

# リーマンゼータ関数の冪級数展開について

村上 弘

MURAKAMI HIROSHI

首都大学東京 数理情報科学専攻

DEP. OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCES, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY\*

要約: リーマンの $\zeta$ 関数を題材にとり、高精度数値計算を用いて簡単な冪級数展開の実験を行った。

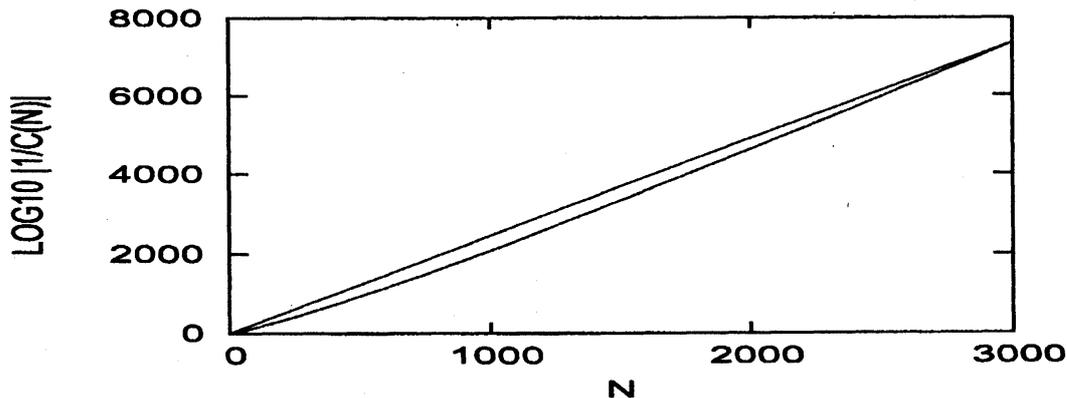
$\zeta$ 関数の級数展開係数である Stieltjes 係数の数値を Mathematica により高精度に求め、その級数に簡単な変形を施した級数の係数を Fortran90 により (高精度多倍長演算拡張パッケージ MPFUN を利用して) 高精度に計算した。

本件報告の内容は論文 [1] の一部に似ている。

## 1 導入

$\text{Re } s > 1$  での通常の  $\zeta$  関数は  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  と定義され、 $s = 1$  を中心として  $\zeta(s) = 1/(s-1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_n/n! \cdot (s-1)^n$  と冪級数展開 (Laurant 展開) される。ここで  $\gamma_n$  は一般化 Euler 定数 (Stieltjes 定数)[2]:  $\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \sum_{k=1}^m (\log k)^n/k - (\log m)^{n+1}/(n+1) \}$ 、但し  $n = 0$  で  $k = 1$  のとき  $(\log k)^n = 1$  で、 $\gamma_0 = \gamma$  (通常の Euler 定数)。以降では  $c_n = (-1)^n \gamma_n/n!$  と定義する。 $(1-s)\zeta(s)$  は整関数だから、 $|c_n|$  は任意の正数  $\varepsilon > 0$  の  $n$ -冪よりも速く 0 に収束する。実際、グラフの曲線の傾きの増大傾向からも  $|1/c_n|$  の対数の値が漸近的に  $n$  の一次関数よりも大きくなると認めうる (図 1. 曲線の両端を結ぶ直線を上側に加えた。)

図 1:  $\log_{10} |1/c(n)|$ , for  $n = 0, \dots, 3000$



\*murakami@tmca.ac.jp

グラフの振舞いは比較的滑らかに見える。 $n = 1700$ までの  $\log |\gamma_n|$  と  $\gamma_n$  の符号のグラフは論文 [11] にもある。論文 [6] には  $\gamma_n$  の漸近展開式が導かれている。

## 2 係数 $c_n$ の計算

Stieltjes 定数の積分による計算法は論文 [1],[11] 等に出ているが、今回は Mathematica v4.1 の関数 `StieltjesGamma[n]` を用いた。その内部で用いられている計算法は不明であり、出力された  $c_n$  の値が指定した精度を正しく持つかは不明である。例えば、高い要求精度で計算させると途中で内部ルーチンから「積分の収束が悪いので適当なところで反復を中断した」というような警告が出て心配になる。このようにブラックボックスに重要な計算部分を委ねることは本来まったく良くないことである。

係数  $c_n$  の Mathematica による計算と出力 (桁数 `ndigits`, 最大項数 `nmix` は与える):

```
Do[ Print[ "c(",n,")=",
  FortranForm[ (-1)^n * N[StieltjesGamma[n]/(n!), ndigits ]], {n, 0, nmix} ]
```

