数理解析研究所講究録
1518巻 2006年 164-171

双曲構造の変形と常微分方程式の確定特異点の合流操作, II

Deformations of hyperbolic cone-manifolds and the confluence of singular points of ordinary differential equations of Fuchsian type, II

京都大学・大学院理学研究科　藤井道彦　(Michihiko FUJII)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

1 Introduction

アニュラス $M = \mathbf{R} \times S^1$ 上に双曲構造の1パラメーター族 $\{\sigma_t\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ を考え、双曲計量 σ_t に依る常微分方程式 E_t を考える。常微分方程式 E_t は、偏微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ を変数分離してできる特異点をもつ常微分方程式である。ここで、 Δ_t は (M, σ_t) の微分1形式 ξ に作用するLaplacianである。この偏微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ の双対をとると、調和ベクトル場の方程式を得る。

ここで考える双曲構造 σ_t は次のようなものである。$t > 0$ のときには、錐角 t の錐点を付け加えることで双曲錐多様体 $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ となる。$t = 0$ のときは、カスプをもつ双曲曲面 (M, σ_0) である。$t < 0$ のときには、長さ $-t$ の測地的境界をもつ双曲曲面 $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ に完備化できる。完備距離空間の1パラメーター族 $\{(\overline{M}, \overline{\sigma_t})\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ は Gromov-Hausdorff 位相のもとで連続である。

$t > 0$ のときに、E_t は $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ の錐点に対応する確定特異点 u_t をもつ。$t = 0$ のときに、E_t は (M, σ_0) のカスプに対応する不確定特異点 w_0 をもつ。$t < 0$ のときに、E_t は $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ の測地的境界に対応する正則点 v_t をもつ。$t > 0$ を単調に減少させるとき、$t = 0$ のときに E_t の確定特異点 u_t の合流が生じて、不確定特異点 w_0 に変わることを前の論文で報告した(「双曲構造の変形と常微分方程式の確定特異点の合流操作」, in Perspectives of Hyperbolic Spaces, RIMS Kokyuroku **1329** (2003), 102–108)。この論文では、t がさらに減少して $t < 0$ となるとき、その不確定特異点 w_0 が E_t の正則点 v_t に変化していくことを報告する。

2 Differential equations for a 2-dimensional hyperbolic cone-manifold and a 2-dimensional hyperbolic manifold with geodesic boundary

U を

$$U := \{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2; r > 0\}$$

とする。実数 $t \neq 0$ に対して、V_t を次の同値類による U の商空間とする。

$$(r_1,\theta_1) \sim (r_2,\theta_2) \Longleftrightarrow r_1 = r_2 \text{ and } {}^{\exists}k \in \mathbf{Z} \text{ such that } \theta_1 - \theta_2 = tk.$$

このとき、V_t はアニュラス $M = \mathbf{R} \times S^1$ と同相である。

次のように V_t 上に Riemann 計量を入れる。

$$\sigma_t = \begin{cases} dr^2 + \sinh^2 r\ d\theta^2 & \text{if } \ t > 0, \\ dr^2 + \cosh^2 r\ d\theta^2 & \text{if } \ t < 0, \end{cases}$$

但し、θ は modulo t で定まるとする。V_t で Riemann 多様体 (M, σ_t) を表すことにする。

$t > 0$ のとき、V_t の完備化 $\overline{V_t}$ は錐角 t の錐点をもつ双曲錐多様体である。$t < 0$ のとき、V_t の完備化 $\overline{V_t}$ は長さ $-t$ の測地的境界をもつ双曲曲面である。

Δ_t を Riemann 多様体 V_t の Laplacian とする。微分 1 形式 ξ に対する微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ を考える。この微分方程式の解となる微分 1 形式の双対を取ることで、調和ベクトル場を得る。

今、V_t 上の 1 形式 ξ が

$$\sigma_t = \begin{cases} \xi = f(r)\cos a\theta\ dr + g(r)\sin a\theta\ \sinh r\ d\theta, & \text{if } \ t > 0, \\ \xi = f(r)\cos a\theta\ dr + g(r)\sin a\theta\ \cosh r\ d\theta, & \text{if } \ t > 0 \end{cases}$$

