をプロットし、その凸包を取る。F はモニックゆえ、この凸包の下辺の右端は重みベクトルによらず点 $(n, 0)$ である。凸包の下辺のうち点 $(n, 0)$ を通る下辺を延長した直線を Newton 線と呼ぶ。Newton 線と e_t 軸との交点を $(0, \mu)$ とすると、Newton 線上にプロットされた項は $((\mu/n)e_x + e_t)$-斉次である。これらの項の和を **Newton 多項式**と呼び、$F_{\rm New}$ と表す。

次の例は、重みベクトルをいくつか与えたとき、(e_x, e_t)-平面上の各項のプロット点と Newton 多項式がそれぞれどのように変わるかを示したものである。

例 1. $F(x, u, v) = x^2 + v^2 x - u^2 - 2uv^2$ で重み $\boldsymbol{w} = (w_u, w_v)$ を三通りに選ぶ。

$\boldsymbol{w} = (1, 1)$ の場合	$\boldsymbol{w} = (2, 1)$ の場合	$\boldsymbol{w} = (3, 1)$ の場合
		
$F_{\rm New} = x^2 - t^2u^2$	$F_{\rm New} = x^2 + t^2v^2x - t^4u^2 - 2t^4uv^2$	$F_{\rm New} = x^2 + t^2v^2x$

■

この例が示すように、重みを変えると Newton 多項式は変わるのが普通である。重みと Newton 多項式の関係は第 4 章で詳しく見る。以下では重みは固定して扱い、簡単のため t を省略して表記する。

$\hat{\mu}, \hat{n} \in \mathbb{N}$ を $\mu/n = \hat{\mu}/\hat{n}$ かつ $\gcd(\hat{\mu}, \hat{n}) = 1$ を満たすように定める。イデアル $I_k \subset \mathbb{C}[\boldsymbol{u}][x, t], k \in \mathbb{N}$, を次式のように定める。

$$I_k = \langle x^n t^0, x^{n-1} t^{\mu/n}, \ldots, x^0 t^{\mu} \rangle \times \langle t^{k\hat{n}} \rangle$$

$F_{\rm New}$ を次式を満たすように因数分解する。

$$\begin{cases} F_{\rm New}(x, \boldsymbol{u}) = G_1^{(0)}(x, \boldsymbol{u}) \cdots G_r^{(0)}(x, \boldsymbol{u}) & (r \geq 2) \\ \gcd(G_i^{(0)}, G_j^{(0)}) = 1 & ({}^\forall i \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

ここで、因数分解は従変数の代数関数体の範囲まで拡大してもよいし、多項式の範囲での分解に止めてもよい（$r = 1$ の場合、すなわち $F_{\rm New}(x, \boldsymbol{u}) = [G_1^{(0)}(x, \boldsymbol{u})]^m$ の場合には入力多項式の変換が必要となるが、それについては [SI00] などを参照されたい）。以下では $r \geq 2$ とする。$G_1^{(0)}, \ldots, G_r^{(0)}$ は互いに素なので、Euclid の拡張互除法を用いて、次式を満たす $W_1^{(l)}, \ldots, W_r^{(l)}$ が計算できる。

$$\begin{cases} W_1^{(l)} \dfrac{F_{\rm New}(x, \boldsymbol{u})}{G_1^{(0)}(x, \boldsymbol{u})} + \cdots + W_r^{(l)} \dfrac{F_{\rm New}(x, \boldsymbol{u})}{G_r^{(0)}(x, \boldsymbol{u})} = x^l & (l < n) \\ \deg_x(W_i^{(l)}) < \deg_x(G_i^{(0)}) & (i = 1, \ldots, r) \end{cases} \tag{2}$$

$W_1^{(l)}, \ldots, W_r^{(l)}$ を **Moses-Yun 補間式**と呼ぶ。Moses-Yun 補間式は初期因子、すなわち Newton 多項式の因子からのみ決まっている。