今回  $c_n$  の値は  $n = 1000$  までを精度 1000 桁で、それ以降  $n = 3000$  までを精度 200 桁で求めた。この作業には CPU が Intel Celeron 1.2 GHz、主記憶容量 1 Gbyte の PC を用いて約一ヶ月間を要した。(但し Mathematica v4.1 Kernel による主記憶の占有量は約 11 Mbyte 程度以下に過ぎなかった。) もしも仮に Mathematica のライセンスを複数台分保有していたならば、仕事を  $n$  の値に基づき振り分ける単純な分散並列処理を行うことでほぼ計算台数分の一に経過時間を短縮できたであろう。求めた係数  $c_n$  の数値はテキストファイルとして保存し、適切に編集してプログラムへの入力に利用した。

## 3 ゼータ函数の零点と冪級数の収束半径

リーマン予想は「 $\zeta$  函数の零点の実部は全て  $1/2$  以下」とも云える。論文 [1] と同様に臨界線  $\text{Re } s = 1/2$  の右側半平面を複素単位円  $|t| = 1$  の内部に写像する一次分数変換  $s = 1/(1-t)$  を採る。 $s = 1$  は  $t = 0$  に、 $s = 1/2$  は  $t = -1$  に、 $s = \infty$  は  $t = 1$  に写る。

函数  $(s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s-1)^{n+1}$  は  $s$  の複素平面上正則だから、 $\zeta(s)$  の零点は  $\log((s-1)\zeta(s))$  の対数特異点で、 $\frac{1}{(s-1)\zeta(s)}$  の極である。いま  $F(t) = \frac{1}{1-t} \zeta\left(\frac{1}{1-t}\right) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{1-t}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{l=0}^{\infty} f_l t^{l+1}$

を定義すると、 $F(t)$  の冪級数展開の係数は  $f_0 = 1, f_{l+1} = \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} c_n$  により計算でき、 $n = nmix$  までの  $c_n$  の値から  $l = nmix$  までの  $f_l$  の値が求まる。二項係数の関係  $\binom{l}{0} = 1, \binom{l}{n+1} = \binom{l}{n} \cdot \frac{l-n}{n+1}$  を用いて和を取る。

臨界線  $\text{Re } s = 1/2$  上に  $\zeta(s)$  が零点を持つことから、逆数  $1/F(t)$ 、対数微分  $F'(t)/F(t)$ 、対数  $\log F(t)$  のそれぞれの  $t = 0$  での冪級数の収束半径は全て 1 以下である。もしも仮に  $1/2 < \text{Re } s$  となる  $\zeta(s)$  の零点  $s_0$  が存在すれば、それと対応する  $t_0$  は  $|t_0| < 1$  で  $1/F(t), F'(t)/F(t), \log F(t)$  の特異点になり、冪級数の収束半径は真に 1 より小さい。よって「これらの級数の収束半径が丁度 1 に等しい」ことがリーマン予想に等価となる。もちろん級数の有限部分からでは数学的に確実なことは何も言えない。また仮に臨界線の右側に  $\zeta(s)$  の零点  $s_0 = \sigma + i\tau$  が在ったとしても、 $|\tau|$  が大きければ対応する点  $t_0$  は単位円周から僅かに内側となり、無限級数の最初の有限項の係数の数値的挙動から収束半径が 1 よりも小と推定するのは難しい。係数の絶対値の振舞いが指数函数的増大ではないことを数値的に云うのは難しく、漸近的な振舞を数値例から

予想して証明が出来たりすればよいが、そのようなことはまず期待出来ない。現実的時間で計算可能な小さな有限領域で得た知見や予想は、大きな有限では覆り得る。

#### 4 冪級数 $1/F(t)$ , $F'(t)/F(t)$ , $\log F(t)$ の計算

• 組立除法による  $1/F(t)$  の冪級数の計算法:  $F(t) = 1 + \sum_{j>0} f[j] t^j$  とするとき、

```
w[0] := 1; for j := 1 to nm do w[j] := 0;
for k := 0 to nm do begin
  h[k] := w[k]; for j := k+1 to nm do w[j] := w[j] - h[k] * f[j-k]
end
```

により、 $1/F(t)$  の Taylor 展開  $1 + \sum_{j>0} h[j] t^j$  の最初の  $nm$  次までの項  $h[0] = 1, h[1], \dots, h[nm]$  が  $f[0] = 1, f[2], \dots, f[nm]$  から求まる。