と表されていると仮定する。ここで、$a := \frac{2\pi n}{t}$ $(n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\})$ とする。このとき、

$$(\Delta_t + 2)\xi = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} f''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} f'(r) - \left\{2 + \frac{a^2+1}{\sinh^2 r}\right\} f(r) - \frac{2a\cosh r}{\sinh^2 r} g(r) = 0, \\ g''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} g'(r) - \left\{2 + \frac{a^2+1}{\sinh^2 r}\right\} g(r) - \frac{2a\cosh r}{\sinh^2 r} f(r) = 0, \end{aligned} \right\} & \text{if } \ t > 0, \\ \left\{ \begin{aligned} f''(r) + \frac{\sinh r}{\cosh r} f'(r) - \left\{2 + \frac{a^2-1}{\cosh^2 r}\right\} f(r) - \frac{2a\sinh r}{\cosh^2 r} g(r) = 0, \\ g''(r) + \frac{\sinh r}{\cosh r} g'(r) - \left\{2 + \frac{a^2-1}{\cosh^2 r}\right\} g(r) - \frac{2a\sinh r}{\cosh^2 r} f(r) = 0, \end{aligned} \right\} & \text{if } \ t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

となる。

そこで今、

$$F(z) := f(z) + g(z), \qquad G(z) := f(z) - g(z)$$

とし、$z = \tanh \frac{r}{2}$ と変数変換すると、$t > 0$ のときは

$$\begin{cases} F''(z) + \dfrac{1}{z} F'(z) - \left\{ \dfrac{8}{(z-1)^2(z+1)^2} - \dfrac{(a+1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} + \dfrac{(a-1)^2}{(z-1)(z+1)} \right\} F(z) = 0, \\ G''(z) + \dfrac{1}{z} G'(z) - \left\{ \dfrac{8}{(z-1)^2(z+1)^2} - \dfrac{(a-1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} + \dfrac{(a+1)^2}{(z-1)(z+1)} \right\} G(z) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$t < 0$ のときは

$$\begin{cases} F''(z) + \dfrac{2z}{z^2+1} F'(z) - \left\{ \dfrac{8}{(z^2-1)^2} + \dfrac{4(a^2-1)}{(z^2+1)^2} + \dfrac{16a\, z}{(z^2-1)(z^2+1)^2} \right\} F(z) = 0, \\ G''(z) + \dfrac{2z}{z^2+1} G'(z) - \left\{ \dfrac{8}{(z^2-1)^2} + \dfrac{4(a^2-1)}{(z^2+1)^2} - \dfrac{16a\, z}{(z^2-1)(z^2+1)^2} \right\} G(z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

を得る。

(i) $t > 0$ の場合

$z = \frac{u-a}{1-a}$ と変数変換すると、(2) は

$$(E_t) \begin{cases} F''(u) + \dfrac{1}{u-a} F'(u) \\ \quad - \left\{ \dfrac{8(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)^2} - \dfrac{(a+1)^2(a-1)^2}{(u-a)^2(u-1)(u-2a+1)} + \dfrac{(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)} \right\} F(u) = 0, \\ G''(u) + \dfrac{1}{u-a} G'(u) \\ \quad - \left\{ \dfrac{8(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)^2} - \dfrac{(a-1)^4}{(u-a)^2(u-1)(u-2a+1)} + \dfrac{(a+1)^2}{(u-1)(u-2a+1)} \right\} G(u) = 0 \end{cases}$$

となる。これは4点 $u = 1$、$u = a$、$u = 2a - 1$、$u = \infty$ を確定特異点とする Fuchs 型の常微分方程式である。その指数は

$$2, -1 \ \ (\text{at } u = 1); \ \pm|a+1| \ \ (\text{at } u = a); \ 2, -1 \ \ (\text{at } u = 2a-1); \ \pm|a-1| \ \ (\text{at } u = \infty)$$

である。

$(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ の錐点は確定特異点 $u = a$ に対応している。この確定特異点 $u = a$ を u_t と表す。

(ii) $t < 0$ の場合

$z = \frac{v-a}{1-a}$ と変数変換すると、(3) は

$$
(E_t)\begin{cases}
F''(v) & +\dfrac{2(v-a)}{(v-a)^2+(1-a)^2}F'(v) \\
& -\left\{\dfrac{8(1-a)^2}{\{(v-a)^2-(1-a)^2\}^2}-\dfrac{4(1+a)(1-a)^3}{\{(v-a)^2+(1-a)^2\}^2}\right. \\
& \left.+\dfrac{16a(1-a)^3(v-a)}{\{(v-a)^2-(1-a)^2\}\{(v-a)^2+(1-a)^2\}^2}\right\}F(v)=0, \\
G''(v) & +\dfrac{2(v-a)}{(v-a)^2+(1-a)^2}G'(v) \\
& -\left\{\dfrac{8(1-a)^2}{\{(v-a)^2-(1-a)^2\}^2}-\dfrac{4(1+a)(1-a)^3}{\{(v-a)^2+(1-a)^2\}^2}\right. \\
& \left.-\dfrac{16a(1-a)^3(v-a)}{\{(v-a)^2-(1-a)^2\}\{(v-a)^2+(1-a)^2\}^2}\right\}G(v)=0
\end{cases}
$$