Moses-Yun 補間式を使い、$F(x, \boldsymbol{u})$ の級数因子 $G_1^{(k)}, \ldots, G_r^{(k)}$ を $k = 0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \cdots$ と逐次的に構成する方法を簡単に説明する。まず

$$\delta F^{(k)} \equiv F - G_1^{(k-1)} \cdots G_r^{(k-1)} \qquad (\mathrm{mod}\ I_{k+1}) \tag{3}$$

なる式で k 次残差を計算し、次式のように主変数に関する項和の形にまとめる。

$$\delta F^{(k)} = \delta f_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + \cdots + \delta f_0^{(k)} x^0 \tag{4}$$

各因子 $G_i^{(k)}$ に対して

$$G_i^{(k+1)} = G_i^{(k)} + \sum_{l=0}^{n-1} \delta f_l^{(k)} W_i^{(l)} \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{5}$$

と定めると、Moses-Yun 補間式の性質より、これらは

$$G_1^{(k)}(x, \boldsymbol{u}) \cdots G_r^{(k)}(x, \boldsymbol{u}) \equiv F(x, \boldsymbol{u}) \qquad (\mathrm{mod}\ I_{k+1}) \tag{6}$$

を満たすことが分る。この構成は $k \to \infty$ まで成立するので、次式が成立する。

$$G_1^{(\infty)}(x, \boldsymbol{u}) \cdots G_r^{(\infty)}(x, \boldsymbol{u}) = F(x, \boldsymbol{u}) \tag{7}$$

$G_i^{(k)}(x, \boldsymbol{u})$ および $G_i^{(\infty)}(x, \boldsymbol{u})$ を **Hensel 因子**と呼ぶ。

3 重みを変えても Newton 多項式が不変な場合

例 1 で与えた三つの重みではそれぞれ異なる Newton 多項式が得られたが、例えば $\boldsymbol{w} = (4, 1)$ に対する Newton 多項式は $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ の場合と同じものである。次の例は二つの重みで同じ Newton 多項式が得られた場合の、それぞれの拡張 Hensel 構成の結果である。

例 2. $F(x, u_1, u_2, u_3) = x^2 - u_1^2 + u_2^2 + u_2 u_3$ とする。

重みが $\boldsymbol{w} = (1, 3, 1)$ の場合、Newton 多項式とその分解は $F_{\mathrm{New}} = x^2 - u_1^2 = (x + u_1) \times (x - u_1)$ となる。初期因子をそれぞれ $G_1^{(0)} = x + u_1,\ G_2^{(0)} = x - u_1$ とおく。

一方、$\tilde{\boldsymbol{w}} = (1, 2, 3)$ の場合、Newton 多項式は $\tilde{F}_{\mathrm{New}} = x^2 - u_1^2 = (x + u_1) \times (x - u_1)$ となり、F_{New} と等しい。$\tilde{G}_1^{(0)} = x + u_1,\ \tilde{G}_2^{(0)} = x - u_1$ とおく。これらを用いて Hensel 構成を実行してみる。

$k = 1, 2$ のとき、どの Hensel 因子も項を取り込まない。$k = 3$ のとき

$$\begin{array}{ll} G_1^{(3)} = x + u_1 - u_2 u_3 / 2u_1\ , & G_2^{(3)} = x - u_1 + u_2 u_3 / 2u_1 \\ \tilde{G}_1^{(3)} = x + u_1 - u_2^2 / 2u_1 \quad , & \tilde{G}_2^{(3)} = x - u_1 + u_2^2 / 2u_1 \end{array} \tag{8}$$

となり、$G_i^{(k)} \neq \tilde{G}_i^{(k)}$ である。$3 \leq k < \infty$ の場合も同様である。ところが、$k = \infty$ のとき

$$G_i^{(\infty)} = \tilde{G}_i^{(\infty)} = x + (-1)^{(i+1)} u_1 (1 + (1/2) S - (1/8) S^2 + \cdots) \quad (S = (u_2^2 + u_2 u_3)/u_1^2)$$