• 組立除法による対数微分  $F'(t)/F(t)$  の冪級数の計算:  $F(t) = 1 + \sum_{j>0} f[j] t^j$  とするとき、

```
for j := 0 to nm-1 do w[j] := (j+1) * f[j+1];
for k := 0 to nm do begin
  h[k] := w[k]; for j := k+1 to nm do w[j] := w[j] - h[k] * f[j-k]
end
```

により、対数微分  $F'(t)/F(t)$  の Taylor 展開  $1 + \sum_{j>0} h[j] t^j$  の最初の  $nm-1$  次までの項  $h[0] = 1, h[1], \dots, h[nm-1]$  が  $f[0] = 1, f[2], \dots, f[nm]$  から求まる。

• 対数  $\log F(t)$  の級数計算: 対数微分  $F'(t)/F(t)$  の級数  $1 + \sum_{j>0} h[j] t^j$  の最初の  $nm-1$  次までの係数  $h[0] = 1, h[1], \dots, h[nm-1]$  が求まっているとき、

```
for k := nm downto 1 do g[k] := h[k-1] / k;
g[0] := 0
```

により、 $\log F(t)$  の Taylor 展開  $\sum_{j>0} g[j] t^j$  の最初の  $nm$  次までの係数  $g[0] = 0, g[1], \dots, g[nm]$  が求まる。

#### 5 級数係数のグラフ

計算により  $1/F(t)$ ,  $F'(t)/F(t)$ ,  $\log F(t)$  の級数係数の近似値を次数と共にプロットしたグラフを作成した。グラフの振舞い(図 3, 図 4, 図 5)は振動的で、それらの大きさは(今回の計算で求めた範囲からの想像でしかないが)漸近的に定数によって抑えられそうに見える。

图 2: Coefficients of the Taylor series of  $F(t)$ ;  $NMX=3000$ .

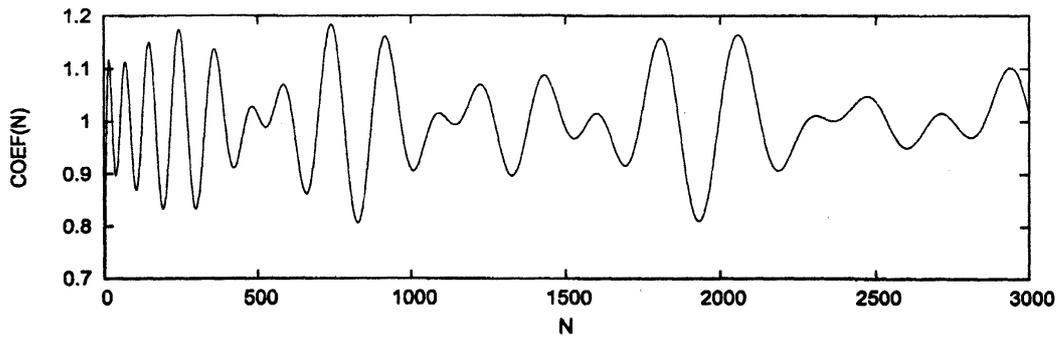


图 3: Coefficients of the Taylor series of  $1/F(t)$ ;  $NMX=3000$ .

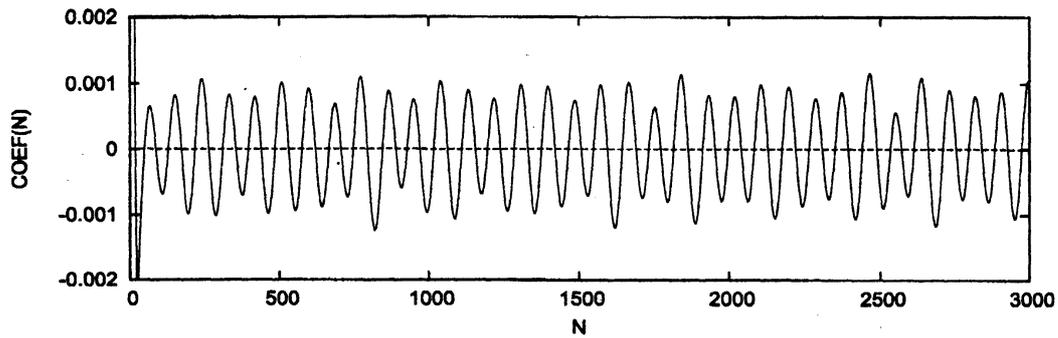


图 4: Coefficients of the Taylor series of  $F'(t)/F(t)$ ;  $NMX=3000$ .