となる。

これは 4 点 $v=1$、$v=2a-1$、$v=a+(a-1)\sqrt{-1}$、$v=a-(a-1)\sqrt{-1}$ を確定特異点とする Fuchs 型常微分方程式である。その指数は

$$
\begin{aligned}
&2,-1 \quad (\text{at } v=1);\ 2,-1 \quad (\text{at } v=2a-1); \\
&\pm(1-a\sqrt{-1}) \quad (\text{at } v=a+(a-1)\sqrt{-1});\ \pm(1+a\sqrt{-1}) \quad (\text{at } v=a-(a-1)\sqrt{-1})
\end{aligned}
$$

である。

$(\overline{M},\overline{\sigma_t})$ の測地的境界は正則点 $v=a$ と対応する。この正則点 $v=a$ を v_t と表す。

3 Differential equations for a cusp

W を

$$W := \{(p,q);(p,q)\in \mathbf{R}^2\}$$

とし、C を次の同値関係による W の商空間とする。

$$(p_1,q_1)\sim(p_2,q_2) \iff p_1=p_2 \text{ and } {}^{\exists}k\in\mathbf{Z} \text{ such that } q_1-q_2=2\pi k.$$

C はアニュラス $M=\mathbf{R}\times S^1$ と同相である。

C 上に次のように Riemann 計量を入れる。

$$\sigma_0 = dp^2 + e^{2-2p}\,dq^2$$

但し、$0\le q\le 2\pi$ とする。C で Riemann 多様体 (M,τ) を表す。C は $r=0$ をカスプとする双曲曲面である。

Δ_0 を Riemann 多様体 C の Laplacian とする。微分 1 形式 η に対する微分方程式 $(\Delta_0+2)\eta=0$ を考える。

今、C 上の微分1形式 η が

$$\eta = f(p)\cos q\ dp + g(p)\sin q\ e^{1-p}dq$$

と表されていると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}&(\Delta_0+2)\eta = 0\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases} f''(p) - f'(p) + \{-2 - e^{2p-2}\}\ f(p) - 2e^{p-1}\ g(p) = 0,\\ g''(p) - g'(p) + \{-2 - e^{2p-2}\}\ g(p) - 2e^{p-1} f(p) = 0\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

となる。

変数変換 $w = 2e^{p-1}$ を施すと、(4) は

$$\begin{cases} f''(w) - \left\{\dfrac{2}{w^2} + \dfrac{1}{4}\right\}\ f(w) - \dfrac{1}{w}\ g(w) = 0,\\ g''(w) - \left\{\dfrac{2}{w^2} + \dfrac{1}{4}\right\}\ g(w) - \dfrac{1}{w}\ f(w) = 0\end{cases} \tag{5}$$

となる。

さらに、

$$F(w) := f(w) + g(w), \quad G(w) := f(w) - g(w)$$

とすると、

$$(E_0)\quad \begin{cases} F''(w) - \left\{\dfrac{2}{w^2} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4}\right\}\ F(w) = 0,\\ G''(w) - \left\{\dfrac{2}{w^2} - \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4}\right\}\ G(w) = 0\end{cases}$$

を得る。

これは確定特異点 $w = \infty$ と不確定特異点 $w = 0$ をもつ Whittaker の微分方程式である。C のカスプは不確定特異点 $w = \infty$ に対応する。この不確定特異点 $w = \infty$ を w_0 と表す。

4 Deformation of hyperbolic structures and the confluence of regular singularities of differential equations

完備距離空間のなす1パラメーター族 $\{(\overline{M}, \overline{\sigma_t})\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ は Gromov-Hausdorff 距離のもとで t について連続的である。

(i) $t > 0$ の場合

$t > 0$ が 0 に近づくとき、, $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ は (M, σ_0) に収束する。この極限操作を「錐点からカスプを作る変形」と呼ぶ。

Theorem 4.1. (2) における n が 0 でないと仮定する。このとき、錐点からカスプを作る変形が常微分方程式 E_t の確定特異点の合流を誘導する。この合流操作でできる常微分方程式は、(M, σ_0) に対応する不確定特異点型の常微分方程式と一致する。