であり、Hensel 因子 $G_i^{(\infty)}$ と $\tilde{G}_i^{(\infty)}$ は等しくなる。 ■

この例から分るように、計算途中の Hensel 因子は異なるのが普通であるが、それは項を取り込む順番が異なるだけであり、無限次まで構成した Hensel 因子はべき級数として等しくなる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 1. 異なる二つの重みに対する Newton 多項式を F_{New} および $\tilde{F}_{\mathrm{New}}$ と、Hensel 因子を $G_i^{(k)}$ および $\tilde{G}_i^{(k)}$ と表す $(i=1,\ldots,r)$。$F_{\mathrm{New}}=\tilde{F}_{\mathrm{New}}$ かつ $G_i^{(0)}=\tilde{G}_i^{(0)}$ ならば，$G_i^{(\infty)}=\tilde{G}_i^{(\infty)}$ である。 ■

$\boldsymbol{w},\tilde{\boldsymbol{w}}\in\mathbb{N}^{\ell}$ を重みベクトルとし、それぞれの重みに対する Newton 多項式を $F_{\mathrm{New}},\tilde{F}_{\mathrm{New}}$ とする。重みの同値関係 $\sim$ を次式で定義する。

$$\boldsymbol{w}\sim\tilde{\boldsymbol{w}} \iff F_{\mathrm{New}}=\tilde{F}_{\mathrm{New}}$$

定理 1 から、同値な範囲で重みを変えても得られる Hensel 因子は不変であることが分る。$F(x,\boldsymbol{u})$ の重みベクトルの同値類が全て分れば、この同値類から各々一つずつ重みを取り、その重みで拡張 Hensel 構成を行うことにより、$F(x,\boldsymbol{u})$ の異なる分解が全て得られる。与多項式の項数が有限であるため Newton 多項式は高々有限種類しかなく、したがって重みの同値類も有限個である。次章では、重みの同値類の具体的かつ効率的な探し方について Newton 多面体という観点から考察する。

4 Newton 多面体と Newton 多項式

Newton 多面体は計算代数における基礎的なツールの一つで、[MR88] で提示された Gröbner 扇の理論などにおいて用いられている。多面体に関する諸性質については [Zig95] を参照されたい。

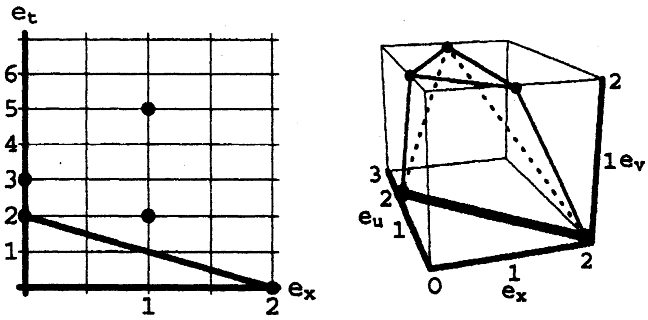
$F(x,\boldsymbol{u})\in\mathbb{C}[x,\boldsymbol{u}]$ を $F(x,\boldsymbol{u})=\sum_{(e_x,e_u)}c_{(e_x,e_u)}x^{e_x}\boldsymbol{u}^{e_u}$ と表し、その指数ベクトルの集合を $E(F)=\{(e_x,e_u)\mid c_{(e_x,e_u)}\neq 0\}\subset\mathbb{N}^{(\ell+1)}$ で表すとき、$F(x,\boldsymbol{u})$ の Newton 多面体を、$\mathrm{Newton}(F):=\mathrm{conv}(E(F))$ と定める。また、$\mathrm{Newton}(F)=Q$ とし、与えられた $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{(\ell+1)}$ に対し、$\mathrm{face}_v(Q):=\{q\in Q\mid \boldsymbol{v}\cdot q\geq \boldsymbol{v}\cdot q'\ (^{\forall}q'\in Q)\}$ を Q の $\boldsymbol{v}$ に対する face と呼ぶ。さらに、与えられた face、$R=\mathrm{face}_v(Q)$ に対して、$N_Q(R)=\{\boldsymbol{v}'\in\mathbb{R}^{(\ell+1)}\mid \mathrm{face}_{v'}(Q)=R\}$ を R の正規錐 (normal cone) と呼ぶ。