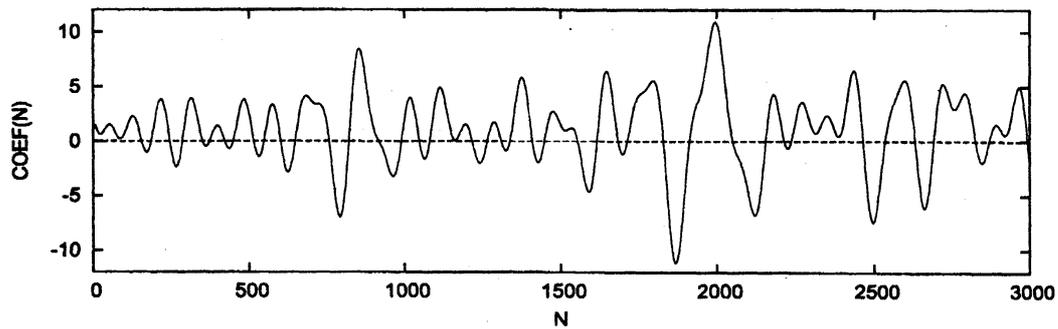
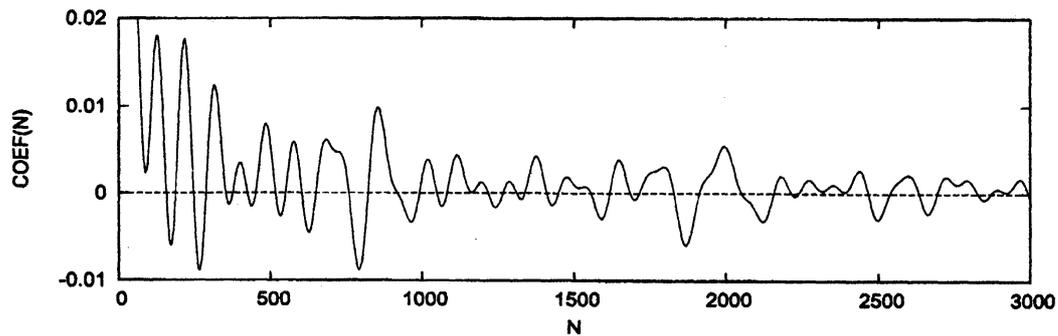


图 5: Coefficients of the Taylor series of  $\log F(t)$ ;  $NMX=3000$ .



## 6 $F(t)$ の有限部分の根

もしも  $F(t)$  の零点が複素単位円の内部にあれば、それはゼータ函数  $\zeta(s)$  の臨界線の右側の零点に対応する。 $1/F(t)$ ,  $F'(t)/F(t)$ ,  $\log F(t)$  等の冪級数展開の収束半径を知るのに展開係数の振舞いを見るのではなく、冪級数  $F(t)$  の単位円盤内部の零点を近似的に求めることを考えたい。

これは数学的ではなく、単に意図の「説明」に過ぎない：無限級数  $F(t)$  の  $m$  次の項までとった有限部分  $F_m(t) = 1 + \sum_{l>0}^m f_l t^l$  を定義する。 $|t| < 1$  であるような  $F(t)$  の零点  $t_1$  がもしもあれば、 $m$  を充分大にとると  $|t_1| < 1$  により剰余項は任意に小さくなるから  $F_m(z)$  の零点を  $z$ , ( $|z| < 1$ ) とすると、 $|F_m(z)|$  も任意に小さくなるため、 $z$  が  $t_1$  に収束すると期待できる。

また、級数  $F(t)$  の収束半径は 1 である ( $(1-s)\zeta(s)$  が整函数であるので容易) ので  $|t| > 1$  に対しては級数の値は発散するから、 $m$  を充分に大きくとると  $F_m(t)$  の値は 0 から充分離れるようになる。つまり  $F_m(z)$  の零点は次第に複素単位円板の外に居られなくなり円周付近に集まってくるであろう。

$F_m(t) = 0$  となる  $t$  の値は、主係数 1 の  $m$  次代数方程式  $P_m(t) = x^m + \sum_{l>0}^m f_l x^{m-l} = 0$  の根の「逆数」となる。そこで代数方程式  $P_m = 0$  の  $m$  個の根を四倍精度 (実数一語が 16 bytes=128 bit) の演算を用いて随伴行列法を用いて求めた。

計算された根の精度を確認する為に四倍精度で得た各近似根を初期値として、MPFUN を用いて 1000 桁精度の演算で Newton 反復法を行い、各近似根の値の変動が精度 15 桁程度では無視可能なことを確かめた。

$m$  を増加させるときの根の分布は複素平面上の原点を中心とする単位円周に接近していく傾向が見られた。 $m = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$  の各場合について、複素平面内での  $P_m = 0$  の全根の位置をプロットしたグラフを掲げる (図 6, ..., 図 13)。

図 6. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 16$ ).