Proof. $t > 0$ が 0 に近づくとき、a は無限大に発散する。そこで、$t > 0$ が 0 に近づくとき、E_t の 2 つの確定特異点 u_t と $u = \infty$ は不確定特異点となり、E_t は次の微分方程式になる。

$$\begin{cases} F''(u) - \left\{ \dfrac{2}{(u-1)^2} + \dfrac{u+1}{u-1} \right\} F(u) = 0, \\ G''(u) - \left\{ \dfrac{2}{(u-1)^2} + \dfrac{u-3}{u-1} \right\} G(u) = 0. \end{cases}$$

そこで、$w = 2(u-1)$ と変数変換すると、

$$\begin{cases} F''(w) - \left\{ \dfrac{2}{w^2} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4} \right\} F(w) = 0, \\ G''(w) - \left\{ \dfrac{2}{w^2} - \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4} \right\} G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。これは E_0 である。つまり、微分方程式 E_0 は E_t の確定特異点の合流操作によって得られる。□

(ii) $t < 0$ の場合

$t < 0$ が 0 に近づくとき、, $(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$ は (M, σ_0) に収束する。

パラメーター a が ∞ に発散するとき、E_t の 2 つの確定特異点 $v = a + (a-1)\sqrt{-1}$ と $v = a - (a-1)\sqrt{-1}$ は不確定特異点となり、E_t は

$$\begin{cases} F''(v) - \left\{ \dfrac{2}{(v-1)^2} - \dfrac{2}{v-1} + 1 \right\} F(v) = 0, \\ G''(v) - \left\{ \dfrac{2}{(v-1)^2} + \dfrac{2}{v-1} + 1 \right\} G(v) = 0 \end{cases}$$

となる。そこで、$w = -2(v-1)$ と変数変換すると、

$$\begin{cases} F''(w) - \left\{ \dfrac{2}{w^2} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4} \right\} F(w) = 0, \\ G''(w) - \left\{ \dfrac{2}{w^2} - \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{4} \right\} G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。これは E_0 である。つまり、E_0 は E_t から 2 つの確定特異点 $v = a + (a-1)\sqrt{-1}$ と $v = a - (a-1)\sqrt{-1}$ の合流操作によって得られる。

4.3. 双曲構造 σ_t に対して, 準同型写像

$$\rho_t : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$$

が up to conjugation で定まる。ここで、 $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ は双曲平面 $\mathbf{H}^2$ の向きを保つ等長変換群である。ρ_t を双曲構造 σ_t のホロノミーと呼ぶ。$t > 0$ かつ $t \neq 2\pi$ のとき、$\rho_t(\pi_1(M))$ は回転角 t の elliptic な元で生成されるので、$\rho_t(\pi_1(M))$ は elliptic であるという。$t = 0$ のとき、$\rho_0(\pi_1(M))$ は parabolic な元で生成されるので、$\rho_0(\pi_1(M))$ は parabolic であるという。$t < 0$ のとき、$\rho_t(\pi_1(M))$ は translation length が $-t$ となる hyperbolic な元で生成されるので、$\rho_t(\pi_1(M))$ は hyperbolic であるという。

	$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$
$\rho_t(\pi_1(M))$	hyperbolic	parabolic	elliptic
$(\overline{M}, \overline{\sigma_t})$	geodesic circular boundary	cusp	cone point
E_t	non-singular point v_t	irregular singular point w_0	regular singular point u_t

Corollary 4.2. アニュラス M 上の双曲構造が 1 パラメーター族 $\{\sigma_t\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ に沿って t が単調に減少する方向に連続的に変わっていくときに、常微分方程式 E_t の確定特異点は $t = 0$ の時に不確定特異点に変わり、その後、正則点に変化していく。

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Kyoto University
Sakyo-ku, Kyoto 606-8502
Japan
E-mail: mfujii@math.kyoto-u.ac.jp

参考文献

[1] M. Boileau and J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, Astérisque **272** (2001).

[2] D. Cooper, C.D. Hodgson and S.P. Kerckhoff, *Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*, MSJ Memories vol. **5**, Mathematical Society of Japan, 2000.

[3] M. Fujii, *Deformations of hyperbolic cone-manifolds and the confluence of singular points of ordinary differential equations of Fuchsian type* (in Japanese), in Perspectives of Hyperbolic Spaces, RIMS Kokyuroku **1329** (2003), 102–108.

[4] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Math. vol. **152**, Birkhäuser, 1999.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé, A Moderm Theory of Special Functions*, Aspect of Mathematics Vol. E16, Vieweg, 1991.

[6] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1969.