同じ face を与えるベクトル $\boldsymbol{v}$ を同値と定めれば、正規錐は同値ベクトル全体の集合である。Newton(F) の全ての face に対する正規錐の閉包は多面体的扇であることが知られている。

face を与えるベクトルと重みベクトルとの関係は、次の補題で規定される。

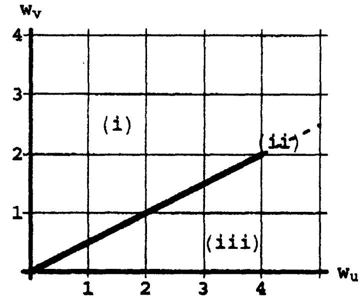
補題 1. $F(x,\boldsymbol{u})\in\mathbb{C}[x,\boldsymbol{u}]$, $Q=\mathrm{Newton}(F)$ とし、重みベクトル $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_\ell)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}=-(\mu/n,w_1,w_2,\ldots,w_\ell)$ を定める。このとき、$F(x,\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{w}$ に関する F_{New} の各項は、$\mathrm{face}_v(Q)$ のどれかの点に一対一に対応する。つまり $E(F)\cap\mathrm{face}_v(Q)=E(F_{\mathrm{New}})$ である。 ■

例 3. $F(x,u,v)=x^2+(u^3v^2+v^2)x-u^2-2uv^2$ とする。
$\boldsymbol{w}=(1,1)$ の場合、$F_{\mathrm{New}}=x^2-u^2$ で、この重みベクトルに対応するのは $\boldsymbol{v}=(-1,-1,-1)$ である。$E(F_{\mathrm{New}})=\{(2,0,0),(0,2,0)\}$, $\mathrm{face}_v(\mathrm{Newton}(F))=\mathrm{conv}(\{(2,0,0),(0,2,0)\})$ であり、対応関係が分る。



図は、F の $\boldsymbol{w}=(1,1)$ の時の (e_x,e_t)-平面へのプロットの様子（左）と、Newton(F) ($\mathrm{face}_v(\mathrm{Newton}(F))$ は太線) の様子（右）を示している。

今の例では、Newton 多項式に対応する face はあと二つある。それらに対する正規錐と重みベクトルとの関係から、重みベクトルの同値類も錐をなすことが分る。三つの錐を一つの平面上に並べると、第一象限を埋めつくし、この例の多項式に対しては下図に示す扇が描ける（錐の一つは直線である)。



図の (i),(ii),(iii) はそれぞれ次の Newton 多項式に対応している。

(i) $F_{\text{New}} = x^2 - u^2$

(ii) $F_{\text{New}} = x^2 + v^2x - u^2 - 2uv^2$

(iii) $F_{\text{New}} = x^2 + v^2x$

■

5 重みを変えると Newton 多項式が変わる場合

定理 1 より、重みベクトルの正規錐の中では重みを変えても拡張 Hensel 構成による分解が変わることはないが、異なる正規錐に移るように重みを変えると、一般に解析的振舞が異なる Hensel 因子が得られる。この章では解析的振舞が異なる Hensel 因子の関係を調べ、それらの間の変換について考察する。

まず、Newton 多項式が異なる場合、対応する Hensel 因子がどのように異なるのか、例で見よう。

例 4. $F(x,u,v) = x^2 + u^2x - u^2 - 2uv - v^2$ とする。$\boldsymbol{w} = (1,2)$ の場合、Newton 多項式とその分解は $F_{\text{New}} = x^2 - u^2 = (x-u)\times(x+u)$ となる。初期因子を $G_1^{(0)} = x-u$, $G_2^{(0)} = x+u$ とするとき、Moses-Yun 補間式は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} W_1^{(0)} = 1/2u\ , & W_2^{(0)} = -1/2u \\ W_1^{(1)} = 1/2\ \ , & W_2^{(1)} = 1/2 \end{array} \tag{9}$$