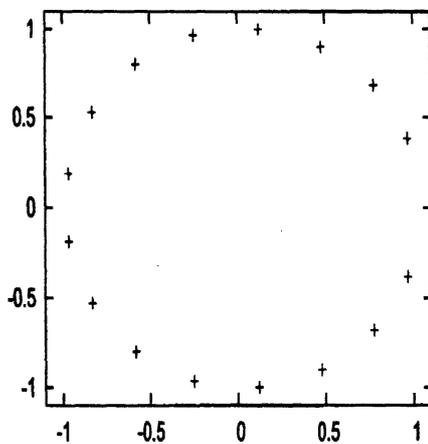


図 7. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 32$ ).

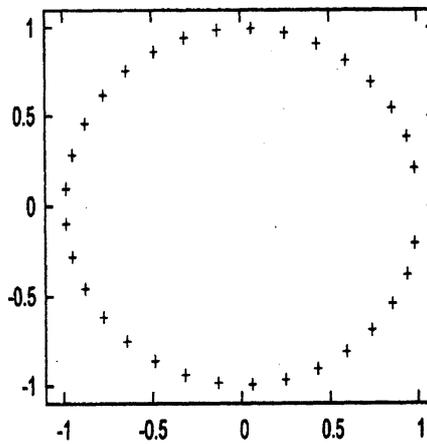


图 8. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 64$ ).

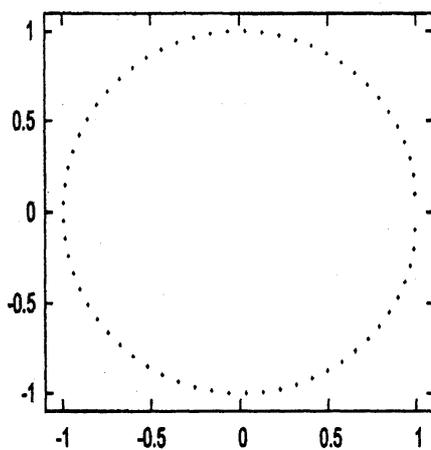


图 9. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 128$ ).

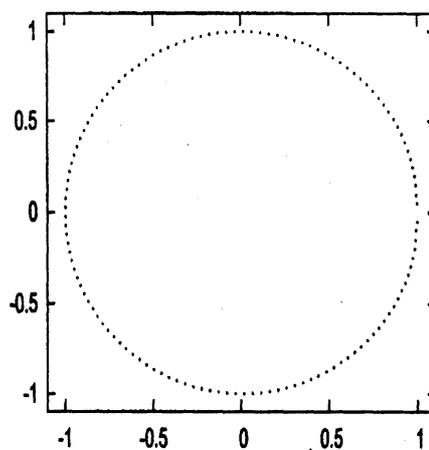


图 10. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 256$ ).

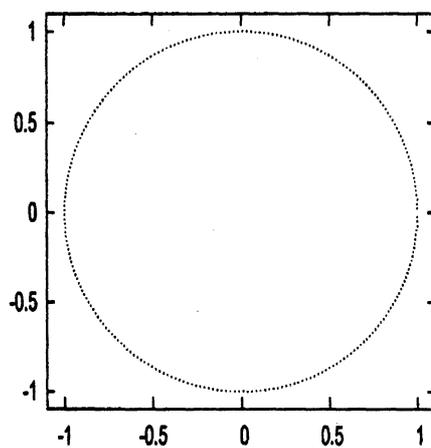


图 11. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 512$ ).