$\tilde{\boldsymbol{w}} = (1,1)$ に対する Newton 多項式、Hensel 因子、Moses-Yun 補間式をそれぞれ $\tilde{F}_{\text{New}}, \tilde{G}_i^{(k)}, \tilde{W}_i^{(l)}$ と表す。この場合、Newton 多項式とその分解は $\tilde{F}_{\text{New}} = x^2 - u^2 - 2uv - v^2 = (x-u-v)\times(x+u+v)$ となる。$\tilde{G}_1^{(0)} = x-u-v$, $\tilde{G}_2^{(0)} = x+u+v$ とおいて Moses-Yun 補間式を計算すると次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \tilde{W}_1^{(0)} = 1/2(u+v)\ , & \tilde{W}_2^{(0)} = -1/2(u+v) \\ \tilde{W}_1^{(1)} = 1/2 \qquad\ \ , & \tilde{W}_2^{(1)} = 1/2 \end{array} \tag{10}$$

これらを用いて Hensel 構成を行うと、次の Hensel 因子が得られる。

$$\begin{array}{ll} G_i^{(\infty)} = x + (-1)^i u(1 + \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}S^2 + \cdots) & \left(S = \dfrac{u^4 + 8uv + 4v^2}{4u^2}\right) \\ \tilde{G}_i^{(\infty)} = x + (-1)^i (u+v)(1 + \frac{1}{2}\tilde{S} - \frac{1}{8}\tilde{S}^2 + \cdots) & \left(\tilde{S} = \dfrac{u^4}{4(u+v)^2}\right) \end{array} \tag{11}$$

■

$\boldsymbol{w}$ と $\tilde{\boldsymbol{w}}$ は互いに隣り合う正規錐の中の重みベクトルとする。これらの重みで得られる Hensel 因子の間の変換が分れば、変換を繰り返すことによって任意の重みベクトルへの変換ができる。以下では重みベクトルを $\tilde{\boldsymbol{w}}$ から $\boldsymbol{w}$ へ変えたとき、Hensel 因子がどう変換されるかを考える。いままで通り $\boldsymbol{w}$ に対する Newton 多項式、Moses-Yun 補間式、Hensel 因子をそれぞれ $F_{\text{New}}, W_i^{(l)}, G_i^{(k)}$ とし、$\tilde{\boldsymbol{w}}$ に対しては $\tilde{F}_{\text{New}}, \tilde{W}_i^{(l)}, \tilde{G}_i^{(k)}$ とする。このとき、次が成り立つことに注意しておく。

$$T(F_{\text{New}}) \subset T(\tilde{F}_{\text{New}}) \quad \text{または} \quad T(F_{\text{New}}) \supset T(\tilde{F}_{\text{New}}) \tag{12}$$

Hensel 因子の間の変換は、Newton 多項式の変換と、Moses-Yun 補間式の変換に帰着する。

Newton 多項式 $\tilde{F}_{\text{New}}$ から F_{New} への変換は簡単に得られる。(12) より $\tilde{F}_{\text{New}} = F_{\text{New}} + H$ と表せるから、F_{New} を初期因子として、$\tilde{F}_{\text{New}}$ を重み $\boldsymbol{w}$ で拡張 Hensel 構成しさえすればよい：

$$\tilde{F}_{\text{New}} = F_{\text{New}} + H = (G_1^{(0)} + H_1)\cdots(G_r^{(0)} + H_r)$$