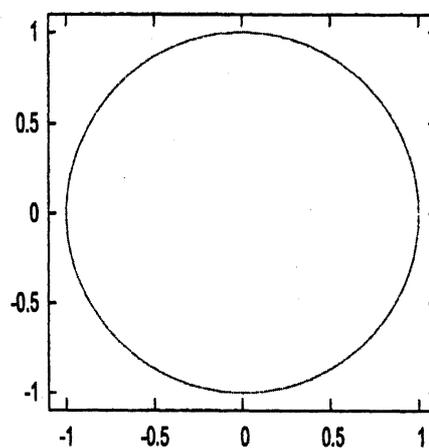


图 12. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 1024$ ).

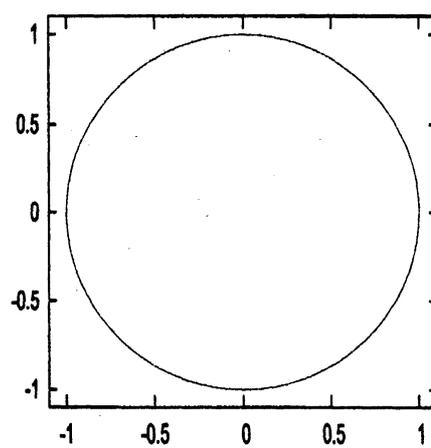
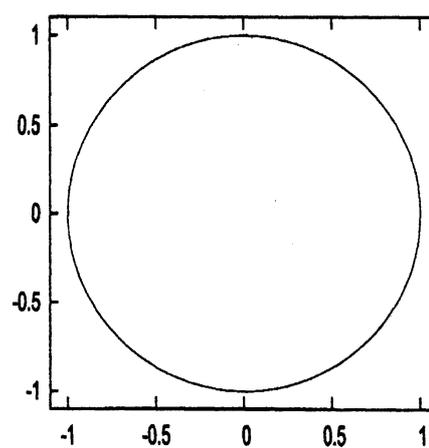


图 13. Roots of  $P_m = 0$  ( $m = 2048$ ).



## 7 改善すべき点

Stieltjes 定数または  $c_n$  の高精度近似値は、正しさの保証を確実にする為にプログラムを作成して計算することが強く望ましい。また並列分散処理を用いて計算速度を稼ぐ為にも重要である。

また、高精度であっても近似値は数学的に正当な誤差範囲を区間演算等により与えることが望ましい。(有効桁の推定は精度を変えた計算により概ね可能ではあるが。)

## 参 考 文 献

- [1] Jerry. B. Keiper, "Power series expansions of Riemann's  $\xi$  function", Math. Comp. vol.58, No.198(April 1992), pp.765-773.
- [2] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun Ed., "*Handbook of Mathematical Functions*", section 23.2, National Bureau of Standards, 1964.
- [3] W. E. Briggs and S. Chowla, "The power series coefficients of  $\zeta(s)$ ", Amer. Math. Monthly, vol.62 (1955), pp.323-325.
- [4] Jan Bohman and Carl-Erik Froberg, "The Stieltjes function - definition and properties", Math. Comp. vol.51 (1988), pp.281-289.
- [5] Derrick Henry Lehmer, "The sum of like powers of the zeros of the Riemann zeta function", Math. Comp. vol.50, No.181 (Jan.,1988), pp.265-273.
- [6] Yasushi Matsuoka, "On the power series coefficients of the Riemann zeta function", Tokyo J. Math. vol.12 (1989), pp.49-58.
- [7] Lev Aizenberg, Victor Adamchik and Vadim E. Levit, "Approaching the Riemann hypothesis with Mathematica", The Mathematica Journal, vol.7, Issue 1,(1997), pp.54-57.
- [8] Linas Vepstas, "A Series representation for the Riemann zeta derived from the Gauss-Kuzmin-Wirsing", Aug 2005.  
URL: (<http://linas.org/math/poch-zeta.pdf>)
- [9] David H. Bailey, "A Fortran-90 based multiprecision system", RNR Technical Report RNR-94-013, Jan 6, 1995.  
MPFUN90 の最新ソースとドキュメントの入手先は: URL: (<http://crd.lbl.gov/dhbailey/mpdist/>).
- [10] Eric W. Weisstein, "Stieltjes constants", From MathWorld - A Wolfram Web Resource, URL: (<http://mathworld.wolfram.com/StieltjesConstants.html>).
- [11] Rick Kreminski, "Newton-Cotes integration for approximating Stieltjes (generalized Euler) constants", Math. Comp., vol.72, No.243 (2002), pp.1379-1397.
- [12] 西沢清子, 齋藤真一: 「一般化されたオイラーの定数について」, 数理解析研究所講究録 1456, 京都大学数理解析研究所, 2005年11月, pp.167-173.