ここで、$H, H_1, \ldots, H_r$ は $\boldsymbol{w}$ に関して高次項で、従変数に関する有理関数べき級数環の元である。

次に、Moses-Yun 補間式の変換である。[SIK05] では、Moses-Yun 補間式 $W_i^{(0)}$ の分母は $G_i^{(0)}$ と $F_{\mathrm{New}}/G_i^{(0)}$ の終結式、$\mathrm{res}(G_i^{(0)}, F_{\mathrm{New}}/G_i^{(0)})$ で書けることが述べられている。このことと Newton 多項式の変換より、

$$\mathrm{res}(\tilde{G}_i^{(0)}, \tilde{F}_{\mathrm{New}}/\tilde{G}_i^{(0)}) = \mathrm{res}(G_i^{(0)} + H_i, F_{\mathrm{New}}/G_i^{(0)} + H_i') = \mathrm{res}(G_i^{(0)}, F_{\mathrm{New}}/G_i^{(0)}) + \hat{H}_i \tag{13}$$

が得られる。$\mathrm{res}(\tilde{G}_i^{(0)}, \tilde{F}_{\mathrm{New}}/\tilde{G}_i^{(0)})$ は $\tilde{W}_i^{(\ell)}$ の分母であるから、上式右辺の高次項 $\hat{H}_i$ をべき級数展開で $W_i^{(\ell)}$ の分子部分にあげると次式が得られる。

$$\tilde{W}_i^{(l)} = W_i^{(l)} T_i^{(l)} \quad (T_i^{(l)} \in \mathbb{C}\{(u)\}[x] : \text{重み}\tilde{w}\text{に関して斉次}) \tag{14}$$

上の結果を使えば、w に対する Hensel 因子は次のように表せる。

$$\tilde{G}_i^{(\infty)} = \tilde{G}_i^{(0)} + \sum_k \sum_l \delta \tilde{f}_l^{(k)} \tilde{W}_i^{(l)} \implies G_i^{(\infty)} = G_i^{(0)} + H_i + \sum_k \sum_l \delta \hat{f}_l^{(k)} W_i^{(l)} T_i^{(l)} \tag{15}$$

ここで、$\hat{f}_l^{(k)}$ は、$F(x,u)$ の項と $\tilde{W}_i^{(l)}$ の積和で計算された $\delta\tilde{f}_l^{(k)}$ を (14) を用いて変換したものである。

例 4′. (続き) 例 4 の Hensel 因子 $\tilde{G}_1^{(3)}$ を (15) を用いて変換する。
まず Newton 多項式の変換は次のようになる。

$$F_{\mathrm{New}} = x^2 - u^2 = (x-u) \times (x+u) \xrightarrow[\text{E.H.C.}]{} (x-u-v) \times (x+u+v) = \tilde{F}_{\mathrm{New}} \tag{16}$$

次に Moses-Yun 補間式の変換であるが、$W_i^{(1)} = \tilde{W}_i^{(1)}$ $(i=1,2)$ なので、変換 $\tilde{W}_i^{(0)} \Rightarrow W_i^{(0)}$ を考える。

$$\tilde{W}_1^{(0)} = \tfrac{1}{2(u+v)} = \tfrac{1}{2u(1+v/u)} = \tfrac{1}{2u}\left(1 - \tfrac{v}{u} + (\tfrac{v}{u})^2 - \cdots\right) \tag{17}$$

$W_2^{(0)}$ についても同様に変換ができ、次式が得られる。

$$T_i^{(0)} = \left(1 - v/u + (v/u)^2 - \cdots\right) \quad (i = 1, 2)$$

重み $\tilde{w}$ で見ると、$T_i^{(0)}$ は 0-斉次のべき級数であることが興味深い。

以上の準備のもと Hensel 因子を変換するが、ここでは $i=1$ と $k=3$ について見る。

$$\tilde{G}_1^{(3)} = x - u - v + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8(u+v)} = \tilde{G}_1^{(2)} - \frac{u^4}{4}\tilde{W}_1^{(0)}$$

(17) より

$$\tilde{G}_1^{(3)} \Rightarrow x - u - v + \frac{u^2}{2} + \left(-\frac{u^3}{8} + \frac{u^2 v}{8} - \cdots\right)$$

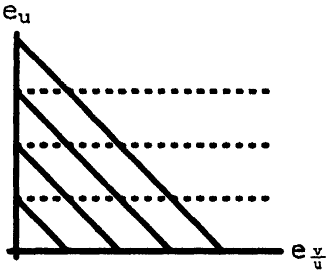
となる。一方、重み w に対して 3 次の Hensel 因子 $(k=3)$ は

$$G_1^{(3)} = x - u - v + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{8}$$

であり、$\tilde{G}_1^{(3)}$ から変換したものには余計な項が入っているように見える。ところが

$$G_1^{(4)} = x - u - v + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{8} + \frac{u^2 v}{8}$$

を見ると $u^2v/8$ の項が現れている。さらに $k = 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow \cdots$ と構成していくと、$\tilde{G}_1^{(3)}$ から変換したときに現れたべき級数を低次の項から順に取り込んでいくことが分る。



左図は、重み w と $\tilde{w}$ に対する拡張 Hensel 構成がそれぞれ 1 回の構成で取り込む項の範囲を示したものである。隣り合う直線に囲まれた領域が 1 回の構成で取り込まれる範囲で、実線が w に、点線が $\tilde{w}$ に対応している。これを見ると、重み $\tilde{w}$ では 1 回の構成で v/u に関して ∞ 位の項まで取り込んでいることが分る。上例はそれを反映したものであり、この変換の興味深い点である。 ■

例が示すように、異なる重みに対する Hensel 因子の間の関係は、ある $k, k' < \infty$ に対して $\tilde{G}_i^{(k)} \Rightarrow G_i^{(k')}$ となるわけではない。しかし $\tilde{G}_i^{(\infty)}$ を変換したものはべき級数として $G_i^{(\infty)}$ に等しい。つまり、次の定理が成り立つ。

定理 2. Newton 多項式 F_{New} のある因子 $G_i^{(0)}$ が、異なる重みに対する Newton 多項式 $\tilde{F}_{\mathrm{New}}$ の因子 $\tilde{G}_i^{(0)}$ に対応するとする。$T(F_{\mathrm{New}}) \subset T(\tilde{F}_{\mathrm{New}})$ または $T(F_{\mathrm{New}}) \supset T(\tilde{F}_{\mathrm{New}})$ のとき、一方の因子、例えば $\tilde{G}_i^{(\infty)}$ を他方の因子 $G_i^{(\infty)}$ に変換することが出来る。 ■

この定理は代数関数を含む Hensel 因子の変換にもそのまま成立する。

参 考 文 献

[Ina05] D. Inaba: Factorization of multivariate polynomials by extended Hensel Construction, ACM SIGSAM Bulletin, **39**, 142-154 (2005).

[Iwa03] M. Iwami: Analytic factorization of the multivariate polynomial, Proc. CASC 2003, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technishe Universität München Press, 213-225 (2003).

[Iwa04] M. Iwami: Extension of expansion base algorithm to multivariate analytic factorization, Proc. CASC 2004, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technishe Universität München Press, 269-282 (2004).

[Kuo89] T.-C. Kuo: Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbb{C}[[x,y]]$, Canad. J. Math. **XLI**, 1101-1116 (1989).

[Mcd95] J. McDonald: Fiber polytopes and fractional power series, J. of Pure and Applied Algebra, **104**, 213-233 (1995).

[MR88] F. Mora and L. Robbiano: The Gröbner fan of an ideal, J. Symbolic Comput., **6**, no.2-3, 183-208 (1988).

[SI00] T. Sasaki and D. Inaba: Hensel construction of $F(x, u_1, \ldots, u_\ell), \ell \geq 2$, at a singular point and its applications, ACM SIGSAM Bulletin **34**, 9-17 (2000).

[SIK05] T. Sasaki, D. Inaba and K. Katamachi: An approach to singularity from the extended Hensel construction, preprint (2005).

[SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16**, 257-285 (1999).

[SS96] K. Shiihara and T. Sasaki: Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. Japan J. Indust. Appl.Math. **13**, 107-116 (1996).

[Zig95] Günter M. Ziegler: Lectures on Polytopes, Springer-Verlag (1995).